Kapitel 3
Gleichungen und Ungleichungen

Lernzielangaben Kapitel 3

- Das Lösen gängiger algebraischer Gleichungen vom Grade $n = 1, 2, 3$ zählt zum Handwerkszeug.
- Gleichungen mit Variablen im Nenner, unter der Wurzel, im Exponenten oder als Argument eines Logarithmus bereiten keine Schwierigkeiten.
- Die Besonderheiten bei der Lösung von Ungleichungen sind verstanden.
- Lineare Gleichungssysteme geringerer Dimension (2×2 bzw. 3×3) können anhand der drei vorgestellten Verfahren gelöst werden.

Kapitel 3.1
Lösen von algebraischen Gleichungen

Was sind Gleichungen?

Eine *Gleichung* ist eine Aussage über die *Gleichheit* reeller Zahlen oder mathematischer Terme, die entweder wahr oder falsch ist.

Insbesondere sind *algebraische Gleichungen* vom Grade $n = 1, 2, 3$ von Interesse:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad ax + b = 0 \text{ (lineare Gleichung)} \\ n = 2: &\quad ax^2 + bx + c = 0 \text{ (quadratische Gleichung)} \\ n = 3: &\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ (kubische Gleichung)} \end{aligned}$$

Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ die *Parameter* und x die *Variable*.

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad 3x + 7 = 0 \\ n = 2: &\quad 2x^2 - \frac{3}{8}x + 6 = 0 \\ n = 3: &\quad 7x^3 - x^2 + 11x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Lösung von Gleichungen

Die Werte der Variablen x, für die die Gleichung erfüllt ist, heißen *Lösungen der Gleichung*. Existieren für eine Gleichung keine Lösungen, so wird die Gleichung als *unlösbar* bezeichnet.

Die Gleichung $6x = 0$ ist lösbar und besitzt die Lösung $x = 0$.

Die Gleichung $x + 3 = x + 10$ ist unlösbar.

Zur Lösung von Gleichungen verwendet man *Äquivalenzumformungen*. Dabei wird eine Gleichung mit Hilfe von Rechenoperationen derart umgeformt, dass die Lösungen der Gleichung unverändert bleiben und im besten Falle einfach abgelesen werden können.

Äquivalenzumformungen (1)

Addition und Subtraktion beider Seiten der Gleichung mit derselben Zahl $a \in \mathbb{R}$

Multiplikation und Division beider Seiten der Gleichung mit derselben Zahl $a \neq 0$

Radizieren beider Seiten der Gleichung mit demselben ganzzahligen Exponenten

Potenzieren beider Seiten der Gleichung mit demselben ganzzahligen ungeraden Exponenten

Logarithmieren beider Seiten der Gleichung zur selben Basis

Äquivalenzumformungen (2)

Die Multiplikation/Division mit $a = 0$ ist nicht zulässig und stellt keine Äquivalenzumformung dar!

Das Potenzieren stellt nur dann eine Äquivalenzumformung dar, wenn der Exponent ungerade ist. Bei geraden Exponenten können sog. *Scheinlösungen* resultieren, die durch eine Probe auszuschließen sind. Scheinlösungen sind nicht mit Lösungen außerhalb des Definitionsbereiches gleichzusetzen.

Lösen von linearen Gleichungen (1)

Bei linearen Gleichungen gilt es, unter Verwendung von Äquivalenzumformungen die Variable x auf die linke Seite und die reelle Zahl auf die rechte Seite der Gleichung zu bringen.

Gelingt dies, ist die Gleichung *eindeutig lösbar*. Andernfalls kann sie entweder *unlösbar* sein oder *unendlich viele Lösungen* $x \in \mathbb{R}$ besitzen.

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 0 \\ 3x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{3} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 7x - 10 &= -4x + 12 \\ 11x &= 22 \\ x &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Lösen von linearen Gleichungen (2)

$$
\begin{aligned}
x + 3 &= x + 10 \\
0 &= 7 \quad \text{(Widerspruch!)} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12x + 6 &= 4 \cdot \left(3x + \frac{3}{2}\right) \\
12x + 6 &= 12x + 6 \\
x &= x \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Damit sind die Gleichungen (1) und (2) eindeutig lösbar, während die Gleichung (3) unlösbar ist und (4) unendlich viele Lösungen besitzt.

