

Kapitel 4

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Lernzielangaben Kapitel 4

- Der Begriff der Funktion, ihre Darstellungsweisen und spezielle Funktionsarten sind bekannt.
- Die Eigenschaften und grundlegenden Charakteristika von Funktionen werden beherrscht.
- Die Berechnung von Grenzwerten sollte keine Probleme bereiten und das Konzept der Stetigkeit ist verstanden.
- Das Ableiten von Funktionen jeglicher Art und die Kombination diverser Ableitungsregeln gehört zum absoluten Handwerkszeug.
- Eine Durchführung umfassender Kurvendiskussionen von A wie Ableiten bis Z wie Zeichnen bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Kapitel 4.1

Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Funktionen und ihre Darstellungen

Eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen ist eine Funktion

$$f : D \longrightarrow E, \quad x \mapsto y = f(x)$$

mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und Zielbereich $E \subseteq \mathbb{R}$.

Funktionen können auf drei verschiedene Arten dargestellt werden:

Funktionsgleichung: Es wird der funktionale Zusammenhang $y = f(x)$ zwischen der abhängigen Variablen y und der unabhängigen Variablen x angegeben.

Wertetabelle: Ist der Definitionsbereich D endlich, können die x - und ihre zugehörigen y -Werte in einer Tabelle angegeben werden.

Graphische Darstellung: Der Graph der Funktion wird in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

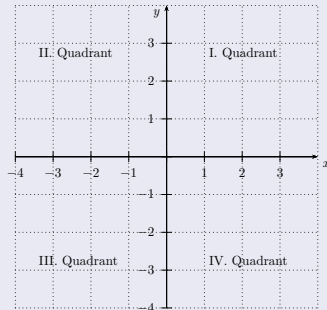
4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Das kartesische Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein orthogonales Koordinatensystem, d.h., die beiden Richtungsachsen stehen orthogonal (senkrecht) aufeinander und schneiden sich im 90° -Winkel.

Die x -Werte werden auf der Abszisse (horizontale Achse) und die y -Werte auf der Ordinate (vertikale Achse) abgetragen.



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Darstellungen von Funktionen (1)

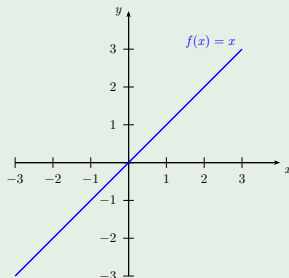
Funktionsgleichung:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$$

Wertetabelle (für ausgewählte x - und y -Werte):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Graphische Darstellung:



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Darstellungen von Funktionen (2)

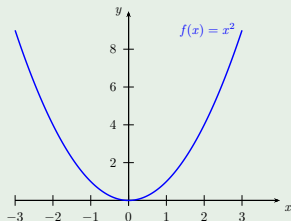
Funktionsgleichung:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

Wertetabelle (für ausgewählte x - und y -Werte):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graphische Darstellung:



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Verkettung von Funktionen

Hängt eine Funktion von einer Variablen ab, die selbst von einer anderen Variablen abhängt, führt dies zu *verketteten Funktionen*:

Gilt $z = f(y)$ und $y = g(x)$, so lautet die verkettete Funktion:

$$z = f(g(x))$$

Dabei wird f als *äußere* und g als *innere* Funktion bezeichnet ($f \circ g$).

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4x + 2$$

Dann gilt für die verketteten Funktionen:

$$(f \circ g) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (4x + 2)^3$$

$$(g \circ f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4x^3 + 2$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Polynomfunktionen

Eine besonders einfache und bedeutende Klasse von reellen Funktionen sind *Polynomfunktionen*.

Eine reelle Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$ mit

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

und den Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 0, 1, \dots, n$ mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ wird als Polynom n -ten Grades bezeichnet.

Dabei wird a_n als *Leitkoeffizient* und der höchste Exponent n des Polynoms als *Grad des Polynoms* bezeichnet.

$$n = 2 : \quad p(x) = 6x^2 + x - 11 \quad (\text{mit } a_0 = -11, a_1 = 1, a_2 = 6)$$

$$n = 3 : \quad p(x) = x^3 - 2x^2 + 7 \quad (\text{mit } a_0 = 7, a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = 1)$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Spezielle Polynome

Ein Polynom bestehend aus nur einem Glied

$$p(x) = a_i \cdot x^i \quad \text{mit} \quad a_i \neq 0$$

wird als Monom i -ten Grades bezeichnet.

$$p(x) = 6x^3 \quad (\text{Monom 3ten Grades})$$

$$p(x) = x^5 \quad (\text{Monom 5ten Grades})$$

Die Summe oder Differenz zweier Monome

$$f(x) = a_i \cdot x^i \pm a_j \cdot x^j \quad \text{mit} \quad a_{i,j} \neq 0$$

wird als Binom bezeichnet.

$$f(x) = 6x^3 + x^5$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Polynome unterschiedlicher Grade (1)

Polynome der Grade $n = 0, 1, 2, 3, 4$ besitzen eigene Bezeichnungen:

$n = 0$: konstante Funktion

$n = 1$: affin-lineare Funktion

$n = 2$: quadratische Funktion

$n = 3$: kubische Funktion

$n = 4$: quartische Funktion

$$n = 0 : p_0(x) = -7$$

$$n = 1 : p_1(x) = 3x - 8$$

$$n = 2 : p_2(x) = 6x^2 - 7x - 13$$

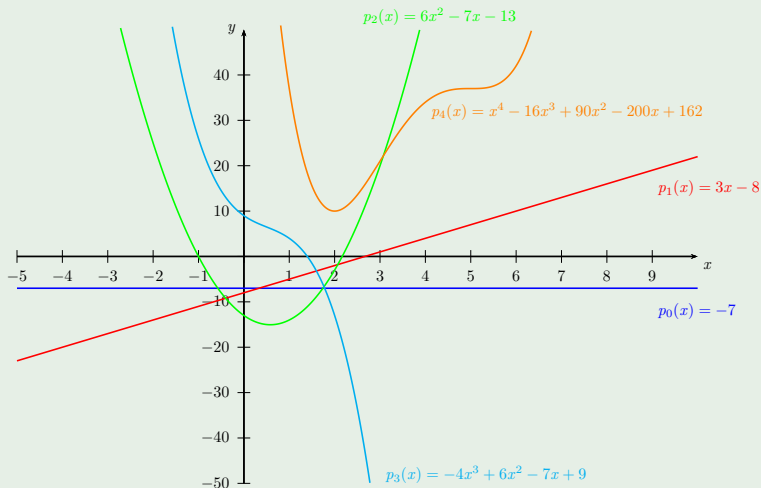
$$n = 3 : p_3(x) = -4x^3 + 6x^2 - 7x + 9$$

$$n = 4 : p_4(x) = x^4 - 16x^3 + 90x^2 - 200x + 162$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Polynome unterschiedlicher Grade (2)



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Rationale Funktionen

Eine weitere wichtige Funktionsklasse sind *rationale Funktionen*.

Es seien $p_1(x)$ und $p_2(x)$ zwei Polynome vom Grad m und n in $\mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion $q : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto q(x)$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \cdot x^i}{\sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i}$$

und $D = \{x \in \mathbb{R} | p_2(x) \neq 0\}$ rationale Funktion.

Rationale Funktionen sind damit Quotienten zweier Polynome. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationaler Funktionen ergeben wieder eine rationale Funktion.

Gilt $n = 0$ und $b_0 \neq 0$, ist $q(x)$ ein Polynom und man spricht von einer *ganzrationalen Funktion*. Gilt dagegen $n > 0$, heißt $q(x)$ *gebrochen-rationale Funktion*.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

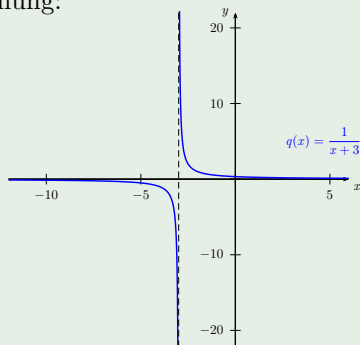
4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Beispiel für eine gebrochen-rationale Funktion

Funktionsgleichung:

$$q : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x+3}$$

Graphische Darstellung:



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Potenzfunktionen

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^c$$

mit $c \geq 0$ oder

$$f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^c$$

mit $c < 0$ wird als Potenzfunktion bezeichnet.

$$c = 4 : \quad f(x) = x^4$$

$$c = e : \quad f(x) = x^e$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Exponentialfunktionen

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x$$

mit $a > 0$ wird als Exponentialfunktion zur Basis a bezeichnet.

$$a = 4 : \quad f(x) = 4^x$$

$$a = e : \quad f(x) = e^x$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Logarithmusfunktionen

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x)$$

mit $a > 0$ wird als Logarithmusfunktion zur Basis a bezeichnet.

$$a = 4 : \quad f(x) = \log_4(x)$$

$$a = 10 : \quad f(x) = \lg(x) \quad (\text{dekadische Logarithmusfunktion})$$

$$a = e : \quad f(x) = \ln(x) \quad (\text{natürliche Logarithmusfunktion})$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

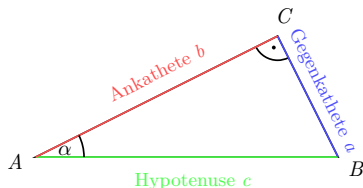
Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen umfassen u.a. die Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen.

