Kapitel 2
Essentials

Lernzielangaben Kapitel 2

- Der Begriff einer Menge, Darstellungsweisen von Mengen, grundlegende Mengenoperationen und die üblichen Zahlenmengen sind bekannt.
- Zentrale Rechenregeln und -techniken der Mittelstufe werden beherrscht, insbesondere die Bruch-, Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung.
- Binomische Formeln gehören zum Grundrepertoire.
- Zerlegungen von Polynomen in Linearfaktoren und Ausführen von Polynomdivisionen bereiten keine Schwierigkeiten mehr.
- Das Arbeiten mit dem Betrag sowie dem Summenzeichen bereitet keine Probleme.
- Alle behandelten Rechenregeln sind bestenfalls ohne Formelsammlung jederzeit parat.

Kapitel 2.1
Mengenlehre

Definition einer Menge

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Mengen werden meist mit Großbuchstaben, Elemente von Mengen mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

Ist M eine Menge und x ein bzw. kein Element dieser Menge, schreibt man kurz:

$$x \in M \qquad (x \text{ ist ein Element der Menge } M)$$

$$x \notin M \qquad (x \text{ ist kein Element der Menge } M)$$

Leere Menge und Grundmenge

Eine Menge, die keine Elemente enthält, wird als *leere Menge* bezeichnet und man schreibt:

$$M = \emptyset = \{\}$$

Die *Grundmenge* bezeichnet eine Menge aus allen in einem bestimmten Zusammenhang betrachteten Elementen. Für die Grundmenge ist folgende Symbolik gebräuchlich:

$$M = \Omega$$

Darstellungsweisen von Mengen

Mengen können auf zwei Weisen dargestellt werden:

1) Aufzählende Darstellung
2) Beschreibende Darstellung

1) $M_1 = \{2, 10, 15, 16, 21\}$ (endliche aufzählende Darstellung)
$M_2 = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$ (unendliche aufzählende Darstellung)

2)
$$M_3 = \{x | x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$$
$$M_4 = \{x | x \text{ ist eine Primzahl}\}$$

Exkurs: Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl, die größer als Eins und ausschließlich durch sich selbst und Eins teilbar ist. Eine Primzahl ist demnach eine natürliche Zahl mit genau zwei natürlichen Zahlen als Teiler. Die kleinsten Primzahlen sind: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Man schreibt dann:

$$A = B$$

Andernfalls sind sie ungleich und man schreibt:

$$A \neq B$$

Damit ist weder die Reihenfolge, noch die Anzahl der Elemente in einer Menge entscheidend für einen Vergleich von Mengen untereinander, sondern nur, welche Elemente enthalten sind.

$$\begin{aligned}
\{x, y, z\} &= \{z, y, x\} = \{y, y, z, x, z, y\} \\
\{1, 2, 3, 4, 5\} &= \{5, 3, 2, 4, 1\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5\} \\
\{1, 2, 3, 4\} &\neq \{2, 3, 4, 5\} \\
\{1, 2, 3, \ldots\} &\neq \{2, 3, \ldots\}
\end{aligned}$$

Intervalldarstellung von Mengen (1)

Es sei $a, b \in \mathbb{R}$. Man unterscheidet vier Intervalldarstellungen:

Abgeschlossenes Intervall:

$$[a, b] := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x \leq b\}$$

Rechts halboffenes Intervall:

$$[a, b) := [a, b[:= \{x | x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x < b\}$$

Links halboffenes Intervall:

$$(a, b] :=]a, b] := \{x | x \in \mathbb{R} \text{ mit } a < x \leq b\}$$

Offenes Intervall:

$$(a, b) :=]a, b[:= \{x | x \in \mathbb{R} \text{ mit } a < x < b\}$$

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird auf Folie 19 definiert.

Intervalldarstellung von Mengen (2)

Es sei $a = 3$, $b = 7$ und x eine natürliche Zahl. Dann gilt:

Abgeschlossenes Intervall:

$$[3,7] = \{3,4,5,6,7\}$$

Rechts halboffenes Intervall:

$$[3,7) = [3,7[= \{3,4,5,6\}$$

Links halboffenes Intervall:

$$(3,7] =]3,7] = \{4,5,6,7\}$$

Offenes Intervall:

$$(3,7) =]3,7[= \{4,5,6\}$$

Teilmengen und echte Teilmengen

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist. Man schreibt:

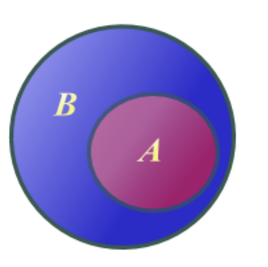
$$A \subseteq B$$

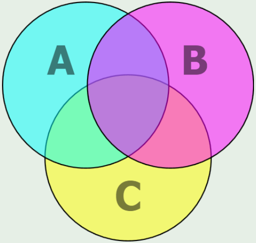
Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist und es mindestens ein Element aus B gibt, das nicht in A enthalten ist. Man schreibt:

$$A \subset B$$

Es sei $A = \{3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Dann ist A eine Teilmenge von B ($A \subseteq B$). Aufgrund des Elementes $b_5 = 7$ gilt jedoch $A \neq B$, weshalb A sogar eine echte Teilmenge von B ist ($A \subset B$).

Venn-Diagramme
Venn-Diagramme stellen sämtliche Relationen betrachteter Mengen dar und dienen so einer graphischen Veranschaulichung von Mengen.





Nachteil: Sie werden relativ schnell unübersichtlich (bei mehr als drei zu betrachtenden Mengen).

Mengenoperationen

Es sei Ω eine Grundmenge und $A, B \subseteq \Omega$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A \cap B: &\quad \text{Schnittmenge von } A \text{ und } B \\
A \cup B: &\quad \text{Vereinigungsmenge von } A \text{ und } B \\
\overline{A}: &\quad \text{Komplementärmenge von } A \text{ bzgl. } \Omega \\
A \backslash B: &\quad \text{Differenzmenge von } A \text{ und } B
\end{aligned}
$$

Gilt für die Schnittmenge $A \cap B$ zweier Mengen A und B

$$A \cap B = \emptyset,$$

werden A und B als *disjunkt* (elementefremd) bezeichnet.

Anwendung der Mengenoperationen (1)

Es sei $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{5\} \\ A \cup B &= \{3, 4, 5, 6, 7\} \\ \overline{A} &= \{2, 6, 7\} \\ A \backslash B &= \{3, 4\} \end{aligned}$$

Es sei $\Omega = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{2, 3\} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\} \\ A \backslash B &= \{1\} \\ A \cap \overline{B} &= \{1, 2, 3\} \cap \{-3, 0, 1, 5, 6\} = \{1\} \end{aligned}$$

Anwendung der Mengenoperationen (2)

Gegeben seien folgende Mengen:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{3, 4, 5, 6\} \quad C = \{3, 5, 7\}$$
$$\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
A \cup \overline{C} &= A \cup \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\} \\
\overline{A} \cap B &= \{-2, -1, 0, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 5, 6\} \\
A \cap C &= \{3\} \\
B \cap C &= \{3, 5\} \\
(A \cap B) \cap C &= \{3\} \cap \{3, 5, 7\} = \{3\} \\
\overline{(A \cap B) \cup C} &= \overline{\{3\} \cup \{3, 5, 7\}} = \overline{C} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 8\}
\end{aligned}$$

Kapitel 2.2
Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Die Addition und Multiplikation von Zahlen aus $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ ergibt wieder Elemente aus $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$.