Quadratische Gleichungen

Von besonders großer Bedeutung ist die Lösung quadratischer Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$.

Eine quadratische Gleichung liegt in der sog. *Normalform*

$$x^2 + px + q = 0 \tag{5}$$

vor, wenn $a = 1$ gilt und auf der rechten Seite lediglich die Null steht.

$$\begin{aligned} -3x^2 - 6x + 12 &= 3x - 3 \\ -3x^2 - 9x + 15 &= 0 \\ x^2 + 3x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Damit liegt die Normalform vor und es gilt $p = 3$ und $q = -5$.

Lösen von quadratischen Gleichungen

Um die Lösungen einer quadratischen Gleichung zu bestimmen, können die folgenden vier Verfahren angewendet werden:

1) Zerlegung in Linearfaktoren
2) Quadratische Ergänzung
3) p-q−Formel
4) Mitternachts- oder a-b-c−Formel

Diese vier Verfahren werden auf den folgenden Folien vorgestellt.

1) Zerlegung in Linearfaktoren

Eine *Zerlegung in Linearfaktoren* kann wie in Kapitel 2.5 dargestellt erfolgen. Die Lösungen sind diejenigen Werte $x \in \mathbb{R}$, für die die Linearfaktoren jeweils Null sind. Sie können also einfach an den Linearfaktoren abgelesen werden.

Gegeben sei die folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \tag{6}$$

Zerlegen in Linearfaktoren liefert:

$$(x + 2) \cdot (x - 5) = 0$$

Damit gilt für die Lösungen der Gleichung (6): $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$

2) Quadratische Ergänzung (1)

Das Verfahren der *quadratischen Ergänzung* sieht vor, auf beiden Seiten der quadratischen Gleichung in Normalform den Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ zu addieren:

$$x^2 + px + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

So wird auf der linken Seite ein (quadriertes) Binom erzeugt:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

2) Quadratische Ergänzung (2)

Gegeben sei die quadratische Gleichung gemäß (6). Anwenden der quadratischen Ergänzung ergibt:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x - 10 &= 0 \\
x^2 - 3x &= 10 \\
x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 &= 10 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \\
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} \\
x - \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \\
x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Damit gilt $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$.

3) p-q–Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die p-q–Formel erlaubt es, jede quadratische Gleichung zu lösen, die in der Normalform (5) vorliegt.

Gegeben sei die quadratische Gleichung gemäß (6) mit $p = -3$ und $q = -10$. Anwenden der p-q–Formel liefert:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-10)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Damit gilt $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$.

4) Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Mitternachtsformel erlaubt es direkt, jede beliebige quadratische Gleichung zu lösen ohne sie vorher normieren zu müssen.

Gegeben sei die quadratische Gleichung gemäß (6) mit $a = 1$, $b = -3$ und $c = -10$. Anwenden der Mitternachtsformel liefert:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Damit gilt $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$.

Anzahl an Lösungen

Für die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung gibt es drei Möglichkeiten:

Fall 1: Zwei verschiedene Lösungen $x_1 \neq x_2$

Fall 2: Eine (doppelte) Lösung $x_1 = x_2$

Fall 3: Keine Lösung $x \in \mathbb{R}$

Welcher Fall eintritt, kann anhand der sog. *Diskriminante*

$$\text{Disk} := b^2 - 4ac$$

bestimmt werden:

Fall 1: Disk > 0

Fall 2: Disk $= 0$

Fall 3: Disk < 0

Bestimmung der Lösungsanzahl

Gegeben seien die quadratischen Gleichungen:

$$x^2 - 12x + 35 = 0 \tag{7}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{8}$$

$$x^2 + 12x + 37 = 0 \tag{9}$$

Fall 1 (7): Es gilt Disk $= (-12)^2 - 4 \cdot 35 = 4 > 0$. Damit besitzt (7) zwei verschiedene Lösungen ($x_1 = 7$ und $x_2 = 5$).