Der Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck mit der *Gegenkathete* a , *Ankathete* b und der *Hypotenuse* c sind wie folgt definiert:

$$\sin(\alpha) := \frac{a}{c} \quad \cos(\alpha) := \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b} \quad \cot(\alpha) := \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{b}{a}$$



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Gradmaß und Bogenmaß

In der Analysis wird in der Regel anstelle des *Gradmaßes* für den Winkel α das *Bogenmaß* x verwendet. Da die Kreislinie des Einheitskreises die Länge 2π besitzt und einem Winkel von 360° entspricht, besteht zwischen dem Gradmaß α und dem Bogenmaß x die folgende eindeutige Beziehung:

$$\alpha = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi$$

Gegeben sei $x = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = 60^\circ$. Umrechnen in das jeweilige andere Maß ergibt:

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} \cdot 360^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = 45^\circ$$

$$x = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

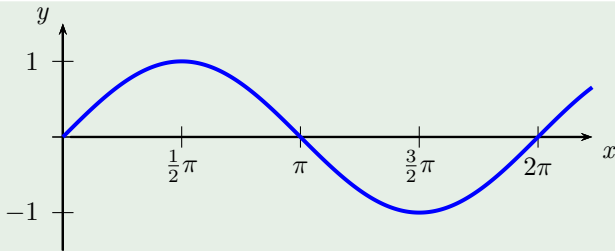
Sinusfunktion

Die Funktion

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$

wird als Sinusfunktion bezeichnet.

Der Graph der Sinusfunktion lässt sich wie folgt darstellen:



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

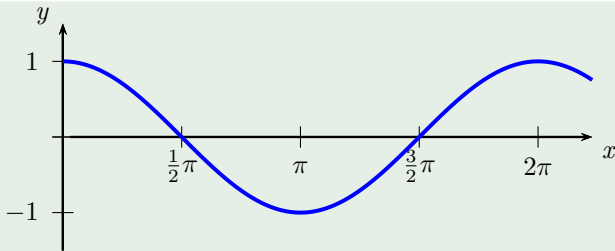
Kosinusfunktion

Die Funktion

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)$$

wird als Kosinusfunktion bezeichnet.

Der Graph der Kosinusfunktion lässt sich wie folgt darstellen:



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Tangensfunktion

Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

wird als Tangensfunktion bezeichnet.

Kotangensfunktion

Die Funktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

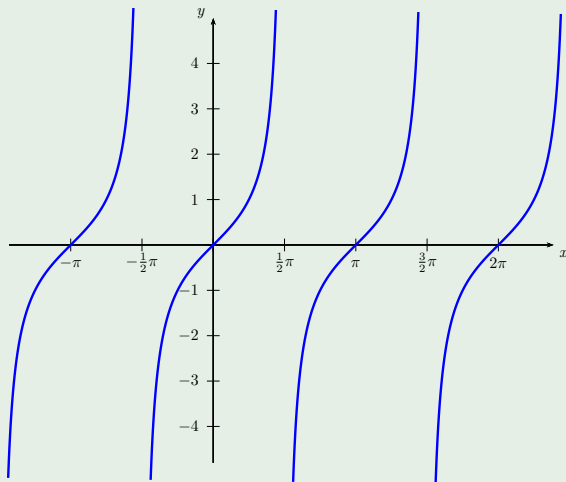
wird als Kotangensfunktion bezeichnet.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Der Graph der Tangensfunktion

Der Graph der Tangensfunktion lässt sich wie folgt darstellen:

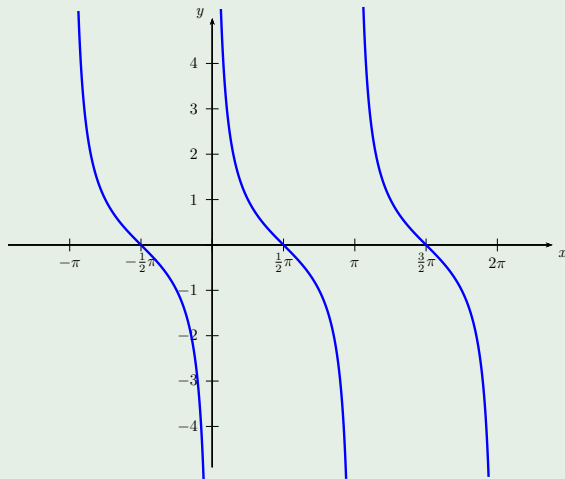


4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Der Graph der Kotangensfunktion

Der Graph der Kotangensfunktion lässt sich wie folgt darstellen:



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.1 Reellwertige Funktionen in einer reellen Variablen

Periode und Nullstellen

sin und cos besitzen die Periode 2π
tan und cot besitzen die Periode π

Die Nullstellen der Tangensfunktion stimmen mit den Nullstellen der Sinusfunktion überein und die Nullstellen der Kotangensfunktion sind durch die Nullstellen der Kosinusfunktion gegeben.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sin(x) = \tan(x) = 0 \text{ für alle } x = k\pi$$

$$\cos(x) = \cot(x) = 0 \text{ für alle } x = (2k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Die Tangensfunktion ist für die Nullstellen der Kosinusfunktion nicht definiert, während die Kotangensfunktion nicht für die Nullstellen der Sinusfunktion definiert ist.

Kapitel 4.2

Eigenschaften von Funktionen

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Zentrale Eigenschaften

Funktionen besitzen diverse Eigenschaften, von denen vor allem die folgenden Eigenschaften von übergeordneter Bedeutung sind:

1. Monotonieverhalten
2. Krümmungsverhalten
3. Symmetrie
4. Beschränktheit
5. Extrempunkte
6. Wendepunkte
7. Stetigkeit
8. Differenzierbarkeit

Die ersten sechs Eigenschaften sind Gegenstand dieses Abschnittes, die Eigenschaften 7. & 8. werden in den Abschnitten 3 und 4 dieses Kapitels behandelt.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

1. Monotonieverhalten

Eine Funktion heißt (abschnittsweise) monoton, wenn sie sich (in einem Abschnitt) nur in eine Richtung bewegt. Demnach gilt:

Eine Funktion ist (abschnittsweise)

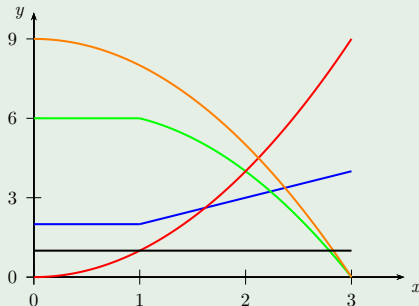
- a) *konstant*, wenn ihre Funktionswerte (in einem Abschnitt) konstant sind,
- b) *monoton wachsend*, wenn ihre Funktionswerte (in einem Abschnitt) anwachsen oder konstant sind,
- c) *monoton fallend*, wenn ihre Funktionswerte (in einem Abschnitt) abfallen oder konstant sind,
- d) *streng monoton wachsend*, wenn ihre Funktionswerte (in einem Abschnitt) ausschließlich anwachsen,
- e) *streng monoton fallend*, wenn ihre Funktionswerte (in einem Abschnitt) ausschließlich abfallen.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiele für monotone Funktionen

- schwarz: konstante Funktion
blau: monoton steigende Funktion
grün: monoton fallende Funktion
rot: streng monoton steigende Funktion
orange: streng monoton fallende Funktion

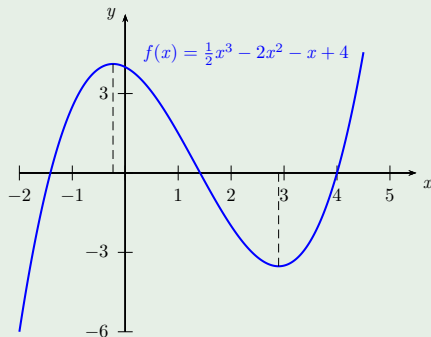


4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiel für eine abschnittsweise monotone Funktion

- $(-\infty; -0,23] : \text{streng monoton steigend}$
- $[-0,23; 2,897] : \text{streng monoton fallend}$
- $[2,897; \infty) : \text{streng monoton steigend}$



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

2. Krümmungsverhalten

Das Krümmungsverhalten gibt die Geschwindigkeit an, mit der eine Funktion (abschnittsweise) anwächst oder abfällt.

Eine Funktion heißt (abschnittsweise)

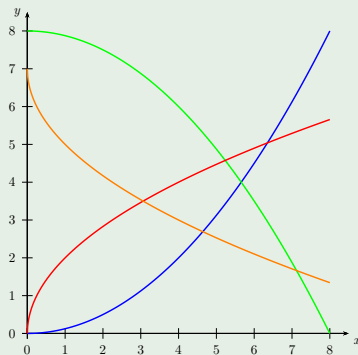
- a) *konvex*, wenn sie (in einem Abschnitt) ein beschleunigtes/progressives oder konstantes Verhalten aufweist,
- b) *konkav*, wenn sie (in einem Abschnitt) ein verzögertes/degressives oder konstantes Verhalten aufweist,
- c) *streng konvex*, wenn sie (in einem Abschnitt) ein ausschließlich beschleunigtes/progressives Verhalten aufweist,
- d) *streng konkav*, wenn sie (in einem Abschnitt) ein ausschließlich verzögertes/degressives Verhalten aufweist.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiele für streng konvexe/konkave Funktionen

- blau: streng konvex und streng monoton steigend
- grün: streng konkav und streng monoton fallend
- orange: streng konvex und streng monoton fallend
- rot: streng konkav und streng monoton steigend



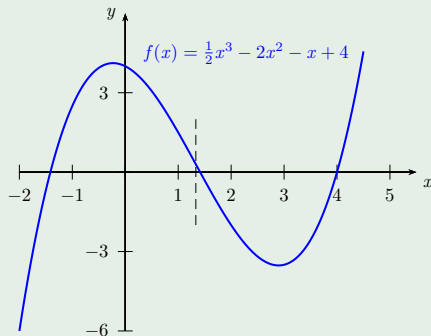
4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiel für eine abschnittsweise konvexe/konkave Funktion

$(-\infty; 1,33] : \text{streng konkav}$

$[1,33; \infty) : \text{streng konvex}$



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

3. Symmetrie

Funktionen, die achsensymmetrisch zur Ordinate sind, werden als *gerade*, und Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind, werden als *ungerade* bezeichnet.