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Zahlen aus $\mathbb{Z}$ ergibt wieder Elemente aus $\mathbb{Z}$.

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} := \{r | r = p/q \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$$

Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlen aus $\mathbb{Q}$ (mit Ausnahme einer Division durch Null) ergibt wieder Elemente aus $\mathbb{Q}$. Rationale Zahlen sind Brüche und damit periodische oder abbrechende Dezimalzahlen.

$$\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{7}{-15} \quad , \quad \frac{-11}{4}$$

Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$

$$\mathbb{I} := \{r | r \neq p/q \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$$

Die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ umfasst alle Dezimalzahlen, die nicht abbrechend und nicht periodisch sind.

$$\begin{aligned} \pi &= 3,14159\ldots \\ e &= 2,71828\ldots \\ \sqrt{2} &= 1,41421\ldots \end{aligned}$$

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlen aus $\mathbb{R}$ (mit Ausnahme einer Division durch Null) ergibt wieder Elemente aus $\mathbb{R}$.

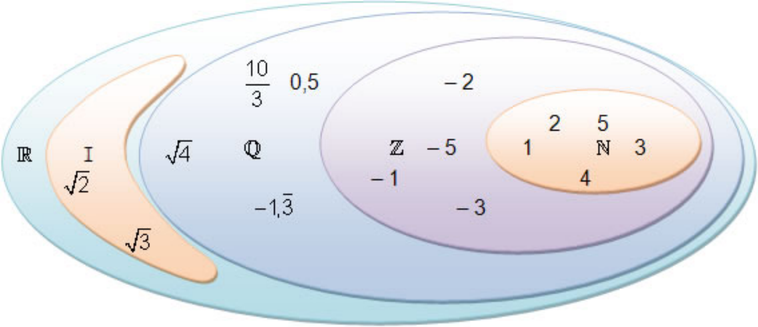
Menge der nicht-negativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{R}_+ := \{r | r \in \mathbb{R} \text{ mit } r \geq 0\}$$

Die Addition, Multiplikation und Division von Zahlen aus $\mathbb{R}_+$ (mit Ausnahme einer Division durch Null) ergibt wieder Elemente aus $\mathbb{R}_+$.

Im Folgenden wird immer, sofern nicht explizit anders angegeben, mit der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gearbeitet.

Graphische Darstellung der Zahlenmengen



Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

Die komplexen Zahlen erweitern den Bereich der reellen Zahlen derart, dass ein Polynom n-ten Grades stets genau n Nullstellen besitzt (hierzu mehr in den Kapiteln 3 und 4).

Dies gelingt durch Einführung einer neuen Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Die Zahl i wird dabei als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

Eine komplexe Zahl $a + b \cdot i$ besteht aus dem *Realteil* a und dem *Imaginärteil* b. Gilt $a = 0$, liegt eine rein imaginäre Zahl $b \cdot i$ vor. Gilt $b = 0$, liegt eine rein reelle Zahl a vor.

$$z_1 = 10 + 4i \qquad z_2 = -7i \qquad z_3 = 3$$

z_1 ist eine komplexe Zahl bestehend aus dem Realteil $a = 10$ und dem Imaginärteil $b = 4$, z_2 ist wegen $a = 0$ eine rein imaginäre Zahl mit $b = -7$ und z_3 ist wegen $b = 0$ die rein reelle Zahl $a = 3$.

Kapitel 2.3
Grundlegende Rechengesetze und -regeln

Grundrechenarten

Mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind die vier Grundrechenarten *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division* (mit Ausnahme einer Division durch Null) uneingeschränkt ausführbar.

Summe: $a + b$	(Summand + Summand)
Differenz: $a - b$	(Minuend - Subtrahend)
Produkt: $a \cdot b$	(Faktor $\cdot$ Faktor)
Quotient: a/b mit $b \neq 0$	(Dividend / Divisor)

Für $a = 7$ und $b = 3$ gilt:

$$7 + 3 = 10$$
$$7 - 3 = 4$$
$$7 \cdot 3 = 21$$
$$\frac{7}{3}$$

Neutrale und inverse Elemente
Die Addition und die Multiplikation besitzen neutrale und inverse (d.h. entgegengesetzte) Elemente.

Neutrales Element der Addition:	$a + 0 = a$
Neutrales Element der Multiplikation:	$a \cdot 1 = a$
Inverses Element der Addition:	$a + (-a) = 0$
Inverses Element der Multiplikation:	$a \cdot 1/a = 1 \quad (a \neq 0)$

Für $a = 7$ gilt:

$$\begin{aligned} 7 + 0 &= 7 \\ 7 \cdot 1 &= 7 \\ 7 + (-7) &= 0 \\ 7 \cdot \frac{1}{7} &= 1 \end{aligned}$$

Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation
Die Reihenfolge, in der eine Addition oder eine Multiplikation vorgenommen wird, ist nicht von Bedeutung.

$$\text{Addition: } a + b = b + a$$
$$\text{Multiplikation: } a \cdot b = b \cdot a$$

Für $a = 7$ und $b = 3$ gilt:

$$7 + 3 = 10 = 3 + 7$$
$$7 \cdot 3 = 21 = 3 \cdot 7$$

Sie gelten auch für mehrere Summanden bzw. Faktoren:

$$7 + 3 + 4 = 14 = 4 + 3 + 7$$
$$7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 = 3 \cdot 4 \cdot 7$$

Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation
Die Klammerung bei mehreren assoziativen Verknüpfungen ist beliebig.

$$\text{Addition: } (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$\text{Multiplikation: } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Für $a = 7$, $b = 3$ und $c = 4$ gilt:

$$(7+3)+4 = 14 = 7+(3+4)$$
$$(7 \cdot 3) \cdot 4 = 84 = 7 \cdot (3 \cdot 4)$$

Demnach spielt es keine Rolle, wie oder ob Klammern bei assoziativen Verknüpfungen gesetzt werden.

Distributivgesetz

Ausmultiplizieren von Klammern über eine Verteilung des Faktors auf die einzelnen Summanden.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Für $a = 7$, $b = 3$ und $c = 4$ gilt:

$$7 \cdot (3 + 4) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 21 + 28 = 49$$

Der Faktor a ist demnach mit jedem Summanden zu multiplizieren und die so entstehenden Produkte sind zu addieren.

Ausmultiplizieren

Das Distributivgesetz bildet die Grundlage für das Ausmultiplizieren von in Klammern stehenden Summen.

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

Für $a = 7$, $b = 3$, $c = 4$ und $d = 5$ gilt:

$$(7+3)\cdot(4+5) = 7\cdot 4 + 7\cdot 5 + 3\cdot 4 + 3\cdot 5 = 28 + 35 + 12 + 15 = 90$$

Jeder Summand in einer Klammer ist mit jedem Summanden der anderen Klammer zu multiplizieren und die so entstehenden Produkte sind zu addieren.

Das Distributivgesetz ist also mehrfach hintereinander auszuführen:

$$(a+b)\cdot(c+d) = (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d$$

Ausklammern

Wenn ein Faktor in jedem Summanden auftritt, kann der Faktor ausgeklammert werden.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Für $a = 7$, $b = 3$ und $c = 4$ gilt:

$$7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 7 \cdot (3 + 4) = 7 \cdot 7 = 49$$

Damit bildet das Ausklammern das Gegenstück zum Distributivgesetz.