Fall 2 (8): Es gilt Disk $= (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$. Damit besitzt (8) eine (doppelte) Lösung ($x_1 = x_2 = 2$).

Fall 3 (9): Es gilt Disk $= 12^2 - 4 \cdot 37 = -4 < 0$. Damit besitzt (9) keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Komplexe Lösungen

Im Bereich der komplexen Zahlen besitzen allerdings auch Gleichungen mit negativer Diskriminante zwei Lösungen.

Fallunterscheidung unter $\mathbb{C}$:

Fall 1: Disk > 0	Zwei verschiedene Lösungen $x_1 \neq x_2$ mit $x_{1,2} \in \mathbb{R}$
Fall 2: Disk $= 0$	Eine (doppelte) Lösung $x_1 = x_2$ mit $x_{1,2} \in \mathbb{R}$
Fall 3: Disk < 0	Zwei verschiedene Lösungen $x_1 \neq x_2$ mit $x_{1,2} \in \mathbb{C}$

Lösen einer Gleichung mit negativer Diskriminante

Für die quadratische Gleichung

$$x^2 + 12x + 37 = 0$$

gemäß (9) gilt Disk $= -4 < 0$, weshalb sie in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzt.

Anwenden der p-q−Formel mit $p = 12$ und $q = 37$ liefert:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - 37} \\ &= -6 \pm \sqrt{36 - 37} \\ &= -6 \pm \sqrt{-1} \\ &= -6 \pm i \end{aligned}$$

Die Lösungen ergeben sich also zu $x_1 = -6 + i$ und $x_2 = -6 - i$.

Kubische Gleichungen
Das Lösen kubischer Gleichungen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kann auf mehreren Wegen erfolgen und hängt maßgeblich von der Konstellation der Parameter a, b, c, d ab.

Sofern möglich, versucht man eine Zerlegung in Linearfaktoren durchzuführen oder durch einfaches Ausklammern eine quadratische Gleichung zu erzeugen, die mit einem der Verfahren von Folie 11 gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} 6x^3 + 12x^2 &= 0 \\ 6x^2 \cdot (x+2) &= 0 \qquad \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ und } x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 15x &= 0 \\ x \cdot (x^2 - 2x - 15) &= 0 \\ x \cdot (x-5) \cdot (x+3) &= 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5 \text{ und } x_3 = -3 \end{aligned}$$

Anwendung des Pascalschen Dreiecks

Manchmal ist es möglich, eine kubische Gleichung über die Darstellung als Binom vom Grade $n = 3$ zu lösen (vgl. hierzu auch das Pascalsche Dreieck in Kapitel 2.4).

$$\begin{aligned} x^3 - 12x^2 + 48x - 64 &= 0 \\ (x-4)^3 &= 0 \qquad \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 21x^2 + 147x + 343 &= 0 \\ (x+7)^3 &= 0 \qquad \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -7 \end{aligned}$$

Allgemeiner Lösungsansatz für kubische Gleichungen (1)

Kann die kubische Gleichung in keinster Weise vereinfacht oder können keine Terme ausgeklammert werden, läuft der allgemeine Lösungsansatz in drei Schritten ab:

1. Erraten einer Lösung, bspw. durch Probieren
2. Durchführen einer Polynomdivision unter Verwendung des gefundenen Linearfaktors
3. Verbleibende quadratische Gleichung mit einem der Verfahren von Folie 11 lösen

Allgemeiner Lösungsansatz für kubische Gleichungen (2)

1. Erraten einer Lösung von

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

führt zu $x_1 = 1$.