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- a) gerade Funktion, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt bzw.
- b) ungerade Funktion, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

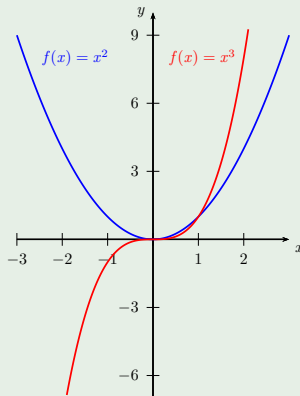
Die Sinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen sind ungerade Funktionen, während die Kosinusfunktion eine gerade Funktion ist.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiele zur Achsen- und Punktsymmetrie

- blau: achsensymmetrische bzw. gerade Funktion
rot: punktsymmetrische bzw. ungerade Funktion



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

4. Beschränktheit

Eine Funktion heißt (abschnittsweise)

- a) *nach unten beschränkt*, wenn es (in einem Abschnitt) eine untere Schranke gibt, die von keinem Funktionswert unterschritten wird,
- b) *nach oben beschränkt*, wenn es (in einem Abschnitt) eine obere Schranke gibt, die von keinem Funktionswert überschritten wird,
- c) *beschränkt*, wenn sie (in einem Abschnitt) nach oben und nach unten beschränkt ist,
- d) *unbeschränkt*, wenn sie (in einem Abschnitt) nicht beschränkt ist.

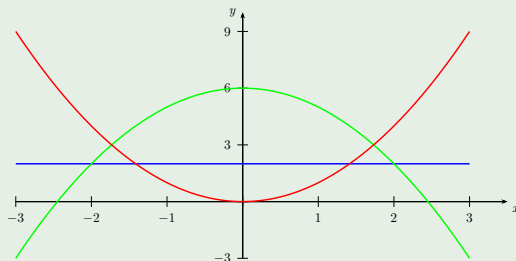
Die kleinste obere Schranke einer (nach oben) beschränkten und die größte untere Schranke einer (nach unten) beschränkten Funktion wird als *Supremum* bzw. *Infimum* bezeichnet.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiele für beschränkte Funktionen

- blau: beschränkte Funktion (Supremum = Infimum = 2)
grün: nach oben beschränkte Funktion (Supremum = 6)
rot: nach unten beschränkte Funktion (Infimum = 0)



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

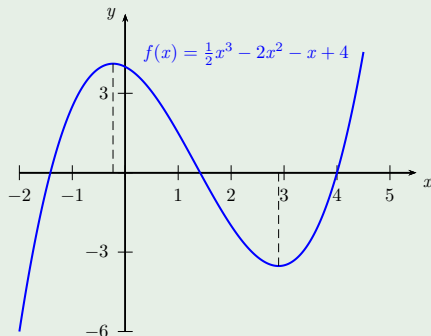
Beispiel für eine abschnittsweise beschränkte Funktion

$(-\infty; -0,23] :$ nach unten unbeschränkt, nach oben beschränkt

$[-0,23; 2,897] :$ beschränkt

$[2,897; \infty) :$ nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt

Für die Beschränkungen gilt: Supremum= 4,118 & Infimum= -3,526



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

5. Extrempunkte

Bei den Extrempunkten (Extrema) einer Funktion handelt es sich um ihre *Hochpunkte* (Maxima) und *Tiefpunkte* (Minima). Sie werden unterschieden in *globale* und *lokale* Extrema.

Während ein globales Maximum (Minimum) den größten (kleinsten) Funktionswert darstellt, den die Funktion in einem betrachteten Abschnitt annimmt, handelt es sich bei einem lokalen Maximum (Minimum) lediglich um den größten (kleinsten) Funktionswert an einer Stelle x_0 , in deren Umgebung keine größeren (kleineren) Werte angenommen werden.

Damit ist jedes globale Extremum auch stets ein lokales Extremum.

Die Stelle x_0 , die zu einem Extremum gehört, wird als *Extremstelle* bezeichnet. Als *Extrempunkt* bezeichnet man die Kombination aus Extremstelle und dem in x_0 angenommenen Funktionswert $f(x_0)$.

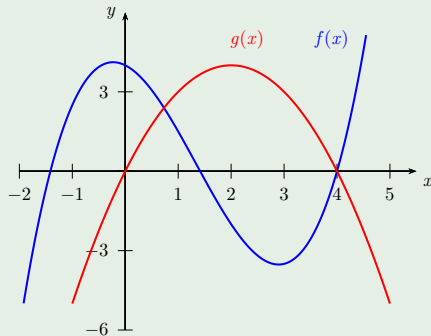
4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiele für Maxima und Minima

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - x + 4$: lokales Maximum bei $(-0,23; 4,118)$
lokales Minimum bei $(2,897; -3,526)$

$g(x) = 4 - (x - 2)^2$: globales Maximum bei $(2; 4)$



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

6. Wendepunkte

In einem Wendepunkt einer Funktion f ändert sich ihr Krümmungsverhalten.

Geht ein konkaver in einen konvexen Verlauf über, bezeichnet man den Punkt $(x_0; f(x_0))$ des Überganges als Rechts-Links- oder als *Konkav-Konvex*-Wendepunkt.

Geht ein konvexer in einen konkaven Verlauf über, bezeichnet man den Punkt $(x_0; f(x_0))$ des Überganges als Links-Rechts- oder als *Konvex-Konkav*-Wendepunkt.

Die Stelle x_0 wird dabei als *Wendestelle* bezeichnet.

Besitzt ein Wendepunkt die Eigenschaft, dass an ihn eine waagerechte Tangente angelegt werden kann (die Steigung von f im Wendepunkt also Null ist), wird er als *Terrassenpunkt* bzw. *Sattelpunkt* bezeichnet.

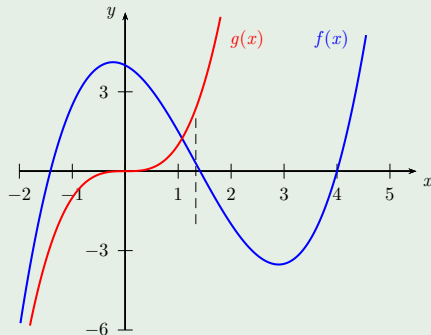
4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.2 Eigenschaften von Funktionen

Beispiele für Wendepunkte

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - x + 4$: Konkav-Konvex-Wendepunkt
bei $(1, 33; 0, 2962)$

$g(x) = x^3$: Konkav-Konvex-Terrassenpunkt
bei $(0; 0)$



Kapitel 4.3

Grenzwerte und Stetigkeit

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Grenzwerte

Ein Grenzwert einer Funktion f an einer bestimmten Stelle x_0 bezeichnet denjenigen Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung von x_0 annähert.

Dies sei anhand eines Einführungsbeispiels illustriert.

Die gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \quad (1)$$

ist für $x_0 = 1$ nicht definiert. Es stellt sich also die Frage, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ verhalten, wenn man sich der Stelle $x_0 = 1$ von links und rechts beliebig genau annähert. Dies ist die Frage nach dem *links-* bzw. *rechtsseitigen Grenzwert* der Funktion f an der Stelle x_0 .

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Fortsetzung des Einführungsbeispiels

Nähert man sich der Stelle $x_0 = 1$ in (1) von links ($x < x_0$) bzw. rechts ($x > x_0$), resultieren die folgenden Funktionswerte:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999
$f(x)$	1,81	1,9801	1,998	1,9998	1,99998

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001
$f(x)$	2,21	2,0201	2,0020	2,0002	2,00002

Es ist zu erkennen, dass man sich von links und rechts jeweils dem Wert 2 für den Funktionswert $f(x)$ nähert. Demnach besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 den links- und rechtsseitigen Grenzwert 2.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Links- und rechtsseitiger Grenzwert

Eine Funktion f besitzt an einer Stelle x_0 einen linksseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn bei einer Annäherung von links an x_0 die Funktionswerte $f(x)$ der Zahl a immer näher kommen. Man schreibt:

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = a$$

Eine Funktion f besitzt an einer Stelle x_0 einen rechtsseitigen Grenzwert $b \in \mathbb{R}$, wenn bei einer Annäherung von rechts an x_0 die Funktionswerte $f(x)$ der Zahl b immer näher kommen. Man schreibt:

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = b$$

Für das Einführungsbeispiel folgt somit:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 2$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Links- und rechtsseitiger Grenzwert bei Teilfunktionen

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1, 5x) + 4,5 & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2} & \text{für } x > -2 \end{cases}$$

Für den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = -2$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow -2} (\ln(x^2 + 1, 5x) + 4,5) = 4,5$$

$$\lim_{x \downarrow -2} \left(\frac{3x^2 + 2x + 1}{2} \right) = 4,5$$

Die Eigenschaft, dass die Teilfunktionen für $x \rightarrow -2$ denselben Grenzwert besitzen, ist für das Stetigkeitsverhalten von f zentral.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Beidseitiger Grenzwert

Stimmen der links- und rechtsseitige Grenzwert überein, führt dies zur Betrachtung von beidseitigen Grenzwerten.

Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f bei einer beliebigen Annäherung von x an eine Stelle x_0 einer Zahl $a \in \mathbb{R}$, wird a als Grenzwert von f an der Stelle x_0 bezeichnet und man schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Für das Einführungsbeispiel gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Uneigentliche Grenzwerte (1)

Besitzt eine Funktion f für $x \rightarrow x_0$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wird f als *konvergent* und andernfalls als *divergent* bezeichnet.

Werden die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f bei einer beliebigen Annäherung von x an eine Stelle x_0 beliebig groß oder klein, besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Grenzwert und man schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Die gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ist für $x \rightarrow 0$ links- und rechtsseitig divergent, denn es gilt:

$$\lim_{x \uparrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) = \infty$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

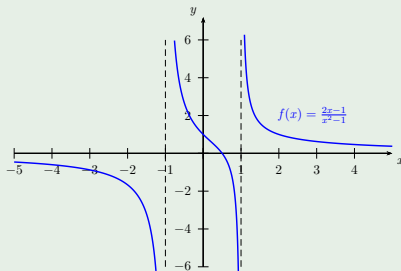
Uneigentliche Grenzwerte (2)

Für die Grenzübergänge der gebrochen-rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$$

an den Stellen $x_0 = \pm 1$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow \pm 1} \left(\frac{2x - 1}{x^2 - 1} \right) = -\infty \quad \lim_{x \downarrow \pm 1} \left(\frac{2x - 1}{x^2 - 1} \right) = \infty$$



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Verhalten im Unendlichen (1)

Häufig ist nicht das Verhalten einer Funktion mit $x \rightarrow x_0$ von Interesse, sondern ihr *asymptotisches Verhalten*, d.h. für $x \rightarrow \pm\infty$.

Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f bei einem unbegrenzt wachsenden x einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, wird a als Grenzwert der Funktion f mit $x \rightarrow \infty$ bezeichnet und man schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f bei einem unbegrenzt fallenden x einer Zahl $b \in \mathbb{R}$ an, wird b als Grenzwert der Funktion f mit $x \rightarrow -\infty$ bezeichnet und man schreibt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

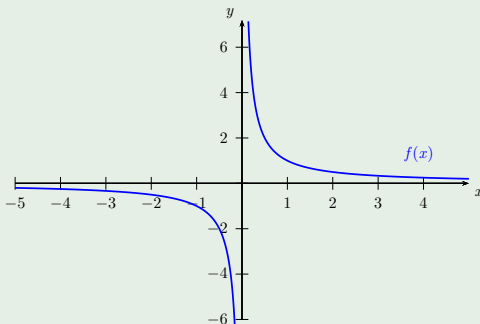
Verhalten im Unendlichen (2)

Das asymptotische Verhalten der gebrochen-rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ergibt sich zu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Rechenregeln für Grenzwerte

Gegeben seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die für $x \rightarrow x_0$ den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ bzw. $b \in \mathbb{R}$ besitzen. Dann gilt:

$$(G1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot a \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$(G2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$$

$$(G3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \cdot b$$

$$(G4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \quad (g(x) \neq 0, b \neq 0)$$

Diese Rechenregeln gelten entsprechend für $x \rightarrow \pm\infty$.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Anwendungen der Rechenregeln für Grenzwerte (1)

Gegeben seien die folgenden gebrochen-rationalen Funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 1}{x^3}$$
$$g(x) = \frac{3x + 4}{x}$$

Bilden des Grenzüberganges für $x \rightarrow \infty$ liefert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{x} \right) = 3$$

Damit sind f und g konvergent mit dem Grenzwert $a = 0$ bzw. $b = 3$.

Anwendungen der Rechenregeln für Grenzwerte (2)

Anwenden der Rechenregeln mit $a = 0$, $b = 3$ und $c = 5$ führt zu:

$$(G1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$(G2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) \pm \left(\frac{3x + 4}{x} \right) \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{x} \right) = 0 \pm 3 = \pm 3$$

$$(G3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) \cdot \left(\frac{3x + 4}{x} \right) \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{x} \right) = 0 \cdot 3 = 0$$

$$(G4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3}}{\frac{3x + 4}{x}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{x} \right)} = \frac{0}{3} = 0$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Unbestimmte Ausdrücke

Führt die Berechnung eines Grenzwertes auf einen *unbestimmten Ausdruck* der Form $\frac{0}{0}$, kann der Grenzwert manchmal über eine Faktorisierung ermittelt werden.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x^2 - 9x}{2x - 6} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x \cdot (x - 3)}{2 \cdot (x - 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3x}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 + x^3}{x^3 + 2x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 \cdot (x + 1)}{x^2 \cdot (x + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot (x + 1)}{x + 2} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x - 2) \cdot (x - 1)}{(x - 2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - 1}{x - 2} \right) = \pm \infty$$

Ein weiteres Verfahren zur Berechnung derartiger Grenzwerte stellt die Regel von L'HÔPITAL dar, die Bestandteil der Vorlesung „Mathematik für Betriebswirte II“ ist.

Grenzwerte und Stetigkeitsverhalten

Wie auf Folie 47 gezeigt, besitzen die Teilfunktionen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1,5x) + 4,5 & \text{für } x \leq -2 \\ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2} & \text{für } x > -2 \end{cases}$$

für $x \uparrow -2$ bzw. $x \downarrow -2$ denselben Grenzwert. Die Teilfunktionen gehen demnach an der Stelle $x_0 = -2$ nahtlos ineinander über ohne eine Sprungstelle aufzuweisen. Zudem stimmt der Grenzwert mit dem Funktionswert von f an der Stelle $x_0 = -2$ überein. Dieses Verhalten der Funktion f an der Stelle x_0 wird als *stetig* bezeichnet. Es gilt:

$$f(-2) = \lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} f(x) = 4,5$$

Bedingungen für die Stetigkeit einer Funktion

Damit eine Funktion f an einer Stelle x_0 stetig ist, müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

- 1) Die Funktion f muss an der Stelle x_0 definiert sein.
- 2) Der Grenzwert von f muss für $x \rightarrow x_0$ existieren.
- 3) Der Grenzwert von f an der Stelle x_0 muss $f(x_0)$ entsprechen.

Ist Bedingung 1) nicht erfüllt, ist der Begriff der Stetigkeit für f an der Stelle x_0 nicht definiert.

Ist Bedingung 2) und/oder 3) nicht erfüllt, ist f an der Stelle x_0 unstetig und x_0 ist eine *Unstetigkeitsstelle* (Sprungstelle) von f .

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Stetigkeitsverhalten bei Vorliegen von Polstellen

Als Polstelle oder Pol bezeichnet man eine einpunktige Definitionslücke einer Funktion, bei der die Funktionswerte in der Umgebung der Definitionslücke beliebig groß bzw. klein werden.

Für eine Funktion f mit der Polstelle x_0 gilt demnach:

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = \infty$$

Die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

weisen an den Stellen $x_0 = -3$ bzw. $x_0 = \pm 1$ Polstellen auf, sind jedoch trotzdem stetig (vgl. Folien 14 und 50).

Damit kann eine Funktion mit einer einpunktigen Definitionslücke durchaus stetig sein - auch dann, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Stetigkeit im Einführungsbeispiel

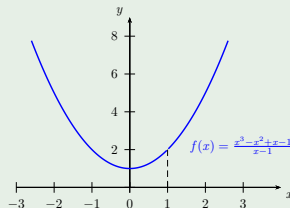
Die gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$$

ist für $x_0 = 1$ nicht definiert, besitzt also in $x_0 = 1$ eine einpunktige Definitionslücke (dies ist jedoch keine Polstelle). Es gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 2$$

Damit ist die Funktion f stetig.



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.3 Grenzwerte und Stetigkeit

Eine unstetige Funktion

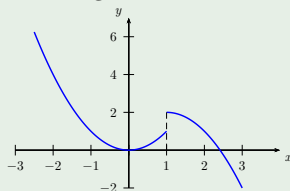
Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2 - (x - 1)^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 1$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} (x^2) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow 1} (2 - (x - 1)^2) = 2$$

Damit besitzt f an der Stelle $x_0 = 1$ eine Sprungstelle der Höhe $2 - 1 = 1$ und ist eine unstetige Funktion.



Kapitel 4.4

Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Differentialrechnung und Ableitungen

Der Fokus der Differentialrechnung liegt in der Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen unter Verwendung von *Ableitungen*.

Eine Ableitung einer Funktion f kann als Proportionalitätsfaktor zwischen einer verschwindend geringen (infinitesimalen) Änderung der unabhängigen Variablen x und der hierdurch induzierten, ebenfalls infinitesimalen Änderung des Funktionswertes $f(x)$ angesehen werden. Existiert ein solcher Proportionalitätsfaktor, bezeichnet man die Funktion als differenzierbar.

Aus geometrischem Blickwinkel kann eine Ableitung als verallgemeinerte Steigung einer Funktion f betrachtet werden.

Für die erste Ableitung einer Funktion f ist die Notation f' üblich.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

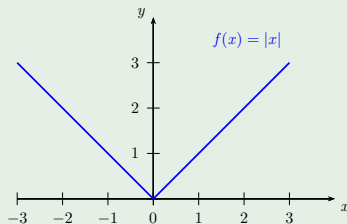
Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Ist eine Funktion differenzierbar, ist sie auch stetig. Eine stetige Funktion ist jedoch nicht zwingend differenzierbar.

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = |x|$$

Die Funktion f ist stetig, aber nicht differenzierbar.



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Differentiationsregeln auf einen Blick

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen f und g , eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Variable $x > 0$. Dann gelten die folgenden Ableitungsregeln:

$$(A1: \text{Konstantenregel}) \quad c' = 0$$

$$(A2: \text{Potenzregel}) \quad (x^c)' = c \cdot x^{c-1}$$

$$(A3: \text{Faktorregel}) \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(A4: \text{Summenregel}) \quad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(A5: \text{Produktregel}) \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(A6: \text{Quotientenregel}) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (\text{für } g \neq 0)$$

$$(A7: \text{Kettenregel}) \quad (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A1: Konstantenregel

Gegeben sei eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Ableitung von c ergibt sich dann über die Konstantenregel zu:

$$c' = 0$$

$$5' = 0 \quad (-44)' = 0 \quad (\sqrt{2})' = 0 \quad 1' = 0 \quad 0' = 0$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A2: Potenzregel

Gegeben sei eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Variable $x > 0$. Die Ableitung der Potenzfunktion x^c ergibt sich dann über die Potenzregel zu:

$$(x^c)' = c \cdot x^{c-1}$$

$$(x^5)' = 5x^4 \quad (x^{-44})' = -44x^{-45} \quad (x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \quad x' = 1$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A3: Faktorregel

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion f und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Ableitung von $c \cdot f$ ergibt sich dann über die Faktorregel zu:

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(5 \cdot x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$$

$$(-44 \cdot x^3)' = -44 \cdot 3x^{3-1} = -132x^2$$

$$\left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \sqrt{2} \cdot (-x^{-2}) = -\sqrt{2}x^{-2}$$

$$(\sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} = \sqrt{4}x^{\sqrt{2}-1} = 2x^{\sqrt{2}-1}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A4: Summenregel