Vorzeichenregeln

$$-(-a) = a$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Für $a = 7$, $b = 3$ und $c = 4$ gilt:

$$-(-7) = -1 \cdot (-7) = 7$$
$$7 + (3 - 4) = 7 + 3 - 4 = 6$$
$$7 - (3 - 4) = 7 - 3 + 4 = 8$$

Kurz:
„Minus mal Minus ergibt Plus“ bzw. „Minus mal Plus ergibt Minus“

Ein Minuszeichen vor einer Klammer ist konsistent mit dem Distributivgesetz, da es gleichbedeutend ist zu einer Multiplikation aller Größen innerhalb der Klammer mit dem Faktor -1.

Klammerrechnung
Generell gilt, dass *Punkt*- (d.h. Multiplikation & Division) vor *Strichrechnungen* (Addition & Subtraktion) auszuführen sind.

$$6 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 2 - 4/2 = 18 + 4 - 10 - 2 = 10$$

Sind jedoch Rechenoperationen in *Klammern* eingeschlossen, sind diese stets zuerst auszuführen.

$$6 \cdot (3 + 4 - 5) \cdot 2 - 4/(2 + 2) = 6 \cdot 2 \cdot 2 - 4/4 = 24 - 1 = 23$$

Sind Klammern zudem geschachtelt, so sind die Klammern von innen nach außen hin aufzulösen.

$$3 \cdot (4 + 2 \cdot (6 + 7)) = 3 \cdot (4 + 2 \cdot 13) = 3 \cdot (4 + 26) = 3 \cdot 30 = 90$$

Zusammenfassen gleichnamiger Terme

Ein *mathematischer Term* ist ein Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann. Nach dem Ausmultiplizieren von Klammern sind Terme, die dieselben Parameter/Variablen enthalten, zusammenzufassen.

$$(a+1)\cdot(a+2) = a^2 + 2a + a + 2 = a^2 + 3a + 2$$

$$\begin{aligned} & a^2 + 3a\cdot(b-2a) + b\cdot(4-7b) - 3ab \\ = {} & a^2 + 3ab - 6a^2 + 4b - 7b^2 - 3ab \\ = {} & -5a^2 - 7b^2 + 4b \end{aligned}$$

Diese Beispiele zeigen zudem eine **übliche Vereinfachung**: Innerhalb von Produkten über Parameter und/oder Variablen und/oder einer Zahl wird häufig das Multiplikationszeichen weggelassen:

$$6\cdot a\cdot x^2 = 6ax^2$$

Abschließende Beispiele

Kommutativgesetze	$5+3+7=3+7+5=15$
	$5\cdot 3\cdot 7=3\cdot 7\cdot 5=105$
Assoziativgesetze	$(4+6)+8=4+(6+8)=18$
	$(4\cdot 6)\cdot 8=4\cdot(6\cdot 8)=192$
Distributivgesetz	$2\cdot(4+6)=2\cdot 4+2\cdot 6=20$
Ausmultiplizieren	$(4+7)\cdot(1+5)=4\cdot 1+4\cdot 5+7\cdot 1+7\cdot 5=66$
Ausklammern	$3\cdot 7+3\cdot 2=3\cdot(7+2)=27$
Vorzeichenregeln	$-(-4)=4$
	$4+(7-2)=4+7-2=9$
	$4-(7-2)=4-7+2=-1$

Kapitel 2.4
Binomische Formeln und Pascalsches Dreieck

Binomische Formeln

Die Regeln für das Ausmultiplizieren, die Vorzeichenregeln sowie das Zusammenfassen gleichnamiger Terme führen zu den sog. Binomischen Formeln:

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

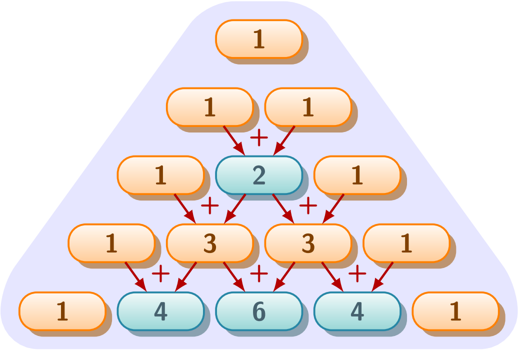
3. Binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Für $a = 2x$ und $b = 3y$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(2x+3y)^2 &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \\
(2x-3y)^2 &= 4x^2 - 12xy + 9y^2 \\
(2x+3y)\cdot(2x-3y) &= 4x^2 - 9y^2
\end{aligned}
$$

Das Pascalsche Dreieck

Das Pascalsche Dreieck erlaubt es, beliebige Potenzen n von Binomen auszumultiplizieren (d.h. $(a \pm b)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$). Die Einträge sind dabei derart angeordnet, dass sich jeder Eintrag über die Summe der zwei darüber stehenden Einträge ergibt.



Anwendung des Pascalschen Dreiecks

$$
\begin{aligned}
n = 0 &: (a \pm b)^0 = 1 \\
n = 1 &: (a \pm b)^1 = a \pm b \\
n = 2 &: (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (1) \\
n = 3 &: (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3
\end{aligned}
$$

Dabei stellt (1) die 1. bzw. 2. Binomische Formel dar.

Für $a = 5x$, $b = 4y$ und $n = 3$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(5x + 4y)^3 &= (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot 4y + 3 \cdot 5x \cdot (4y)^2 + (4y)^3 \\
&= 125x^3 + 300x^2y + 240xy^2 + 64y^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5x - 4y)^3 &= (5x)^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 4y + 3 \cdot 5x \cdot (4y)^2 - (4y)^3 \\
&= 125x^3 - 300x^2y + 240xy^2 - 64y^3
\end{aligned}
$$

Abschließende Beispiele

$$(3a+4c)^0 = 1$$

$$(3a+4c)^1 = 3a+4c$$

$$\begin{aligned}
(2y+4z)^2 &= 4y^2+16yz+16z^2\\
(3-4a)^2 &= 9-24a+16a^2\\
(7+5b)\cdot(7-5b) &= 49-25b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2a+2b)^3 &= (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot 2b+3\cdot 2a\cdot(2b)^2+(2b)^3\\
&= 8a^3+24a^2b+24ab^2+8b^3\\
(2a-2b)^3 &= 8a^3-24a^2b+24ab^2-8b^3
\end{aligned}$$

Kapitel 2.5
Faktorisieren und Polynomdivision

Faktorisieren

Der vorherige Abschnitt zeigt, wie beliebige Potenzen n von Binomen ausmultipliziert werden können. Die Umkehrung dieser Regeln, d.h. die Zerlegung von Termen in Binome, ist jedoch deutlich schwieriger.

In diesem Abschnitt sollen Polynome 2. Grades, d.h. Terme der Form

$$x^2 + a_1 x + a_0,$$

in Binome bzw. Linearfaktoren zerlegt werden. Dieses Vorgehen wird auch als *Faktorisieren* bezeichnet und dient generell dazu, ein Polynom höheren Grades in ein Produkt aus einfacheren Polynomen geringeren Grades zu überführen.