2. Unter Verwendung des Linearfaktors $(x-1)$ ist nun eine Polynomdivision durchzuführen:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(& x^3 - 2x^2 & - 5x & + 6\big) & : \big(x-1\big) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-x^3} & \underline{+x^2} & & & \\
 & -x^2 & -5x & & \\
 & \underline{x^2} & \underline{-x} & & \\
 & & -6x & +6 & \\
 & & \underline{6x} & \underline{-6} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Allgemeiner Lösungsansatz für kubische Gleichungen (3)

3. Zerlegen der verbliebenen quadratischen Gleichung in Linearfaktoren liefert:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)\cdot(x+2) = 0$$

Damit ergeben sich die weiteren Lösungen zu $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.

Kapitel 3.2
Lösen spezieller Gleichungen

Bruchgleichungen (1)

Enthält eine Gleichung mindestens einen Bruchterm, bei dem die Variable x im Nenner enthalten ist, liegt eine sog. *Bruchgleichung* vor.

$$\frac{12}{x-1} = 4$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner lassen sich Bruchgleichungen in algebraische Gleichungen überführen.

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot (x-1) \\ 12 &= 4x - 4 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Zu beachten ist, ob es sich bei der durchgeführten Umformung um eine Äquivalenzumformung handelt. Im Beispiel gilt $x \neq 1$.

Bruchgleichungen (2)

Gegeben sei folgende Bruchgleichung:

$$\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{9}{x^2-9}$$

Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $(x+3)\cdot(x-3)$ liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{3\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{x-3} - \frac{2\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{x+3} &= \frac{9\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{x^2-9}\\
3\cdot(x+3) - 2\cdot(x-3) &= \frac{9\cdot(x^2-9)}{x^2-9}\\
3x+9-2x+6 &= 9\\
x &= -6
\end{aligned}$$

Die Umformung ist wegen $x \neq \pm 3$ eine Äquivalenzumformung.

Wurzelgleichungen (1)

Enthält eine Gleichung mindestens eine Variable, die unter einer Wurzel steht, liegt eine sog. *Wurzelgleichung* vor.

$$\sqrt{x+13} = 1 + \sqrt{x}$$

Wurzelgleichungen lassen sich lösen, indem eine Wurzel erst isoliert und die Gleichung dann mit dem Wurzelexponenten potenziert wird. Dieses Vorgehen wird wiederholt, bis alle Wurzeln eliminiert sind.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+13}\right)^2 &= \left(1+\sqrt{x}\right)^2 \\ x + 13 &= 1 + 2\sqrt{x} + x \\ 2\sqrt{x} &= 12 \\ \sqrt{x} &= 6 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Wurzelgleichungen (2)

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1} = 0$$
$$(x+1) \cdot (x-1) = 0 \qquad \Rightarrow x = 1$$

$x = -1$ ist aufgrund von $x \geq 1$ keine Lösung.

$$\begin{aligned}
2x &= \sqrt{1-8x} - 5 \\
2x + 5 &= \sqrt{1-8x} \\
(2x+5)^2 &= \left(\sqrt{1-8x}\right)^2 \\
4x^2 + 20x + 25 &= 1 - 8x \\
4x^2 + 28x + 24 &= 0 \\
x^2 + 7x + 6 &= 0 \\
(x+6) \cdot (x+1) &= 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = -1
\end{aligned}$$

Wurzelgleichungen (3)

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x+1} &= 1+\sqrt{2x+3}\\
4\cdot(x+1) &= \left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2\\
4x+4 &= 1+2\sqrt{2x+3}+2x+3\\
2x &= 2\sqrt{2x+3}\\
x &= \sqrt{2x+3}\\
x^2 &= 2x+3\\
x^2-2x-3 &= 0\\
(x+1)\cdot(x-3) &= 0 \qquad \Rightarrow x=3
\end{aligned}$$

Bei der vermeintlichen Lösung $x=-1$ handelt es sich um eine Scheinlösung, die durch eine Probe ausgeschlossen werden kann.