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen f und g . Die Ableitung von $f \pm g$ ergibt sich dann über die Summenregel zu:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(6x^3 + 10x)' = 18x^2 + 10$$

$$(x^3 - 11x^2 + 4x - 5)' = 3x^2 - 22x + 4$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{7}x - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{7}x \right) \right)' = 3x - \frac{5}{7} - \left(x + \frac{2}{7} \right) = 2x - 1$$

$$(x^3 - x^2 - x - (x^3 - x^2 - 2x))' = 3x^2 - 2x - 1 - (3x^2 - 2x - 2) = 1$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A5: Produktregel

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen f und g . Die Ableitung von $f \cdot g$ ergibt sich dann über die Produktregel zu:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\begin{aligned}((x^2 - 3x) \cdot (-5x^2))' &= (2x - 3) \cdot (-5x^2) + (x^2 - 3x) \cdot (-10x) \\ &= -10x^3 + 15x^2 - 10x^3 + 30x^2 = -20x^3 + 45x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((x^2 - 3x)^2)' &= (2x - 3) \cdot (x^2 - 3x) + (x^2 - 3x) \cdot (2x - 3) \\ &= 2x^3 - 6x^2 - 3x^2 + 9x + 2x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 9x \\ &= 4x^3 - 18x^2 + 18x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot \sqrt{x})' &= 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A6: Quotientenregel

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen f und $g \neq 0$. Die Ableitung von $\frac{f}{g}$ ergibt sich dann über die Quotientenregel zu:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{5x^3}{x+1}\right)' &= \frac{15x^2 \cdot (x+1) - (5x^3 \cdot 1)}{(x+1)^2} = \frac{15x^3 + 15x^2 - 5x^3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{10x^3 + 15x^2}{(x+1)^2} = \frac{5x^2 \cdot (2x+3)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+4x}{3x-5}\right)' &= \frac{(2x+4) \cdot (3x-5) - ((x^2+4x) \cdot 3)}{(3x-5)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 10x + 12x - 20 - (3x^2 + 12x)}{(3x-5)^2} = \frac{3x^2 - 10x - 20}{(3x-5)^2}\end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

A7: Kettenregel

Gegeben seien zwei differenzierbare Funktionen f und g . Die Ableitung der verketteten Funktion $f \circ g$ ergibt sich dann über die Kettenregel zu:

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

$$\begin{aligned}\left((x^2 - 3x)^2\right)' &= 2 \cdot (x^2 - 3x) \cdot (2x - 3) = (2x^2 - 6x) \cdot (2x - 3) \\ &= 4x^3 - 6x^2 - 12x^2 + 18x = 4x^3 - 18x^2 + 18x\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt[3]{6x+4}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (6x+4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6 = 2 \cdot (6x+4)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x+4)^2}}$$

$$\left(\sqrt{x^3}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot x^2 = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Überprüfung ausgewählter Ableitungsregeln am Beispiel (1)

Gegeben seien die Funktionen f und g , ihre ersten Ableitungen f' und g' und die Konstante $c = 6$:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + 6x & f'(x) &= 6x + 6 \\g(x) &= -4x + 4 & g'(x) &= -4\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(c \cdot f)' &= (6 \cdot (3x^2 + 6x))' = (18x^2 + 36x)' = 36x + 36 \\&= 6 \cdot (6x + 6) = c \cdot f'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f + g)' &= (3x^2 + 6x - 4x + 4)' = (3x^2 + 2x + 4)' = 6x + 2 \\&= 6x + 6 - 4 = f' + g'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f - g)' &= (3x^2 + 6x + 4x - 4)' = (3x^2 + 10x - 4)' = 6x + 10 \\&= 6x + 6 + 4 = f' - g'\end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Überprüfung ausgewählter Ableitungsregeln am Beispiel (2)

Gegeben seien die Funktionen f und g und ihre ersten Ableitungen f' und g' :

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + 6x & f'(x) &= 6x + 6 \\g(x) &= -4x + 4 & g'(x) &= -4\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= ((3x^2 + 6x) \cdot (-4x + 4))' = (-12x^3 + 12x^2 - 24x^2 + 24x)' \\&= (-12x^3 - 12x^2 + 24x)' = -36x^2 - 24x + 24 \\&= -24x^2 + 24x - 24x + 24 - 12x^2 - 24x \\&= (6x + 6) \cdot (-4x + 4) + (3x^2 + 6x) \cdot (-4) \\&= f' \cdot g + f \cdot g'\end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Überprüfung ausgewählter Ableitungsregeln am Beispiel (3)

Gegeben seien die Funktionen f und g und ihre ersten Ableitungen f' und g' :

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + 6x & f'(x) &= 6x + 6 \\g(x) &= -4x + 4 & g'(x) &= -4\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)' &= (3 \cdot (-4x + 4)^2 + 6 \cdot (-4x + 4))' \\&= (3 \cdot (16x^2 - 32x + 16) - 24x + 24)' \\&= (48x^2 - 96x + 48 - 24x + 24)' \\&= (48x^2 - 120x + 72)' \\&= 96x - 120 \\&= (-24x + 24 + 6) \cdot (-4) \\&= (6 \cdot (-4x + 4) + 6) \cdot (-4) \\&= f'(g) \cdot g'\end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Ableitungen spezieller Funktionen (1)

Gegeben sei eine Variable $x \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $a > 0$. Dann besitzen die speziellen Funktionen auf den Folien 16ff. die folgenden ersten Ableitungen:

Funktion

Erste Ableitung

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log_a(x) \text{ mit } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

$$f(x) = \ln(x) \text{ mit } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Ableitungen spezieller Funktionen (2)

$$(4^x)' = 4^x \cdot \ln(4)$$

$$(3 \ln(x^2))' = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}$$

$$\left(\frac{\log_6(x)}{e^{2x}} \right)' = \frac{\frac{1}{\ln(6) \cdot x} \cdot e^{2x} - \log_6(x) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{\frac{1}{\ln(6) \cdot x} - 2 \log_6(x)}{e^{2x}}$$

$$\begin{aligned} (\sin(x) \cdot \cos(x))' &= \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Ableitungen spezieller Funktionen (3)

$$(-\cos(5x))' = -(-\sin(5x)) \cdot 5 = 5 \sin(5x)$$

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot \ln(2x^3))' &= 2x \cdot \ln(2x^3) + x^2 \cdot \frac{1}{2x^3} \cdot 6x^2 = 6x \cdot \ln(2x) + 3x \\ &= 3x \cdot (2 \cdot \ln(2x) + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4 \cdot \ln(x)}{x+1}\right)' &= \frac{(4x^3 \cdot \ln(x) + x^4 \cdot \frac{1}{x}) \cdot (x+1) - x^4 \cdot \ln(x) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{4x^3 \cdot \ln(x) + x^3}{x+1} - \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^3 \cdot (4 \ln(x) + 1)}{x+1} - \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Beispiel zur Differenzierbarkeit (1)

Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -\ln(-x + a) + b & \text{für } x < 0 \\ ae^x + \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } a > 0$$

ist für $a = 1$ und $b = \frac{3}{2}$ an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar.
Denn es gilt:

$$\lim_{x \uparrow 0} (-\ln(-x + a) + b) = -\ln(a) + b$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(ae^x + \frac{1}{2} \right) = a + \frac{1}{2}$$

Gleichsetzen liefert:

$$-\ln(a) + b = a + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = a + \ln(a) + \frac{1}{2}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Beispiel zur Differenzierbarkeit (2)

Die links- und rechtsseitige Ableitung von f ergibt sich zu f'_1 und f'_2 :

$$f'_1(x) = -\frac{1}{-x+a} \cdot (-1) = \frac{1}{-x+a}$$

$$f'_2(x) = ae^x$$

Für f'_1 und f'_2 an der Stelle $x = 0$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow 0} \left(\frac{1}{-x+a} \right) = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} (ae^x) = a$$

Für a und b erhält man demnach:

$$\frac{1}{a} = a \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad (\text{wegen } a > 0)$$

$$b = 1 + \ln(1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Höhere Ableitungen (1)

Die erste Ableitung f' einer Funktion f kann selbst wieder differenzierbar sein.

Ist eine Funktion f zweimal oder dreimal differenzierbar, wird ihre zweite Ableitung mit f'' und ihre dritte Ableitung mit f''' bezeichnet.

Ist eine Funktion f n -mal differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$), ist ab der vierten Ableitung die Notation $f^{(n)}$ für ihre n -te Ableitung gebräuchlich.

$$f(x) = 4x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x^2 + x + 11$$

$$f'(x) = 20x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 2x + 1$$

$$f''(x) = 80x^3 - 24x^2 + 36x - 2$$

$$f'''(x) = 240x^2 - 48x + 36$$

$$f^{(4)}(x) = 480x - 48$$

$$f^{(5)}(x) = 480$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (\text{für alle } n \geq 6)$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Höhere Ableitungen (2)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = \ln(4x - 8)$$

Dann gilt für die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = (x - 2)^{-1} \quad f''(x) = -(x - 2)^{-2} \quad f'''(x) = 2 \cdot (x - 2)^{-3}$$

Demnach gilt generell für $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x-2)^{-n}$$

Das Ausrufezeichen bildet dabei die Fakultätsfunktion

$$(n-1)! = \prod_{i=1}^{n-1} i.$$

Vergleiche zur Fakultätsfunktion auch Kapitel 2.9.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.4 Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln

Höhere Ableitungen (3)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = 6x \cdot e^x$$

Dann gilt für die ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = 6 \cdot e^x + 6x \cdot e^x = 6e^x \cdot (1 + x)$$

$$f''(x) = 6e^x \cdot (1 + x) + 6e^x = 12e^x + 6x \cdot e^x = 6e^x \cdot (2 + x)$$

$$f'''(x) = 6e^x \cdot (2 + x) + 6e^x = 18e^x + 6x \cdot e^x = 6e^x \cdot (3 + x)$$

Demnach gilt generell für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(n)}(x) = 6e^x \cdot (n + x)$$

Kapitel 4.5

Kurvendiskussion

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Aspekte einer umfassenden Kurvendiskussion

Wie auf Folie 4 erläutert, kann eine Funktion u.a. graphisch dargestellt werden. Dies ist allerdings nur möglich, wenn in einem vorherigen Schritt eine umfassende *Kurvendiskussion* durchgeführt wird, die die folgenden Punkte berücksichtigt:

- 1) Definitionsbereich
- 2) Nullstellen
- 3) Stetigkeitsverhalten
- 4) Extrempunkte
- 5) Wendepunkte
- 6) Monotonieverhalten
- 7) Krümmungsverhalten
- 8) Asymptotisches Verhalten

Begleitende Beispiele

In diesem Abschnitt werden alle Punkte 1) - 8) einer umfassenden Kurvendiskussion samt einer anschließenden graphischen Darstellung behandelt und jeweils anhand der vier folgenden Beispiele illustriert.

$$f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(x) = x^3 - 6x^2$$

$$f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_2(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$f_3 : D_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_3(x) = \ln(x-4)$$

$$f_4 : D_4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_4(x) = \sqrt{25-x^2}$$

1) Definitionsbereich

Der maximale Definitionsbereich D einer Funktion f beinhaltet alle x -Werte, für die der Funktionswert $f(x)$ definiert ist.