Zerlegung anhand der Binomischen Formeln

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$
$$x^2 - 100 = (x+10)\cdot(x-10)$$

Zerlegung in Linearfaktoren

Jedes Polynom 2. Grades $x^2 + a_1 x + a_0$ lässt sich als Produkt aus zwei Linearfaktoren $(x + b_1)$ und $(x + b_2)$ mit $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ darstellen, wenn es zwei ganzzahlige Lösungen besitzt. Hierbei werden, je nach Vorzeichen der Koeffizienten a_0 und a_1, vier Fälle unterschieden:

$$\text{Fall 1) } a_0, a_1 > 0$$

$$\text{Fall 2) } a_0 < 0, a_1 > 0$$

$$\text{Fall 3) } a_0, a_1 < 0$$

$$\text{Fall 4) } a_0 > 0, a_1 < 0$$

Die „Kunst" des Faktorisierens besteht darin, die Konstante a_0 in zwei Faktoren b_1 und b_2 derart zu zerlegen, dass gilt:

$$b_1 \cdot b_2 = a_0 \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 = a_1$$

Wie die Faktoren b_1 und b_2 im konkreten Fall zu bestimmen sind, zeigen die folgenden Anwendungsbeispiele.

Ausführliches Anwendungsbeispiel zu Fall 1

Gegeben sei das Polynom $x^2 + 19x + 48$. $a_0 = 48$ kann in die folgenden Faktorkombinationen zerlegt werden:

$$1 \cdot 48 \quad | \quad 2 \cdot 24 \quad | \quad 3 \cdot 16 \quad | \quad 4 \cdot 12 \quad | \quad 6 \cdot 8$$

Lediglich die Kombination aus 3 und 16 führt in Summe auf $a_1 = 19$.

Damit lässt sich das Polynom in die folgenden Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 + 19x + 48 = (x + 3) \cdot (x + 16)$$

Ausführliches Anwendungsbeispiel zu Fall 2

Gegeben sei das Polynom $x^2 + 8x - 33$. $a_0 = -33$ kann in die folgenden Faktorkombinationen zerlegt werden:

$$-1 \cdot 33 \quad | \quad -3 \cdot 11 \quad | \quad 1 \cdot (-33) \quad | \quad 3 \cdot (-11)$$

Lediglich die Kombination aus -3 und 11 führt in Summe auf $a_1 = 8$.

Damit lässt sich das Polynom in die folgenden Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 + 8x - 33 = (x + 11) \cdot (x - 3)$$

Ausführliches Anwendungsbeispiel zu Fall 3

Gegeben sei das Polynom $x^2 - 9x - 36$. $a_0 = -36$ kann in die folgenden Faktorkombinationen zerlegt werden:

$$\begin{array}{lclclclcl} 1 \cdot (-36) & | & 2 \cdot (-18) & | & 3 \cdot (-12) & | & 4 \cdot (-9) & | & 6 \cdot (-6) \\ -1 \cdot 36 & | & -2 \cdot 18 & | & -3 \cdot 12 & | & -4 \cdot 9 & & \end{array}$$

Lediglich die Kombination aus 3 und -12 führt in Summe auf $a_1 = -9$.

Damit lässt sich das Polynom in die folgenden Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 - 9x - 36 = (x + 3) \cdot (x - 12)$$

Ausführliches Anwendungsbeispiel zu Fall 4

Gegeben sei das Polynom $x^2 - 15x + 50$. $a_0 = 50$ kann in die folgenden Faktorkombinationen zerlegt werden:

$$-1 \cdot (-50) \quad | \quad -2 \cdot (-25) \quad | \quad -5 \cdot (-10)$$

Lediglich die Kombination aus -5 und -10 führt in Summe auf $a_1 = -15$.

Damit lässt sich das Polynom in die folgenden Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 - 15x + 50 = (x - 5) \cdot (x - 10)$$

Abschließende Beispiele

$$x^2 + 16x + 64 = (x+8)^2 \tag{2}$$
$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \tag{3}$$
$$x^2 - 16 = (x+4)\cdot(x-4) \tag{4}$$
$$x^2 + 18x + 65 = (x+13)\cdot(x+5) \tag{5}$$
$$x^2 + 21x - 100 = (x+25)\cdot(x-4) \tag{6}$$
$$x^2 - 3x - 10 = (x+2)\cdot(x-5) \tag{7}$$
$$x^2 - 10x + 24 = (x-6)\cdot(x-4) \tag{8}$$

Dabei stellen (2) - (4) Anwendungen der Binomischen Formeln und (5) - (8) Anwendungen der Fälle 1) - 4) dar.

Polynomdivision

In einigen Anwendungen ist es hilfreich oder sogar erforderlich, ein Polynom p durch ein anderes Polynom q mit $0 \leq \mathrm{Grad}(q) \leq \mathrm{Grad}(p)$ zu dividieren. Das dazu benötigte Verfahren wird als *Polynomdivision* bezeichnet und liefert eine eindeutige Zerlegung der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit $q \neq 0$, einem Polynom h und einem sog. *Restpolynom* r.

Vorgehensweise bei der Polynomdivision
Die Polynomdivision verläuft analog zur üblichen Division von Zahlen, nur dass anstelle zweier ganzer Zahlen zwei Polynome durcheinander dividiert werden.

Eine Anwendung der Polynomdivision ist bspw. das *Lösen von Gleichungen höheren Grades*. Ist bereits eine Lösung x_0 der Gleichung gefunden, kann die Polynomdivision dazu verwendet werden, den Grad der Gleichung um Eins zu senken.

Ein wichtiger Spezialfall der Polynomdivision liegt vor, wenn ein Polynom p mit $\text{Grad}(p) = n$ durch ein Polynom der Form $x - x_0$, d.h. einen Linearfaktor, dividiert wird.

Anwendungsbeispiel ohne Rest

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 + 2x^2 - 3x \right) : (x+3) = x^2 - x \\
\underline{\;-x^3 - 3x^2\quad} \\
\qquad\qquad -x^2 - 3x \\
\qquad\qquad\;\; \underline{\;x^2 + 3x\;} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Anwendungsbeispiel mit Rest

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^2 + 6x + 100 \right) : (x+9) = x - 3 + \dfrac{127}{x+9} \\
\underline{\;-x^2 - 9x\;} \\
\qquad\quad -3x + 100 \\
\qquad\qquad \underline{\;3x\;\; + 27\;} \\
\qquad\qquad\quad 127
\end{array}
$$

Komplexeres Anwendungsbeispiel ohne Rest

$$
\begin{array}{l}
\left(\; x^5 - x^4 \qquad\qquad\qquad - 16x + 16\right) : \left(x^2 + x - 2\right) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
\underline{-x^5 - x^4 + 2x^3} \\
\qquad - 2x^4 + 2x^3 \\
\qquad \underline{\;\; 2x^4 + 2x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad 4x^3 - 4x^2 - 16x \\
\qquad\qquad \underline{-4x^3 - 4x^2 + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad - 8x^2 - 8x + 16 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\; 8x^2 + 8x - 16} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kapitel 2.6
Bruchrechnung

Grundsätzliches

Ein Bruch kennzeichnet eine noch nicht durchgeführte Division, da die Darstellung a/b mit $b \neq 0$ im Prinzip $a : b$ bedeutet. Dabei wird a als *Zähler*, b als *Nenner* und / als *Bruchstrich* des Bruches a/b bezeichnet.