Exponentialgleichungen (1)
Enthält eine Gleichung mindestens einmal eine Variable im Exponenten, liegt eine sog. *Exponentialgleichung* vor.

$$2^{4x-8} = 1$$

Exponentialgleichungen lassen sich durch Logarithmieren lösen.

$$\begin{aligned}(4x-8)\cdot\ln 2 &= \ln 1\\ 4x-8 &= \frac{\ln 1}{\ln 2}\\ 4x-8 &= 0\\ 4x &= 8\\ x &= 2\end{aligned}$$

Exponentialgleichungen (2)

$$\begin{aligned}
8^{x-2} &= \sqrt{8} \\
8^{2x-4} &= 8 \\
(2x-4) \cdot \ln 8 &= \ln 8 \\
2x - 4 &= \frac{\ln 8}{\ln 8} \\
2x - 4 &= 1 \\
2x &= 5 \qquad \Rightarrow x = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{x} &= 3^{x} \\
x \cdot \ln 2 &= x \cdot \ln 3 \\
x \cdot \ln 2 - x \cdot \ln 3 &= 0 \\
x \cdot (\ln 2 - \ln 3) &= 0 \qquad \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Logarithmusgleichungen (1)

Enthält eine Gleichung mindestens einmal eine Variable als Argument einer Logarithmusfunktion, liegt eine sog. *Logarithmusgleichung* vor.

$$\ln(x+1) = 5$$

Logarithmusgleichungen lassen sich durch Exponenzieren lösen.

$$\begin{aligned} e^{\ln(x+1)} &= e^5 \\ x+1 &= e^5 \\ x &= e^5 - 1 \\ x &\approx 147,41 \end{aligned}$$

Logarithmusgleichungen (2)

$$\begin{aligned}
\ln x^2 + \ln \sqrt{x} &= 10 \\
\ln\left(x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right) &= 10 \\
\ln x^{\frac{5}{2}} &= 10 \\
\frac{5}{2} \cdot \ln x &= 10 \\
\ln x &= 4 \qquad \Rightarrow x = e^4 \approx 54{,}598
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln x - \ln \sqrt{x} &= 2 \cdot \ln 4 \\
\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) &= 2 \cdot \ln 4 \\
\frac{1}{2} \cdot \ln x &= 2 \cdot \ln 4 \\
\ln x &= 4 \cdot \ln 4 \qquad \Rightarrow x = e^{4 \cdot \ln 4} = 4^4 = 256
\end{aligned}$$

Kapitel 3.3
Lösen von Ungleichungen

Was sind Ungleichungen?
Eine *Ungleichung* ist eine Aussage über die relative Größe oder Ordnung reeller Zahlen oder mathematischer Terme, die entweder wahr oder falsch ist.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets:

$$a = b \quad | \quad a < b \quad | \quad a > b \quad | \quad a \leq b \quad | \quad a \geq b$$

Ungleichung	**Bedeutung**
$a < b$	a ist streng kleiner als b
$a > b$	a ist streng größer als b
$a \leq b$	a ist schwach kleiner (d.h. kleiner oder gleich) b
$a \geq b$	a ist schwach größer (d.h. größer oder gleich) b

Umformen von Ungleichungen

Eine Ungleichung bleibt unverändert, wenn auf beiden Seiten die gleiche reelle Zahl d addiert oder subtrahiert wird

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \pm d > b \pm d$$

oder wenn beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl $d > 0$ multipliziert oder dividiert werden:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d > b \cdot d \quad \text{und} \quad a/d > b/d$$

Werden beide Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl $d < 0$ multipliziert oder dividiert, dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d < b \cdot d \quad \text{und} \quad a/d < b/d$$

Analoge Aussagen gelten für $a < b, a \leq b$ und $a \geq b$.

