

Kapitel 5

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

Lernzielangaben Kapitel 5

- Das Berechnen unbestimmter, bestimmter und uneigentlicher Integrale gehört zum Handwerkszeug.
- Das 4-Schritte-Schema zur Flächenberechnung kann problemlos angewendet werden.
- Auch die komplexen Integrationsregeln der partiellen Integration und der Integration durch Substitution werden beherrscht.

Kapitel 5.1

Unbestimmte Integrale

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Der Begriff der Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion einer stetigen Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Der Übergang einer Funktion $f(x)$ zu ihrer Stammfunktion $F(x)$ wird als *Integrieren* bezeichnet. Damit bildet das Integrieren die Umkehroperation zum Differenzieren.

Stammfunktionen sind jedoch nicht eindeutig:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, ist auch $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Demnach unterscheiden sich zwei Stammfunktionen lediglich über ihre additive *Integrationskonstante* c , die beim Differenzieren gerade wegfallen würde.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Während $F(x)$ eine spezielle Stammfunktion von $f(x)$ darstellt, repräsentiert $F(x) + c$ die *Schar aller Stammfunktionen* von $f(x)$.

Diese Schar aller Stammfunktionen repräsentiert das *unbestimmte Integral* von $f(x)$:

Der Ausdruck

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ wird als unbestimmtes Integral von f bezeichnet. Dabei ist f der *Integrand* und x die *Integrationsvariable*.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Stammfunktionen der Grundintegrale

Für einige Grundfunktionen lassen sich die unbestimmten Integrale leicht berechnen. Diese Integrale werden als *Grundintegrale* bezeichnet und basieren auf den folgenden speziellen Stammfunktionen $F(x)$:

$f(x)$	$F(x)$	Bemerkung
a	ax	a ist eine Konstante
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$a > 0, a \neq 1; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
e^x	e^x	
e^{ax}	$\frac{1}{a} \cdot e^{ax}$	$a \neq 0$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	$a > 0, a \neq 1$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Beispiele zu den Grundintegralen

Für $a = 4$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int 4 \, dx = 4x + c$$

$$\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$\int \frac{1}{\ln(4) \cdot x} \, dx = \log_4 |x| + c$$

$$\int e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} \cdot e^{4x} + c$$

$$\int 4^x \, dx = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4^x + c$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Integrationsregeln auf einen Blick

Gegeben seien zwei integrierbare Funktionen f und g sowie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Integrationsregeln:

Faktorregel:

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

Summenregel:

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

Produktintegrationsregel (vgl. Abschnitt 5):

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

Substitutionsregel (vgl. Abschnitt 5):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(y) \, dy$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Faktorregel

Gegeben sei eine integrierbare Funktion f und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Das unbestimmte Integral von $c \cdot f$ ergibt sich dann über die Faktorregel zu:

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

$$\int 4 \, dx = 4 \cdot \int x^0 \, dx = 4 \cdot \frac{1}{1} x^1 + c = 4x + c$$

$$\int -e^x \, dx = -1 \cdot \int e^x \, dx = -e^x + c$$

$$\int -7x^2 \, dx = -7 \cdot \int x^2 \, dx = -7 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + c = -\frac{7}{3}x^3 + c$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \cdot x^{-\frac{1}{2} + 1} + c = \sqrt{x} + c$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.1 Unbestimmte Integrale

Summenregel

Gegeben seien zwei integrierbare Funktionen f und g . Das unbestimmte Integral von $f \pm g$ ergibt sich dann über die Summenregel zu:

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\int (x^3 - 7x^2) \, dx = \int x^3 \, dx - \int 7x^2 \, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + c$$

$$\begin{aligned} \int (-4x^3 + 3x^2 - 2x) \, dx &= \int -4x^3 \, dx + \int (3x^2 - 2x) \, dx \\ &= -x^4 + x^3 - x^2 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \left(-e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \, dx &= \int -e^x \, dx - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \\ &= -e^x - \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

Kapitel 5.2

Bestimmte Integrale

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Ursprung bestimmter Integrale

Das *bestimmte Integral* hat seinen Ursprung in der Berechnung von Flächeninhalten.

Die Idee hierbei ist es, den gesuchten Flächeninhalt zwischen einer stetigen Funktion $f(x)$ und der x -Achse innerhalb eines bestimmten Integrationsintervalls über Rechtecksflächen beliebig genau anzunähern.

Als *Integrationsintervall* bezeichnet man dabei die Differenz zwischen der *oberen Integrationsgrenze* b und der *unteren Integrationsgrenze* a .

Ein bestimmtes Integral ist generell von der folgenden Form:

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Stammfunktion und bestimmtes Integral

Die Berechnung bestimmter Integrale kann über den folgenden Zusammenhang einfach auf die Berechnung von Stammfunktionen zurückgeführt werden:

Für jede beliebige Stammfunktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von f gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Damit ist ein bestimmtes Integral stets eine reelle Zahl.

$$\int_2^4 x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_2^4 = \frac{1}{4} \cdot 4^4 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 = \frac{256}{4} - \frac{16}{4} = 64 - 4 = 60$$

$$\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \left[\sqrt{x} \right]_4^9 = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Der Verbleib der Integrationskonstante