Ist der Zähler eines Bruches gleich Eins, spricht man von einem *Stammbruch*. Ist der Nenner gleich Eins, spricht man von einem *Scheinbruch* und der Bruch besteht nur aus dem Zähler, entspricht also einfach der Zahl a.

$$\text{Stammbruch: } \frac{1}{3} \qquad \text{Scheinbruch: } \frac{9}{1} = 9$$

Das Arbeiten mit Brüchen erfordert die Anwendung der *Bruchrechnung*.

Erweitern von Brüchen
Multipliziert man Zähler und Nenner eines Bruches mit der gleichen reellen Zahl $c \neq 0$, dann verändert sich der Wert des Bruches nicht.

Für $b, c \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Für $a = 9$, $b = 3$ und $c = 6$ gilt:

$$\frac{9}{3} = \frac{9 \cdot 6}{3 \cdot 6}$$

Kürzen von Brüchen

Weist ein Bruch im Zähler und im Nenner einen gemeinsamen Faktor $c \neq 0$ auf, so kann dieser Faktor gekürzt werden ohne den Wert des Bruches zu verändern.

Für $b, c \neq 0$ gilt:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Für $a = 9$, $b = 3$ und $c = 6$ gilt:

$$\frac{9 \cdot 6}{3 \cdot 6} = \frac{9}{3}$$

Damit bildet das Kürzen eines Bruches die Umkehrung der Erweiterung eines Bruches.

Summe und Differenz zweier Brüche (1)

Sind zwei Brüche *gleichnamig*, d.h. besitzen sie den gleichen Nenner, sind einfach ihre Zähler zu addieren bzw. zu subtrahieren, wobei der Nenner unverändert bleibt.

Für $c \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Für $a = 9$, $b = 3$ und $c = 6$ gilt:

$$\frac{9}{6} \pm \frac{3}{6} = \frac{9 \pm 3}{6}$$

Demnach gilt für Summe und Differenz separat:

$$\frac{9}{6} + \frac{3}{6} = \frac{9+3}{6} = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{9}{6} - \frac{3}{6} = \frac{9-3}{6} = 1$$

Summe und Differenz zweier Brüche (2)
Sind zwei Brüche nicht gleichnamig, ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der beiden Nenner c und d zu bestimmen und die Brüche sind entsprechend zu erweitern.

Für $c, d \neq 0$ und $c \neq d$ gilt:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot \frac{kgV}{c} \pm b \cdot \frac{kgV}{d}}{kgV}$$

Für $a = 9$, $b = 3$, $c = 6$, $d = 2$ und damit $kgV = 6$ gilt:

$$\frac{9}{6} \pm \frac{3}{2} = \frac{9 \cdot \frac{6}{6} \pm 3 \cdot \frac{6}{2}}{6} = \frac{9 \pm 9}{6}$$

Demnach gilt für Summe und Differenz separat:

$$\frac{9}{6} + \frac{3}{2} = \frac{9+9}{6} = 3 \quad \text{bzw.} \quad \frac{9}{6} - \frac{3}{2} = \frac{9-9}{6} = 0$$

Produkt zweier Brüche
Das Produkt zweier Brüche ergibt sich über eine zähler- und nennerweise Multiplikation.

Für $c, d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

Für $a = 10$, $b = 3$, $c = 3$ und $d = 2$ gilt:

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{10 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{30}{6} = 5$$

Quotient zweier Brüche
Die Division zweier Brüche erfolgt durch Multiplikation des Bruches im Zähler mit dem Kehrwert des Bruches im Nenner.

Für $b, c, d \neq 0$ gilt:

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

Für $a = 10$, $b = 3$, $c = 3$ und $d = 2$ gilt:

$$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{20}{9}$$

Multiplikation eines Bruches mit einer reellen Zahl

Multipliziert man einen Bruch mit einer reellen Zahl a, dann wird lediglich der Zähler mit a multipliziert.

Für $c \neq 0$ gilt:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Für $a = 10$, $b = 3$ und $c = 2$ gilt:

$$10 \cdot \frac{3}{2} = \frac{10}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Division eines Bruches durch eine reelle Zahl
Dividiert man einen Bruch durch eine reelle Zahl a, dann wird lediglich der Nenner mit a multipliziert.

Für $a, c \neq 0$ gilt:

$$\frac{b}{c} : a = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{c \cdot a}$$

Für $a = 10$, $b = 3$ und $c = 2$ gilt:

$$\frac{3}{2} : 10 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2 \cdot 10} = \frac{3}{20}$$

Zusammengesetzte Brüche (1)

Sind im Zähler und/oder im Nenner selbst weitere Operationen enthalten, sind diese zuerst durchzuführen. Der Bruchstrich ersetzt demnach die Klammer.

Für $c + d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a+b}{c+d} = (a+b)/(c+d)$$

Für $a = 10$, $b = 3$, $c = 2$ und $d = 8$ gilt:

$$\frac{10+3}{2+8} = \frac{13}{10}$$

Zusammengesetzte Brüche (2)

Brüche mit gleichen Summanden und/oder gleichen Subtrahenden können nicht gekürzt werden.

Für $b \pm c \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt:

$$\frac{a \pm c}{b \pm c} \neq \frac{a}{b}$$

$$\frac{9+3-2}{4+3-2} = \frac{10}{5} = 2 \neq \frac{9}{4}$$

Gemeinsame Teiler aller Summanden und/oder Subtrahenden in Zähler und Nenner können hingegen gekürzt werden.

$$\frac{9+3-6}{6+3-3} = \frac{3 \cdot (3+1-2)}{3 \cdot (2+1-1)} = \frac{3+1-2}{2+1-1} = \frac{2}{2} = 1$$

Exkurs: Dreisatzrechnung

Der *Dreisatz* ist ein Lösungsverfahren für Proportionalaufgaben. Hierbei wird aus drei gegebenen Werten a, b, c mit $b, c \neq 0$ eines Verhältnisses der unbekannte vierte Wert x berechnet:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b} \cdot c$$

Fragestellung:
14 Skripte zur „Mathematik für Betriebswirte I" kosten 168€. Wieviel kosten 20 Skripte?

Lösung:

$$\frac{168€}{14 \text{ Skripte}} = \frac{x}{20 \text{ Skripte}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{168€}{14 \text{ Skripte}} \cdot 20 \text{ Skripte} = 240€$$

Damit kosten 20 Skripte 240€.