Polynomfunktionen: $D = \mathbb{R}$

gebr.-rat. Funktionen: $D = \mathbb{R}$ exklusive der Nullstellen von $p_2(x)$

Logarithmusfunktionen: nur für positive Argumente definiert

Wurzelfunktionen: Der Radikand muss nicht-negativ sein.

Die Funktionen auf Folie 86 besitzen die folgenden Definitionsbereiche:

$$D_1 = \mathbb{R}$$

$$D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$D_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} = (4, \infty)$$

$$D_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\} = [-5, 5]$$

2) Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion f sind die Schnittpunkte des Funktionsgraphen $f(x)$ mit der x -Achse und entsprechen den Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

Die Nullstellen der Funktionen auf Folie 86 ergeben sich zu:

$$f_1 : x_{1,2} = 0, x_3 = 6$$

$$f_2 : \text{Es existieren keine Nullstellen.}$$

$$f_3 : x = 5$$

$$f_4 : x_{1,2} = \pm 5$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Ausführliche Berechnung der Nullstellen

$$x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x - 6) = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = 6$$

$$\frac{1}{x+3} = 0$$

$\Rightarrow$ Es existieren keine Nullstellen.

$$\ln(x-4) = 0$$

$$e^{\ln(x-4)} = e^0$$

$$x - 4 = 1 \quad \Rightarrow x = 5$$

$$\sqrt{25 - x^2} = 0$$

$$25 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 25 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 5$$

3) Stetigkeitsverhalten

Die Untersuchung des Stetigkeitsverhaltens einer Funktion dient dazu festzustellen, ob es sich um eine stetige oder eine unstetige Funktion handelt, in welchen Bereichen die Funktion ggf. stetig ist und wo sich ggf. Unstetigkeitsstellen befinden.

Das Stetigkeitsverhalten der Funktionen auf Folie 86 kann wie folgt angegeben werden:

f_1 : über ihrem gesamten Definitionsbereich stetig

f_2 : über ihrem gesamten Definitionsbereich stetig,
in $x = -3$ besitzt $f_2(x)$ eine Polstelle

f_3 : über ihrem gesamten Definitionsbereich stetig

f_4 : über ihrem gesamten Definitionsbereich stetig

Dabei wird das Stetigkeitsverhalten der Funktion f_2 auf der folgenden Folie ausführlich untersucht.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Ausführliche Bestimmung des Stetigkeitsverhaltens von f_2

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f_2(x) = \frac{1}{x+3}$$

f_2 ist in den Intervallen $(-\infty, -3)$ und $(-3, \infty)$ stetig. Für ihren links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = -3$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow -3} \left(\frac{1}{x+3} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} \right) = \infty$$

Damit ist f_2 über ihrem gesamten Definitionsbereich stetig und besitzt in $x_0 = -3$ eine Polstelle.

4) Extrempunkte

Da Extrempunkte die Hoch- und Tiefpunkte und damit diejenigen Punkte einer differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ umfassen, in denen sich das Monotonieverhalten von f ändert, haben sie die Eigenschaft, dass an ihnen eine waagerechte Tangente angelegt werden kann.

Die Steigung einer solchen Tangente ist also in Extrempunkten stets gleich Null.

Da die Steigung einer differenzierbaren Funktion über ihre erste Ableitung f' gegeben ist, ist f' gleich Null zu setzen, um mögliche Kandidaten für Extremstellen zu erhalten.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Notwendige Bedingung für Extrema

Aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich die *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines Extremums:

Besitzt eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein Extremum, gilt:

$$f'(x_0) = 0 \tag{2}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung bzw. die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ sind also Kandidaten für Extremstellen und werden als *stationäre Stellen* bezeichnet.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Hinreichende Bedingung für Extrema

Allerdings ist (2) keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremums.

Eine stationäre Stelle x_0 könnte auch zu einem Terrassenpunkt gehören. Um diese Möglichkeit, also eine Änderung im Krümmungsverhalten, auszuschließen, verlangt die *hinreichende Bedingung* für das Vorliegen eines Extremums, dass die zweite Ableitung f'' an der Stelle x_0 von Null verschieden sein muss:

Gegeben sei eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$, die in $x_0 \in (a, b)$ ein Extremum besitzt. Dann gilt:

$$f''(x_0) \neq 0$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Unterscheidung von Maximum und Minimum

Da über die hinreichende Bedingung nichts darüber ausgesagt werden kann, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, soll sie speziell auf ein Maximum bzw. Minimum umformuliert werden.

Für ein Maximum gilt offensichtlich, dass der Funktionsgraph in der Nähe des Maximums streng konkav verläuft. Für ein Minimum gilt, dass der Funktionsgraph in der Nähe streng konvex verläuft.

Damit können die Bedingungen für das Vorliegen eines Minimums bzw. Maximums von f wie folgt angegeben werden:

Gegeben sei eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

- a) Ist $f''(x_0) < 0$, besitzt f in x_0 ein Maximum.
- b) Ist $f''(x_0) > 0$, besitzt f in x_0 ein Minimum.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Lokale und globale Extrema

Die auf den vorangegangenen Folien dargestellten Bedingungen sind für lokale Extrema formuliert. Führt $x_0 \in (a, b)$ allerdings über alle $x \in (a, b)$ hinweg zum größten bzw. kleinsten Funktionswert $f(x_0)$, besitzt f in x_0 sogar ein globales Maximum bzw. Minimum:

Gegeben sei eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

- a) Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, besitzt f in x_0 ein globales Maximum.
- b) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, besitzt f in x_0 ein globales Minimum.

Übersicht über Extrema in den Begleitbeispielen

Die Extrema der Funktionen auf Folie 86 ergeben sich zu:

- f_1 : Ein lokales Maximum liegt bei $(0; 0)$.
Ein lokales Minimum liegt bei $(4; -32)$.
- f_2 : besitzt keine Extrema
- f_3 : besitzt keine Extrema
- f_4 : Ein globales Maximum liegt bei $(0; 5)$.

Ausführliche Berechnung der Extrema (1)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f_1(x) = x^3 - 6x^2$$

Für die erste und zweite Ableitung von f_1 gilt:

$$f_1'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f_1''(x) = 6x - 12$$

Nullsetzen von $f_1'(x)$ liefert:

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$x \cdot (3x - 12) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3x - 12 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 4$$

Ausführliche Berechnung der Extrema (2)

Damit besitzt f_1 die stationären Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$. Einsetzen in f_1'' liefert:

$$f_1''(0) = -12 < 0$$

$$f_1''(4) = 12 > 0$$

Demnach besitzt f_1 in $x_1 = 0$ ein lokales Maximum und in $x_2 = 4$ ein lokales Minimum. Die zugehörigen Funktionswerte ergeben sich zu $f_1(0) = 0$ und $f_1(4) = -32$.

Die Funktionen f_2 und f_3 besitzen keine stationären Stellen und damit auch keine Extrema.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Ausführliche Berechnung der Extrema (3)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f_4(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Für die erste und zweite Ableitung von f_4 gilt:

$$f_4'(x) = \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} f_4''(x) &= \frac{-1 \cdot \sqrt{25 - x^2} - \left(-x \cdot \frac{1}{2} \cdot (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\right)}{(\sqrt{25 - x^2})^2} \\ &= \frac{-1 \cdot \sqrt{25 - x^2}}{(\sqrt{25 - x^2})^2} - \frac{x^2}{(25 - x^2) \cdot \sqrt{25 - x^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} - \frac{x^2}{(25 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Ausführliche Berechnung der Extrema (4)

Nullsetzen von $f_4'(x)$ liefert:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} &= 0 \\ -x &= 0 \quad \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Damit liegt eine stationäre Stelle von f_4 bei $x_0 = 0$. Einsetzen in f_4'' liefert $f_4''(0) = -\frac{1}{5} < 0$. Demnach besitzt f_4 in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum. Der zugehörige Maximalwert ergibt sich zu $f_4(0) = 5$.

Bei diesem Maximum handelt es sich sogar um das globale Maximum, denn für die Randpunkte von f_4 gilt:

$$f_4(-5) = f_4(5) = 0$$

5) Wendepunkte

Da sich in einem Wendepunkt $(x_0; f(x_0))$ einer Funktion f ihr Krümmungsverhalten ändert, besitzt ein Wendepunkt die Eigenschaft, dass die erste Ableitungsfunktion f' an der Stelle x_0 ein Extremum aufweist. Die Wendestellen einer Funktion f sind also die Extremstellen von f' .

Die Untersuchung auf Wendepunkte einer Funktion f verläuft damit analog zur Suche nach Extrema der ersten Ableitungsfunktion f' .