Doppelungleichungen

Zwei (sich nicht widersprechende) Ungleichungen werden häufig zu einer *Doppelungleichung* zusammengefasst:

$$a \le x \quad \text{und} \quad x < b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \le x < b$$

$$7 \le x \quad \text{und} \quad x < 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad 7 \le x < 9$$
$$5 > x \quad \text{und} \quad x \ge 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 \le x < 5$$

Lösung von Ungleichungen
Die Werte der Variablen x, für die die Ungleichung erfüllt ist, heißen *Lösungen der Ungleichung*. Existieren für eine Ungleichung keine Lösungen, so wird die Ungleichung als *unlösbar* bezeichnet.

$$12 + 16x < 20 \quad \Leftrightarrow \quad 16x < 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{2}$$

$$4 - 3x > 10 \quad \Leftrightarrow \quad -3x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$$

$$-4x + 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x \geq -9 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{9}{4}$$

$$2x^2 + \frac{3}{7}x < 8 + \frac{3}{7}x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$$

Kapitel 3.4
Lösen von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme sind allgemein durch die folgende Form gekennzeichnet:

Ein System von m linearen Gleichungen in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

wird als lineares Gleichungssystem (LGS) der Dimension $m \times n$ bezeichnet. Die Werte $(x_1, \ldots, x_n)$, die alle m Gleichungen erfüllen, heißen Lösungen des LGS und die Werte $(b_1, \ldots, b_m)$ werden als rechte Seite des LGS bezeichnet.

Lösen eines linearen Gleichungssystems
Ein LGS besitzt entweder *keine Lösung*, *genau eine Lösung* oder *unendlich viele Lösungen* und kann bspw. unter Verwendung des *Einsetzungs*-, *Gleichsetzungs*- oder *Additionsverfahrens* gelöst werden.

Im Folgenden werden diese Verfahren jeweils anhand des LGS

$$3x + 4y = 2 \tag{10}$$
$$5x - 10y = 20 \tag{11}$$

der Dimension 2×2 mit der eindeutigen Lösung $x = 2$ und $y = -1$ erläutert.

Einsetzungsverfahren
Eine der Gleichungen des LGS ist nach einer Variablen aufzulösen und diese Variable ist dann in die anderen Gleichungen einzusetzen. Dadurch wird eine Variable eliminiert.

Umstellen von (11) nach x führt zu:

$$\begin{aligned} 5x - 10y &= 20 \\ x - 2y &= 4 \\ x &= 4 + 2y \end{aligned} \tag{12}$$

Anschließendes Einsetzen von (12) in (10) ergibt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (4 + 2y) + 4y &= 2 \\ 12 + 6y + 4y &= 2 \\ 10y &= -10 \qquad \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $y = -1$ in (12) liefert schließlich: $x = 4 + 2 \cdot (-1) = 2$

Gleichsetzungsverfahren
Zwei Gleichungen des LGS sind so umzustellen, dass ihre jeweiligen rechten Seiten gleichgesetzt werden können.

Umstellen von (10) nach x führt zu:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 3x &= 2 - 4y \\ x &= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}y \qquad (13) \end{aligned}$$

Umstellen von (11) nach x führt zu (12). Gleichsetzen von (13) und (12) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{4}{3}y &= 4 + 2y \\ -\frac{10}{3}y &= \frac{10}{3} \qquad \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

Anschließendes Einsetzen von $y = -1$ in (12) oder (13) führt zu $x = 2$.

Additionsverfahren

Gleichungen des LGS sind derart zu addieren bzw. zu subtrahieren, dass Variablen in den Gleichungen eliminiert werden. In einem vorhergehenden Schritt können die Gleichungen jeweils mit einer beliebigen von Null verschiedenen reellen Zahl multipliziert werden.

In einem ersten Schritt ist (10) mit 5 und (11) mit 3 zu multiplizieren. Dies führt zu:

$$15x + 20y = 10 \tag{14}$$

$$15x - 30y = 60 \tag{15}$$

Das Bilden der Differenz (14)-(15) in einem zweiten Schritt liefert

$$50y = -50$$

und damit $y = -1$. Einsetzen in (10) oder (11) führt zu $x = 2$.