Abschließende Beispiele (1)

Erweitern	$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4}$
Kürzen	$\frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{3}{7}$
Summe (gleichnamig)	$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3+4}{7} = \frac{7}{7} = 1$
Differenz (gleichnamig)	$\frac{3}{7} - \frac{4}{7} = \frac{3-4}{7} = -\frac{1}{7}$
Summe	$\frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{6+5}{20} = \frac{11}{20}$
Differenz	$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$

Abschließende Beispiele (2)

Produkt $$\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6\cdot 2}{7\cdot 3}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

Quotient $$\frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{3}}=\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{18}{14}=\frac{9}{7}$$

Multiplikation mit $a \in \mathbb{R}$ $$10\cdot\frac{4}{5}=\frac{10\cdot 4}{5}=\frac{40}{5}=8$$

Division durch $a \neq 0$ $$\frac{36}{5}:4=\frac{36}{5\cdot 4}=\frac{36}{20}=\frac{9}{5}$$

Zusammengesetzte Brüche $$\frac{4+12}{3+12}=\frac{16}{15}\neq\frac{4}{3}$$

$$\frac{4+12+16}{8+20+28}=\frac{4\cdot(1+3+4)}{4\cdot(2+5+7)}$$
$$=\frac{1+3+4}{2+5+7}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$$

Kapitel 2.7
Potenz- und Wurzelrechnung

Potenzierung

Ein Produkt $a \cdot a \cdots a$ aus n gleichen Faktoren wird als *Potenz* bezeichnet. Abkürzend verwendet man die folgende Schreibweise:

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

Dabei bezeichnet a die *Basis*, n den *Exponenten* und a^n die n-te Potenz von a.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7$$
$$9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 = 4^3 \cdot 7^2 \cdot 9^4$$

Potenzgesetze

Es gelten die folgenden Rechenregeln für Potenzen:

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a, b, m, n \neq 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&(\text{P1}) \qquad && \frac{1}{a^n} = a^{-n} \\
&(\text{P2}) \qquad && a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
&(\text{P3}) \qquad && \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
&(\text{P4}) \qquad && (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\
&(\text{P5}) \qquad && a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\
&(\text{P6}) \qquad && \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n
\end{aligned}
$$

Anwendungen der Potenzgesetze

Es sei $a = 4$, $b = 7$, $m = 2$, $n = 3$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\text{(P1)} \qquad \frac{1}{4^3} = 4^{-3} = 0{,}01563 \\
&\text{(P2)} \qquad 4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024 \\
&\text{(P3)} \qquad \frac{4^2}{4^3} = 4^{2-3} = 4^{-1} = \frac{1}{4} \\
&\text{(P4)} \qquad (4^2)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6 = 4096 \\
&\text{(P5)} \qquad 4^3 \cdot 7^3 = (4 \cdot 7)^3 = 28^3 = 21952 \\
&\text{(P6)} \qquad \frac{4^3}{7^3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = 0{,}18659
\end{aligned}
$$

Zusammenhang zwischen Potenz- und Wurzelrechnung
Die Potenzrechnung stellt eine Umkehrung der Wurzelrechnung dar.

Beim Potenzieren sucht man zur Basis $a \in \mathbb{R}$ und Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ die Zahl $x = a^n$. Beim Wurzelziehen (oder *Radizieren*) sucht man hingegen eine Basis x, deren n-te Potenz die Zahl a ergibt, also $x^n = a$.

Die Lösung der Gleichung $x^n = a$ wird als n-te Wurzel von a bezeichnet und man schreibt:

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Dabei wird a als *Radikand* und n als *Wurzelexponent* bezeichnet.

Die Wurzelrechnung kann demnach auch als Erweiterung der Potenzrechnung auf rationale Exponenten $n \in \mathbb{Q}$ angesehen werden.

Wurzelgesetze

Es gelten die folgenden Rechenregeln für Wurzeln:

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m, n \neq 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{W1}) \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\
&(\mathrm{W2}) \qquad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \\
&(\mathrm{W3}) \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \\
&(\mathrm{W4}) \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\
&(\mathrm{W5}) \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{mit } b \neq 0
\end{aligned}
$$

Anwendungen der Wurzelgesetze

Es sei $a = 4$, $b = 7$, $m = 2$, $n = 3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{W1}) \qquad && \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}} = 2,51984 \\
&(\mathrm{W2}) \qquad && \sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3\cdot 2]{4^{3+2}} = 4^{\frac{5}{6}} = 3,17480 \\
&(\mathrm{W3}) \qquad && \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3\cdot 2]{4} = 4^{\frac{1}{6}} = 1,25992 \\
&(\mathrm{W4}) \qquad && \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{4 \cdot 7} = 28^{\frac{1}{3}} = 3,03659 \\
&(\mathrm{W5}) \qquad && \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{4}{7}} = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,82983
\end{aligned}$$

Kapitel 2.8
Logarithmenrechnung

Logarithmen

Das Logarithmieren stellt in gewissem Sinne ebenfalls eine Umkehrung des Potenzierens dar.

Ausgehend von der Gleichung $a^x = b$ mit $a, b > 0$ ist der Exponent x gesucht, so dass die x-te Potenz von a gerade b ergibt. Die Lösung x dieser Gleichung wird als *Logarithmus* der Zahl b zur *Basis* a bezeichnet und man schreibt:

$$x = \log_a b$$

Der Logarithmus von b zur Basis a zeigt demnach, mit welchem Exponenten die Basis a versehen werden muss, um b zu erhalten, also:

$$a^{\log_a b} = b$$

Logarithmengesetze

Es gelten die folgenden Rechenregeln für Logarithmen:

Für $a > 0, a \neq 1$ und $b, c > 0$ gilt:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(L1)} & \log_a a = 1 \\
\text{(L2)} & \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \\
\text{(L3)} & \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \\
\text{(L4)} & \log_a(b^c) = c \cdot \log_a b
\end{array}
$$

Der dekadische und der natürliche Logarithmus

Für $a = 10$ spricht man vom *dekadischen Logarithmus*. Es gilt:

$$x = \log_{10} b = \lg b \quad \text{für} \quad 10^x = b$$

Von besonderem Interesse, vor allem in der Differential- und Integralrechnung, ist der *natürliche Logarithmus* mit der (irrationalen) Eulerschen Zahl $e = 2,71828\ldots$ als Basis. Es gilt:

$$x = \log_e b = \ln b \quad \text{für} \quad e^x = b$$

Umbasierung von Logarithmen
Logarithmen verschiedener Basen können ineinander überführt werden. Um Logarithmen zur Basis b mit Hilfe von Logarithmen der Basis a zu berechnen, verwendet man den Zusammenhang:

Für $a, b > 0, a, b \neq 1$ und $c > 0$ gilt:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Da Taschenrechner häufig nur den dekadischen oder den natürlichen Logarithmus bereitstellen, bietet sich die folgende Umbasierung an:

Für $b > 0, b \neq 1$ und $c > 0$ gilt:

$$\log_b c = \frac{\lg c}{\lg b} = \frac{\ln c}{\ln b}$$

Anwendungen der Logarithmengesetze

Es sei $a = 4$, $b = 7$, $c = 9$. Dann gilt:

$$\text{(L1)} \quad \log_4 4 = \frac{\lg 4}{\lg 4} = 1$$

$$\text{(L2)} \quad \log_4(7 \cdot 9) = \log_4 7 + \log_4 9 = \frac{\ln 7 + \ln 9}{\ln 4} = 2,98863$$

$$\text{(L3)} \quad \log_4 \left(\frac{7}{9}\right) = \log_4 7 - \log_4 9 = \frac{\ln 7 - \ln 9}{\ln 4} = -0,18129$$

$$\text{(L4)} \quad \log_4 \left(7^9\right) = 9 \cdot \log_4 7 = 9 \cdot \frac{\ln 7}{\ln 4} = 12,63310$$

Kapitel 2.9
Betrag, Summen und Produkte

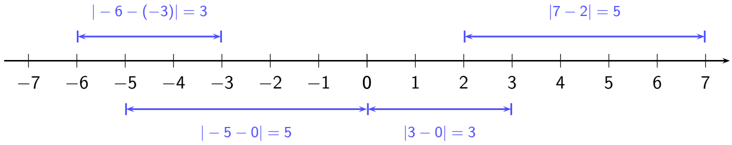
Der Betrag einer reellen Zahl

In vielen Anwendungen interessiert man sich nicht primär für die eigentliche Zahl, sondern lediglich für deren Betrag.