Die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes können demnach direkt übertragen werden.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Notwendige Bedingung für Wendepunkte

Die Steigungsfunktion f' kann nur dann in x_0 ein Extremum besitzen, wenn die Steigung in x_0 gleich Null ist. Da die Steigung von f' über f'' gegeben ist, ergibt sich hierüber die *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines Wendepunktes:

Besitzt eine zweimal differenzierbare Funktion f in x_0 einen Wendepunkt, gilt:

$$f''(x_0) = 0 \tag{3}$$

Die Nullstellen der zweiten Ableitung bzw. die Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$ sind also Kandidaten für Wendestellen.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte

Allerdings ist (3) keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes. Eine *hinreichende Bedingung* ergibt sich in Analogie zum vorherigen Abschnitt zu:

Gegeben sei eine dreimal differenzierbare Funktion f mit $f''(x_0) = 0$, die in x_0 einen Wendepunkt besitzt. Dann gilt:

$$f'''(x_0) \neq 0$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Unterscheidung des Krümmungsüberganges (1)

Da über die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunktes nichts darüber ausgesagt werden kann, ob es sich um einen Konkav-Konvex- oder um einen Konvex-Konkav-Wendepunkt handelt, soll sie speziell auf diese Unterscheidung hin umformuliert werden.

Vor einem Tiefpunkt von f' verläuft die Steigungsfunktion f' fallend, um nach dem Tiefpunkt wieder anzusteigen. Dies ist gleichbedeutend mit einer abnehmenden Steigung von f vor (d.h. einem degressiven bzw. konkaven Verlauf) und einer zunehmenden Steigung von f nach dem Wendepunkt (d.h. einem progressiven bzw. konvexen Verlauf).

Ein Konkav-Konvex-Wendepunkt von f ist demnach gleichbedeutend mit einem Tiefpunkt von f' und ein Konvex-Konkav-Wendepunkt von f ist gleichbedeutend mit einem Hochpunkt von f' . Somit gilt, dass bei einem Tiefpunkt von f' die dritte Ableitung f''' positiv und bei einem Hochpunkt von f' negativ sein muss.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Unterscheidung des Krümmungsüberganges (2)

Auf Basis der vorhergehenden Ausführungen können die Bedingungen für das Vorliegen eines Konkav-Konvex- bzw. eines Konvex-Konkav-Wendepunktes von f wie folgt angegeben werden:

Gegeben sei eine dreimal differenzierbare Funktion f mit $f''(x_0) = 0$. Dann gilt:

- a) Ist $f'''(x_0) > 0$, besitzt f in x_0 einen Konkav-Konvex-Wendepunkt.
- b) Ist $f'''(x_0) < 0$, besitzt f in x_0 einen Konvex-Konkav-Wendepunkt.

Übersicht über Wendepunkte in den Begleitbeispielen

Die Wendepunkte der Funktionen auf Folie 86 ergeben sich zu:

f_1 : Ein Wendepunkt liegt bei $(2; -16)$.

f_2 : besitzt keine Wendepunkte

f_3 : besitzt keine Wendepunkte

f_4 : besitzt keine Wendepunkte

Dabei wird der Wendepunkt der Funktion f_1 auf den folgenden Folien ausführlich berechnet.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Ausführliche Berechnung des Wendepunktes von f_1 (1)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f_1(x) = x^3 - 6x^2$$

Für die zweite und dritte Ableitung von f_1 gilt:

$$f_1''(x) = 6x - 12$$

$$f_1'''(x) = 6$$

Nullsetzen von $f_1''(x)$ liefert:

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12 \quad \Rightarrow x_0 = 2$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Ausführliche Berechnung des Wendepunktes von f_1 (2)

Damit besitzt f_1' die stationäre Stelle $x_0 = 2$. Einsetzen in f_1''' liefert:

$$f_1'''(2) = 6 > 0$$

Demnach besitzt f_1' in $x_0 = 2$ einen Tiefpunkt und f_1 in $x_0 = 2$ einen Konkav-Konvex-Wendepunkt.

Aufgrund von $f_1(2) = -16$ liegt dieser Wendepunkt bei $(2; -16)$.

6) Monotonieverhalten

Um das Monotonieverhalten einer Funktion f zu bestimmen, ist die Steigung von f ein maßgeblicher Indikator. Da die Steigung von f über ihre erste Ableitungsfunktion f' gegeben ist, kann das Monotonieverhalten von f über das Vorzeichen von f' beurteilt werden.

Es sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an allen Stellen $x \in (a, b)$ differenzierbar ist. Dann gilt:

- a) Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) konstant.
- b) Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) monoton wachsend.
- c) Gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) monoton fallend.
- d) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) streng monoton wachsend.
- e) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) streng monoton fallend.

Das Monotonieverhalten in den Begleitbeispielen (1)

Das Monotonieverhalten der Funktionen f_1 und f_2 auf Folie 86 ergibt sich zu:

f_1 : verläuft streng monoton steigend für $x \in (-\infty, 0]$, denn es gilt:

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (-\infty, 0) \text{ und } f'(0) = 0$$

verläuft streng monoton fallend für $x \in [0, 4]$, denn es gilt:

$$f'(x) < 0 \text{ für } x \in (0, 4) \text{ und } f'(4) = 0$$

verläuft streng monoton steigend für $x \in [4, \infty)$, denn es gilt:

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (4, \infty)$$

f_2 : verläuft streng monoton fallend für $x \in (-\infty, -3)$ und

$x \in (-3, \infty)$, denn es gilt:

$$f'(x) < 0 \text{ für } x \in (-\infty, -3) \text{ und } x \in (-3, \infty)$$

Das Monotonieverhalten in den Begleitbeispielen (2)

Das Monotonieverhalten der Funktionen f_3 und f_4 auf Folie 86 ergibt sich zu:

f_3 : verläuft streng monoton steigend, denn es gilt:

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (4, \infty)$$

f_4 : verläuft streng monoton steigend für $x \in [-5, 0]$, denn es gilt:

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in [-5, 0) \text{ und } f'(0) = 0$$

verläuft streng monoton fallend für $x \in [0, 5]$, denn es gilt:

$$f'(x) < 0 \text{ für } x \in (0, 5]$$

7) Krümmungsverhalten

Das Krümmungsverhalten einer Funktion f kann über die Veränderung ihrer Steigung, d.h. über ihre zweite Ableitung f'' , ermittelt werden.

Es sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

- a) Gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) konvex.
- b) Gilt $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) konkav.
- c) Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) streng konvex.
- d) Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, ist f in (a, b) streng konkav.

Das Krümmungsverhalten in den Begleitbeispielen (1)

Das Krümmungsverhalten der Funktionen f_1 und f_2 auf Folie 86 ergibt sich zu:

f_1 : verläuft streng konkav für $x \in (-\infty, 2]$, denn es gilt:

$$f''(x) < 0 \text{ für } x \in (-\infty, 2) \text{ und } f''(2) = 0$$

verläuft streng konvex für $x \in [2, \infty)$, denn es gilt:

$$f''(x) > 0 \text{ für } x \in (2, \infty)$$

f_2 : verläuft streng konkav für $x \in (-\infty, -3)$, denn es gilt:

$$f''(x) < 0 \text{ für } x \in (-\infty, -3)$$

verläuft streng konvex für $x \in (-3, \infty)$, denn es gilt:

$$f''(x) > 0 \text{ für } x \in (-3, \infty)$$

Das Krümmungsverhalten in den Begleitbeispielen (2)

Das Krümmungsverhalten der Funktionen f_3 und f_4 auf Folie 86 ergibt sich zu:

f_3 : verläuft streng konkav, denn es gilt:
 $f''(x) < 0$ für $x \in (4, \infty)$

f_4 : verläuft streng konkav, denn es gilt:
 $f''(x) < 0$ für $x \in [-5, 5]$

8) Asymptotisches Verhalten

Das asymptotische Verhalten gibt das Verhalten einer Funktion f im Unendlichen an, d.h. mit $x \rightarrow \pm\infty$ (vgl. hierzu auch Folie 51).

Um das asymptotische Verhalten einer Funktion f bestimmen zu können, sind die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

zu bilden, sofern x nicht über den maximalen Definitionsbereich entsprechend eingeschränkt wird.

Das asymptotische Verhalten in den Begleitbeispielen

Das asymptotische Verhalten der Funktionen auf Folie 86 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} f_1 : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2) &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+3} \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x+3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$f_3 : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x-4)) = \infty$$

$$f_4 : \quad \text{ist nur im Intervall } [-5, 5] \text{ definiert}$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Graphische Darstellung

Da mit den Punkten 1) - 8) eine umfassende Kurvendiskussion durchlaufen wird, kann nun in einem letzten Schritt der Funktionsgraph geplottet werden.

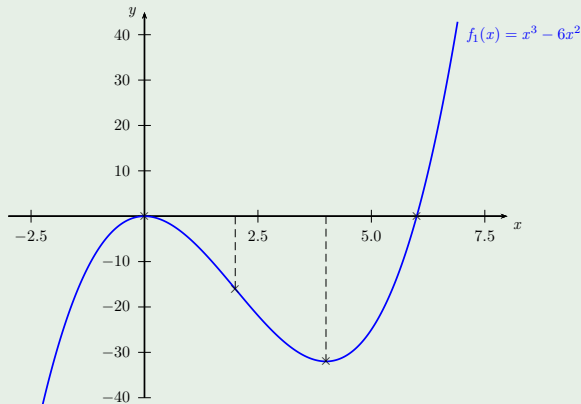
Praktischerweise sind zuerst die Nullstellen, die Extrema und die Wendepunkte als Kreuze im Koordinatensystem abzutragen, bevor die Punkte zu verbinden sind.

Dabei ist insbesondere auch auf Definitionslücken, Polstellen und das asymptotische Verhalten der Funktion zu achten. Im Wendepunkt muss sich zudem klar erkennbar das Krümmungsverhalten ändern.