Lösen eines LGS der Dimension 3×3

$$x + y + z = 6 \tag{16}$$
$$2x - y - 3z = -9 \tag{17}$$
$$-x - y + 2z = 3 \tag{18}$$

Anwenden des Additionsverfahrens über (16)+(18) liefert:

$$3z = 9 \quad \Rightarrow \quad z = 3$$

Erneutes Anwenden des Additionsverfahrens über (16)+(17) unter Einsatz von $z = 3$ führt zu:

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot 3 &= -3 \\ 3x &= 3 \qquad \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Anschließendes Einsetzen von $x = 1$ und $z = 3$ in (16) ergibt:

$$1 + y + 3 = 6 \qquad \Rightarrow y = 2$$

Beispiele zu anderen Fällen

Die vorangegangenen Beispiele sind stets eindeutig lösbar. Im Folgenden sollen daher Beispiele für LGS angegeben werden, die keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen besitzen.

Gegeben seien zwei LGS der Dimension 2×2:

$$\begin{aligned} 3x + 11y &= 5 \\ 3x + 11y &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 4x + 8y &= 16 \end{aligned}$$

Das linke LGS besitzt keine Lösung, da die Gleichungen zueinander widersprüchlich sind. Das rechte LGS besitzt hingegen unendlich viele Lösungen, da die Gleichungen redundant sind.

Kapitel 3.5
Komplexere Anwendungen

Komplexere Anwendungen (1)

$$\begin{aligned}
7x - 3 + 4x &= -2x + 6 + 2 + 13x \\
11x - 3 &= 11x + 8 \\
-3 &= 8 \qquad \Rightarrow \text{Widerspruch: Unlösbar!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-7x + 4 - \frac{3}{2} &\geq 3x + \frac{5}{2} \\
4 - \frac{8}{2} &\geq 10x \\
10x &\leq 0 \qquad \Rightarrow x \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\sqrt{25 - x} + 2 &= 4\sqrt{25 - x} \\
2 &= \sqrt{25 - x} \\
4 &= 25 - x \qquad \Rightarrow x = 21
\end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (2)

$$
\begin{aligned}
(x+3)\cdot(2x-7) &= (5-x)\cdot(9-2x)\\
2x^2-7x+6x-21 &= 45-10x-9x+2x^2\\
-x-21 &= -19x+45\\
18x &= 66 \qquad \Rightarrow x=\frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x+3}{x+1} &= \frac{6-x}{3-x}\\
\frac{(x+3)\cdot(3-x)\cdot(x+1)}{x+1} &= \frac{(6-x)\cdot(3-x)\cdot(x+1)}{3-x}\\
(x+3)\cdot(3-x) &= (6-x)\cdot(x+1)\\
3x-x^2+9-3x &= 6x+6-x^2-x\\
9 &= 5x+6\\
5x &= 3 \qquad \Rightarrow x=\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Komplexere Anwendungen (3)

$$
\begin{aligned}
\ln(x-1) + \ln(x+2) &= 1 \\
\ln((x-1)\cdot(x+2)) &= 1 \\
\ln(x^2 + 2x - x - 2) &= 1 \\
e^{\ln(x^2+x-2)} &= e^1 \\
x^2 + x - 2 - e &= 0
\end{aligned}
$$

Anwenden der p-q–Formel mit $p = 1$ und $q = -2 - e$ liefert:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2-e)} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 + e} \\
&\approx -\frac{1}{2} \pm 2,229 \qquad \Rightarrow x \approx 1,729 \text{ (wegen } x > 1)
\end{aligned}
$$

Komplexere Anwendungen (4)

$$\begin{aligned} 2^{x+1} - 3^x &= 0 \\ (x+1)\cdot \ln 2 - x \cdot \ln 3 &= 0 \\ x \cdot (\ln 2 - \ln 3) + \ln 2 &= 0 \\ x \cdot (\ln 2 - \ln 3) &= -\ln 2 \\ x &= \frac{-\ln 2}{\ln 2 - \ln 3} \qquad \Rightarrow x \approx 1,71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - \frac{2x-2}{6} &< 3 - \frac{4-18x}{3} \\ 30x - 2x + 2 &< 18 - 8 + 36x \\ 28x + 2 &< 10 + 36x \\ -8x &< 8 \qquad \Rightarrow x > -1 \end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (5)

Gegeben sei die folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 + 5x - 84 = 0 \tag{19}$$

Ihre Diskriminante ergibt sich zu:

$$\text{Disk} = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84) = 361 > 0$$

Demnach besitzt (19) zwei verschiedene reelle Lösungen $x_1 \neq x_2$. Diese Lösungen sollen nun anhand aller vier Verfahren von Folie 11 berechnet werden.