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Auf der Zahlengeraden entspricht der Betrag von x dem Abstand der Zahl x und $-x$ von 0 sowie der Betrag von $x - y$ dem Abstand der Zahlen x und y:



Rechenregeln für den Betrag

Es gelten die folgenden Rechenregeln für den Betrag:

$$
\begin{aligned}
|-x| &= |x| \\
|x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \\
\left|\frac{x}{y}\right| &= \frac{|x|}{|y|} \quad \text{mit } y \neq 0 \\
|x + y| &\leq |x| + |y| \qquad (9) \\
|x - y| &\geq |x| - |y| \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Dabei sind (9) und (10) die sog. *Dreiecksungleichungen.*

Anwendungen der Rechenregeln für den Betrag

$$
\begin{aligned}
|-6| &= |6| = 6 \\
|7 \cdot (-3)| &= |7| \cdot |-3| = 7 \cdot 3 = 21 \\
\left|\frac{-2}{5}\right| &= \frac{|-2|}{|5|} = \frac{2}{5} \\
|-6+5| &\leq |-6| + |5| \\
|-6-5| &\geq |-6| - |5|
\end{aligned}
$$

Das Summenzeichen

Zur vereinfachten Schreibweise von Summen mit vielen Summanden wird das *Summenzeichen* Σ verwendet. Es steht als Wiederholungszeichen für die fortgesetzte Addition:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist a_i der i-te *Summand*, i der *Summationsindex*, m die *untere Summationsgrenze* und n die *obere Summationsgrenze*.

Der Summationsindex kann beliebig gewählt werden. Häufig wird i oder j verwendet.

Rechenregeln für das Summenzeichen

Es gelten die folgenden Rechenregeln für endliche Summen:

$$\sum_{i=m}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{(n-m+1)\ \text{Summanden}} = (n - m + 1) \cdot a$$

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i \quad \text{für} \quad m \leq r < n$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+r}^{n+r} a_{i-r}$$

Doppelsummen

In manchen Anwendungen unterscheiden sich die Summanden durch zwei Indizes. Dadurch entstehen sog. *Doppelsummen*:

$$\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=k}^{l} a_{ij} := \begin{cases} a_{km} + \ldots + a_{kn} + \ldots + a_{lm} + \ldots + a_{ln} & \text{für } n \geq m \text{ und } l \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für endliche Doppelsummen gilt:

$$\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=k}^{l} a_{ij} = \sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_{ij}$$

Sind die Summationsgrenzen identisch, so schreibt man auch:

$$\sum_{i,j=m}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{n} a_{ij}$$

Anwendungen der Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{i=7}^{10} x_i = x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

$$\sum_{i=6}^{4} a_i = 0 \quad \text{(sog. \textit{leere Summe})}$$

$$\sum_{i=6}^{10} 6a = 6 \cdot \sum_{i=6}^{10} a = 6 \cdot (a + a + a + a + a) = 6 \cdot 5a = 30a$$

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{30} + a_{31} + a_{32}$$

Das Produktzeichen

Zur vereinfachten Schreibweise von Produkten mit vielen Faktoren wird das *Produktzeichen* $\prod$ verwendet. Es steht als Wiederholungszeichen für die fortgesetzte Multiplikation:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist a_i der i-te *Faktor*, i der *Multiplikationsindex*, m die *untere Multiplikationsgrenze* und n die *obere Multiplikationsgrenze*.

Rechenregeln für das Produktzeichen

Es gelten die folgenden Rechenregeln für endliche Produkte:

$$\prod_{i=m}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(n-m+1)\text{ Faktoren}} = a^{n-m+1}$$

$$\prod_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c^{n-m+1} \cdot \prod_{i=m}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=m}^{n} (a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=m}^{n} b_i\right)$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \left(\prod_{i=m}^{r} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=r+1}^{n} a_i\right) \quad \text{für} \quad m \leq r < n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m+r}^{n+r} a_{i-r}$$

Anwendungen der Rechenregeln für das Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 = 14400$$

$$\prod_{i=7}^{10} x_i = x_7 \cdot x_8 \cdot x_9 \cdot x_{10}$$

$$\prod_{i=6}^{4} a_i = 1 \quad (\text{sog. } \textit{leeres Produkt})$$

$$\prod_{i=6}^{10} a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

$$\prod_{i=0}^{3} 5a_i = 5^{3-0+1} \cdot \prod_{i=0}^{3} a_i = 5^4 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 625 a_0 a_1 a_2 a_3$$

Die Fakultät

Die *Fakultätsfunktion* ordnet einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner und gleich dieser Zahl zu:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Analog zum leeren Produkt gilt $0! = 1$.

Fakultäten können einfach per Taschenrechner über die Funktion $x!$ berechnet werden.

$$\begin{aligned} 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\ 10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800 \end{aligned}$$

Kapitel 2.10
Komplexere Anwendungen

Komplexere Anwendungen (1)

$$(3x+4)\cdot(7a+b) = 21ax + 3bx + 28a + 4b$$

$$3x^4\cdot(4ab+7pq) = 12abx^4 + 21pqx^4$$

$$9a^3b^4\cdot(2ab^9+6a^7b^2) = 18a^4b^{13} + 54a^{10}b^6$$

$$\begin{aligned}(a^nb^3-4a^2b)\cdot(6ab^n+a^4b^{2n}) &= 6a^{n+1}b^{n+3} + a^{n+4}b^{2n+3}\\ &\quad - 24a^3b^{n+1} - 4a^6b^{2n+1}\end{aligned}$$

$$(6a+5p)\cdot(6a-5p) = 36a^2 - 25p^2$$

Komplexere Anwendungen (2)

$$
\begin{array}{llllll}
\big(\quad x^4 & & & & -1\big) : \big(x+1\big) = x^3 - x^2 + x - 1 \\
\underline{-x^4 - x^3} & & & & \\
 - x^3 & & & & \\
& \underline{x^3 + x^2} & & & \\
& x^2 & & & \\
& & \underline{-x^2 - x} & & \\
& & - x - 1 & & \\
& & \underline{x + 1} & & \\
& & 0 & &
\end{array}
$$

Komplexere Anwendungen (3)

$$(pq + 3x^{a+1})^2 = p^2q^2 + 6pqx^{a+1} + 9x^{2a+2}$$

$$\frac{49 \cdot (ab)^{13}}{7 \cdot (xy)^{13}} = 7 \cdot \left(\frac{ab}{xy}\right)^{13} \quad \text{mit } xy \neq 0$$

$$\begin{aligned}(3a^4 + 6a^5)^3 &= (3a^4)^3 + 3 \cdot (3a^4)^2 \cdot 6a^5 + 3 \cdot 3a^4 \cdot (6a^5)^2 + (6a^5)^3 \\ &= 27a^{12} + 162a^{13} + 324a^{14} + 216a^{15}\end{aligned}$$

$$\frac{3}{a-b} + \frac{4}{a+b} = \frac{3 \cdot (a+b) + 4 \cdot (a-b)}{(a-b) \cdot (a+b)} = \frac{7a-b}{a^2-b^2} \quad \text{mit } a \neq \pm b$$