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

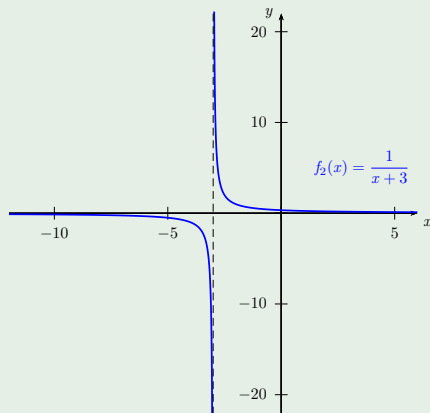
Graphische Darstellung von f_1



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

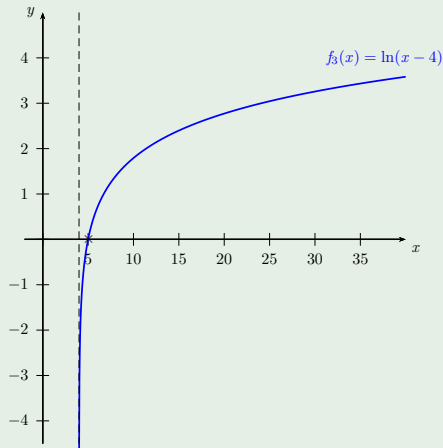
Graphische Darstellung von f_2



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

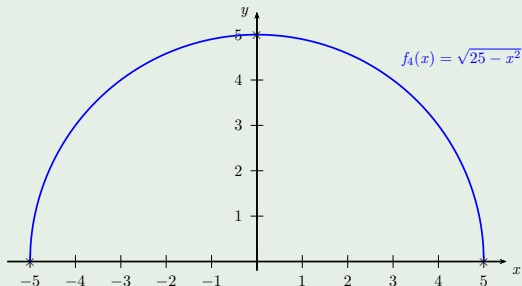
Graphische Darstellung von f_3



4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.5 Kurvendiskussion

Graphische Darstellung von f_4



Kapitel 4.6

Komplexere Anwendungen

Komplexere Anwendungen (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2}{x^3} \cdot \frac{12x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{12}{x} \right) = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2}{2x^5} - \frac{7x+4}{21x^3+12x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{2x^3} - \frac{7x+4}{3x^2 \cdot (7x+4)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{2x^3} - \frac{1}{3x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x^2 + 2x - 3) \cdot (x - 2)}{x^2 + 2x - 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1 \end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (2)

$$\left(\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{-\frac{6}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)' = (x^0)' = 1' = 0$$

$$(\ln(e^{ax}) \cdot \ln(a^x))' = (ax \cdot x \cdot \ln(a))' = (ax^2 \cdot \ln(a))' = 2ax \cdot \ln(a)$$

$$\begin{aligned} ((2x+2) \cdot \ln(2x+2))' &= 2 \cdot \ln(2x+2) + (2x+2) \cdot \frac{1}{2x+2} \cdot 2 \\ &= 2 \cdot \ln(2x+2) + 2 = 2 \cdot (\ln(2x+2) + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a^x} \cdot \ln(x^2)\right)' &= \frac{1}{2} (a^x)^{-\frac{1}{2}} \cdot a^x \cdot \ln(a) \cdot \ln(x^2) + \sqrt{a^x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (a^x)^{\frac{1}{2}} \cdot \ln(a) \cdot \ln(x) + \frac{2}{x} \cdot \sqrt{a^x} \\ &= \sqrt{a^x} \cdot \ln(a) \cdot \ln(x) + \frac{2}{x} \cdot \sqrt{a^x} \\ &= \sqrt{a^x} \cdot \left(\ln(a) \cdot \ln(x) + \frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (3)

$$(x^2 \cdot \sqrt{x})' = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad (\text{vgl. hierzu auch Folie 70})$$

$$((ea)^x)' = (ea)^x \cdot \ln(ea) = (ea)^x \cdot (\ln(e) + \ln(a)) = (ea)^x \cdot (1 + \ln(a))$$

$$\left(\frac{x^2}{\sin(4x)}\right)' = \frac{2x \cdot \sin(4x) - x^2 \cdot \cos(4x) \cdot 4}{(\sin(4x))^2} = \frac{2x}{\sin(4x)} - \frac{4x^2 \cdot \cos(4x)}{(\sin(4x))^2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x \cdot \sin(x)}{\ln(2x+6)}\right)' &= \frac{(e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x)) \cdot \ln(2x+6) - e^x \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{2x+6} \cdot 2}{(\ln(2x+6))^2} \\ &= \frac{e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x)}{\ln(2x+6)} - \frac{e^x \cdot \sin(x) \cdot \frac{1}{x+3}}{(\ln(2x+6))^2} \\ &= e^x \cdot \left(\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\ln(2x+6)} - \frac{\sin(x)}{(x+3) \cdot (\ln(2x+6))^2} \right)\end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (4)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x \cdot e^x$$

Für diese Funktion soll im Folgenden eine umfassende Kurvendiskussion samt anschließender graphischer Darstellung durchgeführt werden.

1) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2) Nullstellen: Die Nullstellen von f ergeben sich zu:

$$x \cdot e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad (e^x \text{ wird nie Null})$$

Damit besitzt f eine Nullstelle, die bei $x = 0$ liegt.

3) Stetigkeitsverhalten: Die Funktion f ist über ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Komplexere Anwendungen (5)

4) **Extrempunkte:** Die erste und zweite Ableitung von f lauten:

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$$

$$f''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = (2 + x) \cdot e^x$$

Die stationäre Stelle von f ergibt sich über $f'(x) = 0$ zu:

$$(1 + x) \cdot e^x = 0$$

$$1 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Wegen

$$f''(-1) \approx 0,3679 > 0$$

handelt es sich bei $x = -1$ um eine Minimalstelle. Der Tiefpunkt liegt aufgrund von $f(-1) \approx -0,3679$ bei $(-1; -0,3679)$.

Komplexere Anwendungen (6)

5) Wendepunkte: Die dritte Ableitung von f lautet:

$$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + x \cdot e^x = (3 + x) \cdot e^x$$

Die stationäre Stelle von f' ergibt sich über $f''(x) = 0$ zu:

$$\begin{aligned}(2 + x) \cdot e^x &= 0 \\ 2 + x &= 0 \quad \Rightarrow x = -2\end{aligned}$$

Wegen

$$f'''(-2) \approx 0,1353 > 0$$

handelt es sich bei $x = -2$ um eine Konkav-Konvex-Wendestelle. Der Wendepunkt liegt aufgrund von $f(-2) \approx -0,2707$ bei $(-2; -0,2707)$.

Komplexere Anwendungen (7)

6) Monotonieverhalten:

Für $x \in (-\infty, -1]$ verläuft f streng monoton fallend.

Für $x \in [-1, \infty)$ verläuft f streng monoton steigend.

7) Krümmungsverhalten:

Für $x \in (-\infty, -2]$ verläuft f streng konkav.

Für $x \in [-2, \infty)$ verläuft f streng konvex.

8) Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot e^x) = \infty$$

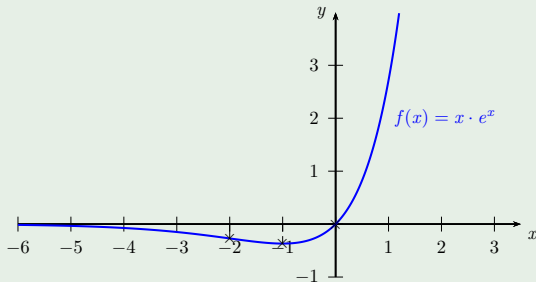
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = 0$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.6 Komplexere Anwendungen

Komplexere Anwendungen (8)

Graphische Darstellung:



Kapitel 4.7

Übungsaufgaben

- 26) Stellen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine geeignete Wertetabelle auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

$$f_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = 6x^2 - x$$

$$f_3(x) = x^5$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4x}$$

$$f_5(x) = \sqrt{x}$$

$$f_6(x) = x^e$$

$$f_7(x) = 2^x$$

$$f_8(x) = \ln(x)$$

4 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

4.7 Übungsaufgaben

- 27) Rechnen Sie das gegebene Maß in das jeweilige andere Maß um.
- a) $\alpha = 90^\circ$
 - b) $\alpha = 120^\circ$
 - c) $x = \frac{\pi}{6}$
 - d) $x = 2\pi$
- 28) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Funktion mit den folgenden Eigenschaften.
- a) monoton wachsend, (streng) konkav, unbeschränkt
 - b) nicht monoton, teils streng konvex, teils streng konkav, unbeschränkt, zwei Extrema, ein Wendepunkt
 - c) monoton fallend, erst streng konvex, dann streng konkav, punktsymmetrisch, unbeschränkt, keine Extrema, ein Terrassenpunkt
 - d) gleichzeitig monoton wachsend und fallend, gleichzeitig konvex und konkav, achsensymmetrisch

29) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{x-2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 - x + 4}{x^4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10x^3}{x^4} \cdot \frac{2x}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} \right)$$

- 30) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \leq 1 \\ ax^2 + \frac{1}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

eine an der Stelle $x = 1$ stetige Funktion darstellt.

- 31) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{für } x \leq -1 \\ -x^2 - 4x - 1 & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ x^3 - 3bx + c & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Parameter a , b und c so, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion darstellt.

- 32) Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 13x^4 + 5x^2 - 3$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - 14x^3 + \ln(x^2)$$

$$f_3(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x}$$

$$f_4(x) = (3 - 2 \ln x)^4$$

$$f_5(x) = \ln(x^2 + \sin(2x))$$

$$f_6(x) = \frac{\sqrt{20x}}{e^x}$$

$$f_7(x) = 7^x \cdot \ln(7^x)$$

$$f_8(x) = \log_4(x) \cdot \ln(4)$$

$$f_9(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

- 33) Berechnen Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 6x^3 + 2x^2 - 4x - 7$$

$$f_2(x) = \sin(x)$$

$$f_3(x) = e^{x^3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{16x}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

- 34) Führen Sie an den folgenden Funktionen jeweils eine umfassende Kurvendiskussion durch, die alle acht in Kapitel 4.5 erläuterten Punkte abhandelt. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktionen.

$$f_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f_2(x) = x \cdot \ln(x)$$