1) Eine Zerlegung von (19) in Linearfaktoren ergibt:

$$x^2 + 5x - 84 = (x + 12) \cdot (x - 7)$$

Damit ergeben sich die Lösungen zu $x_1 = -12$ und $x_2 = 7$.

Komplexere Anwendungen (6)

2) Anwenden der quadratischen Ergänzung ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 84 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &= 84 + \frac{25}{4} \\ x + \frac{5}{2} &= \pm\sqrt{\frac{336}{4} + \frac{25}{4}} \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Lösungen zu $x_1 = -12$ und $x_2 = 7$.

Komplexere Anwendungen (7)

3) Anwenden der p-q−Formel mit $p = 5$ und $q = -84$ ergibt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-84)} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 84} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{336}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Lösungen zu $x_1 = -12$ und $x_2 = 7$.

Komplexere Anwendungen (8)

4) Anwenden der Mitternachtsformel mit $a = 1$, $b = 5$, $c = -84$ und $\text{Disk} = 361$ ergibt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\text{Disk}}}{2a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm 19}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Lösungen zu $x_1 = -12$ und $x_2 = 7$.

Komplexere Anwendungen (9)

Gegeben sei das folgende LGS der Dimension 3×3:

$$3x - 6y + 4z = 3 \tag{20}$$
$$4x + 3y - 2z = 15 \tag{21}$$
$$-9x + 0y + 6z = 9 \tag{22}$$

Anwenden des Additionsverfahrens über $(20) + 2 \cdot (21)$ liefert:

$$11x = 33 \qquad \Rightarrow x = 3$$

Anwenden des Einsetzungsverfahrens von $x = 3$ in (22) ergibt:

$$-27 + 6z = 9 \quad \Rightarrow \quad 6z = 36 \qquad \Rightarrow z = 6$$

Einsetzen von $x = 3$ und $z = 6$ in (21) führt zu:

$$12 + 3y - 12 = 15 \quad \Rightarrow \quad 3y = 15 \qquad \Rightarrow y = 5$$

Damit besitzt das LGS die eindeutige Lösung $x = 3$, $y = 5$ und $z = 6$.

Kapitel 3.6
Übungsaufgaben

18) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen, sofern möglich.

   a) $11x - 7 = 4$
   b) $3x + 9 - 2x + 6x = 4x - 7 + 4$
   c) $8x - 2 - 2x + x \cdot (3 - 5) = 11x - 3 - 7x + 1$
   d) $-(7 + 4x) - (3x + 2) = 2x \cdot (5 - 2) - 13x - 10$

19) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils nach allen vier Verfahren, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

   a) $x^2 - x = 12$
   b) $x^2 + 11x + 10 = -14$

20) Berechnen Sie die Diskriminante und die Lösungen der folgenden Gleichung.

$$x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$$

21) Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen.

   a) $7x^3 - 7x = 0$
   b) $x^3 + 6x^2 + 12x = -8$
   c) $x^3 + 3x^2 - 3x = 14$

22) Lösen Sie die folgenden speziellen Gleichungen.

   a) $\dfrac{2x+8}{2x-4} = \dfrac{7x+4}{4x-2}$
   b) $\sqrt{7x+1} - 3 = 5$
   c) $5^x \cdot 25^{2x-1} = 625$
   d) $\ln x = \ln 4 - \ln 3$

23) Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

   a) $7x + 14 < 4 - 8x$
   b) $-12x - 3 \leq 4x - 5$
   c) $-4x^2 \geq -16$

24) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach allen drei Ihnen aus der Vorlesung bekannten Verfahren.

$$\begin{aligned} 8x + 4y &= 2 \\ 12x - 2y &= 7 \end{aligned}$$

25) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ -3x + 3y + 5z &= 18 \end{aligned}$$