Komplexere Anwendungen (4)

$$\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{5}{12}=\frac{16+15+5}{12}=\frac{36}{12}=3$$

$$4\cdot\frac{7}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 7\cdot 3}{9\cdot 2}=\frac{84}{18}=\frac{14}{3}$$

$$\frac{36+2718-54}{27-135+198}=\frac{4+302-6}{3-15+22}=\frac{300}{10}=30$$

$$\sqrt[8]{a}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{a^5}}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{1}{8}}\cdot a^{\frac{5}{8}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1+5+4+6}{8}}=a^2$$

Komplexere Anwendungen (5)

$$\begin{aligned}\log_3 8 + \log_3 5 + \log_7 4 - \log_7 2 &= \log_3(8 \cdot 5) + \log_7\left(\frac{4}{2}\right)\\ &= \log_3 40 + \log_7 2\\ &= \frac{\ln 40}{\ln 3} + \frac{\ln 2}{\ln 7}\\ &= 3{,}35776 + 0{,}35621\\ &= 3{,}71397\end{aligned}$$

$$|-5| \cdot |-4 \cdot 3| + \left|\frac{5}{-12}\right| + \left|\frac{-7}{12}\right| = 5 \cdot 12 + \frac{5}{12} + \frac{7}{12} = 61$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{4} 2a}{\sum_{i=1}^{4} 4a} = \frac{2^{4-1+1} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{4 \cdot (a + a + a + a)} = \frac{16a^4}{4 \cdot 4a} = a^3$$

Kapitel 2.11
Übungsaufgaben

1) Geben Sie die folgenden Mengen in einer jeweils anderen Darstellung (Aufzählende Darstellung oder Intervalldarstellung, ggf. beschreibende Darstellung) an. Hierbei gelte $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{1, 2, 3\} \\
M_2 &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\
M_3 &= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\
M_4 &= (6, 13] \\
M_5 &=]2, 5[\\
M_6 &= \emptyset \\
M_7 &=]1, 9]
\end{aligned}$$

2) Ordnen Sie die folgenden Zahlen den Zahlenmengen zu, in denen sie enthalten sind.

$$2 \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{15}{3} \qquad -7 \qquad 4,\overline{6} \qquad 4i \qquad \sqrt{256} \qquad 0,6 \qquad 0$$

3) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$
\begin{aligned}
A &= \{a, c, e, g, i\} \\
B &= \{b, c, d, f, h\} \\
C &= \{e, f, g\} \\
D &= \{b, h, j\}
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie:

a) $A \cap D$
b) $B \cup C$
c) $A \backslash D$
d) $(B \cup D) \backslash C$
e) $(C \cap A) \cup B$
f) $(C \cup A) \cap B$

Fertigen Sie zudem ein geeignetes Venn-Diagramm an, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre Elemente hervorgehen.

4) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A \cap \Omega &= \{a\} \\ B \cap D &= \{c\} \\ D \cup C &= \{c, d, e\} \\ B \backslash D &= \{b\} \\ \overline{C} &= \{a, b, c, d, f\} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d\}$.

b) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d, e\}$.

c) Skizzieren Sie zu a) und zu b) jeweils ein geeignetes Venn-Diagramm, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre jeweiligen Elemente hervorgehen.

d) Wie bezeichnet man die Menge C in Bezug auf die Menge D in Aufgabenteil a) bzw. b)? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

5) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und berechnen Sie sie so weit wie möglich.

   a) $(4+2)\cdot(3+6)$
   b) $(12-3)\cdot(7-1)\cdot 5$
   c) $(7-3+10)\cdot(14+3)\cdot(4-2)$
   d) $(2x+3y)\cdot(7x+y)$

6) Klammern Sie in den folgenden Ausdrücken gemeinsame Faktoren aus.

   a) $36+72+144+288$
   b) $21+9+315-42$
   c) $-13-156+273$

7) Berechnen Sie:

   a) $4+2\cdot 3-10\cdot 3/6+(4-(3+11))$
   b) $(10\cdot 2\cdot \frac{1}{5}-3)\cdot(-(4/2-3))\cdot 10$
   c) $-(-(7+4\cdot(3-2\cdot(4+7))))$

8) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der Binomischen Formeln und des Pascalschen Dreiecks aus.

a) $(3a - 5b)^2$
b) $(14x + y)^2$
c) $(8x - 3y) \cdot (3y + 8x)$
d) $(9x + 4y)^3$
e) $(2a - 8b)^3$
f) $(8x - 3y)^2 \cdot (3y + 8x)^2$

9) Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Linearfaktoren.

a) $x^2 - 6x - 27$
b) $x^2 - 24x + 144$
c) $x^2 - 1$
d) $x^2 + x - 20$
e) $x^2 - 9x + 8$
f) $x^2 + 14x + 49$
g) $x^2 + 13x + 42$

10) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

a) $\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right) : (x - 1)$

b) $\left(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12\right) : (x - 3)$

11) Berechnen Sie:

a)
$$\frac{6}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right)$$

b)
$$\frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{10}{12}$$

c)
$$4 \cdot \frac{10}{9} - 2 + \frac{15}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{4}$$

d)
$$\frac{11}{13} \cdot \frac{4}{7} : \frac{4}{3} - \left(-\frac{58}{91}\right)$$

12) Fassen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen:

a)

$$\frac{a}{a+b} - 1$$

b)

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} - \frac{2a \cdot (x-b)}{a^2-b^2}$$

c)

$$\frac{v}{1-\frac{1}{v}} - \frac{1}{v-1}$$

d)

$$\frac{1+\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{a}}$$

13) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\left(7^2\right)^4$
b) $\left(\frac{8^3}{2^3}\right)^2$
c) -12^{-3}
d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}$
e) $\sqrt[7]{6^3}$
f) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}$

14) Schreiben Sie die folgenden Terme in Wurzel- bzw. Potenzform um:

a) $x^{\frac{2}{3}}$
b) $a^{-\frac{3}{4}}$
c) $(a+b^2)^{-\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt[7]{x^3}$
e) $\left(\sqrt[4]{2a}\right)^3$
f) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$

15) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\log_6 5$
b) $\log_3 4 + \log_3 8$
c) $\log_2 4 - \log_2 5$
d) $\log_7 \left(3^6\right)$

16) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $|-10 - 13 + 15|$
b) $\sum_{i=5}^{7} \left(4i^3 - 4i\right)$
c) $\prod_{i=1}^{5} 11i^2$
d) $\prod_{i=2}^{4} \left(i + 6i^2\right)$
e) $5! - 3!$

17) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\left(30x^4y^7\right) : \left(5x^2y^5\right)$

b) $\left((16ab)^3\right) : \left((4ab)^3\right)$

c) $\left(3xy^2 - 5y^{b+2}\right)^2$

d) $\left(-2x^4 + ax^3 + 3a^2x^2 + 4x^2 - ax - 2\right) : \left(x^2 + ax - 1\right)$

e) $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{12} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{11}{24} - \frac{1}{12}$

f) $\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a} \cdot a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[24]{a^{19}}$

g) $\frac{3 \cdot \sum_{i=1}^{3} 3x}{\prod_{i=1}^{3} 3x}$