Die vorangegangenen Beispiele „unterschlagen“ bei Angabe der Stammfunktion die Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$. Die Richtigkeit dieses Vorgehens soll kurz an einem Beispiel erläutert werden:

$$\begin{aligned}\int_2^4 x^3 dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + c \right]_2^4 \\&= \frac{1}{4} \cdot 4^4 + c - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + c \right) \\&= \frac{256}{4} + c - \frac{16}{4} - c \\&= 64 - 4 \\&= 60\end{aligned}$$

Da die Integrationskonstante also einmal positiv und einmal negativ eingeht, kann sie bei der Berechnung bestimmter Integrale direkt außen vor gelassen bzw. Null gesetzt werden.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Vertauschen der Integrationsgrenzen

Die Integrationsgrenzen a und b können unter Verwendung der folgenden Regel vertauscht werden:

Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = [\sqrt{x}]_4^9 = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

$$- \int_9^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = - [\sqrt{x}]_9^4 = - (\sqrt{4} - \sqrt{9}) = -(2 - 3) = -(-1) = 1$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Bestimmte Integrale über Betragsfunktionen

Ist ein bestimmtes Integral über eine Betragsfunktion $f(x)$ zu bilden, sind die Nullstellen von $f(x)$ zu ermitteln und das Integral an den Nullstellen zu splitten. So wird erreicht, dass sämtliche Funktionsteile im nicht-negativen Bereich verlaufen.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x| \, dx &= \int_{-1}^0 -x \, dx + \int_0^1 x \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(0 - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) \right) + \frac{1}{2} - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Damit gestaltet sich der Umgang mit Betragsfunktionen analog zur Berechnung von Flächeninhalten (vgl. hierzu Abschnitt 3).

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Ausführlichere Beispiele (1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^{3x} - \ln(3) \cdot 3^x) \, dx &= \int_0^1 e^{3x} \, dx - \ln(3) \cdot \int_0^1 3^x \, dx \\&= \left[\frac{1}{3} \cdot e^{3x} \right]_0^1 - \ln(3) \cdot \left[\frac{1}{\ln(3)} \cdot 3^x \right]_0^1 \\&= \frac{1}{3} \cdot (e^3 - 1) - \frac{\ln(3)}{\ln(3)} \cdot (3 - 1) \\&\approx 4,362\end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Ausführlichere Beispiele (2)

$$\begin{aligned}\int_1^3 \left(\sqrt{2x} + \cos(2x) \right) dx &= \int_1^3 \sqrt{2x} dx + \int_1^3 \cos(2x) dx \\&= \left[\frac{1}{3} \cdot (2x)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 + \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_1^3 \\&= \frac{1}{3} \cdot 6^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \sin(6) - \frac{1}{2} \sin(2) \\&\approx 4,899 - 0,943 + 0,052 - 0,017 \\&= 3,991\end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Ausführlichere Beispiele (3)

$$\begin{aligned}\int_{-3}^1 |x+2| \, dx &= \int_{-3}^{-2} -(x+2) \, dx + \int_{-2}^1 (x+2) \, dx \\&= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\&= -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) \right) \\&\quad + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right) \\&= -2 + 4 - \left(-\frac{9}{2} + 6 \right) + \frac{1}{2} + 2 - (2 - 4) \\&= 5\end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.2 Bestimmte Integrale

Ausführlichere Beispiele (4)

Zu bestimmen seien alle $a \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\int_1^2 \frac{a}{x} \cdot e^{a \cdot \ln(x)} dx = 3 \quad (1)$$

Berechnen des bestimmten Integrals auf der linken Seite von (1) ergibt:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{a}{x} \cdot e^{a \cdot \ln(x)} dx &= \int_1^2 \frac{a}{x} \cdot x^a dx = a \int_1^2 x^{a-1} dx \\ &= [x^a]_1^2 = 2^a - 1^a = 2^a - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Gleichsetzen von (2) mit der rechten Seite von (1) führt zu:

$$2^a - 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \ln(2) = \ln(4) \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Kapitel 5.3

Berechnung von Flächeninhalten

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Berechnung von Flächen anhand bestimmter Integrale

Obwohl die Grundidee zur Betrachtung bestimmter Integrale auf einer Flächenberechnung basiert, sind bestimmte Integrale in der Regel nicht mit Flächeninhalten gleichzusetzen:

Bestimmte Integrale der Form

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

sind nur dann gleichbedeutend mit dem Flächeninhalt zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x -Achse innerhalb der Integrationsgrenzen a und b , wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

$$\int_0^6 x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^6 = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 18$$

$$\int_{-2}^2 3x^2 \, dx = \left[x^3 \right]_{-2}^2 = 2^3 - (-2)^3 = 8 - (-8) = 16$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Flächeninhalte bei nicht-positiven Funktionswerten

Flächenberechnungen sind auch bei negativen Funktionswerten unproblematisch, solange die Funktionswerte im Integrationsintervall nie positiv sind:

Bestimmte Integrale der Form

$$-\int_a^b f(x) \, dx$$

sind nur dann gleichbedeutend mit dem Flächeninhalt zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x -Achse innerhalb der Integrationsgrenzen a und b , wenn $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

$$\begin{aligned} -\int_0^6 -x \, dx &= -\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = -\left(-\frac{1}{2} \cdot 6^2 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)\right) = 18 \\ -\int_{-2}^2 -3x^2 \, dx &= -\left[-x^3\right]_{-2}^2 = -\left(-2^3 - \left(-(-2)^3\right)\right) = 16 \end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Generelle Problematik einer Flächenberechnung

Soll jedoch der Flächeninhalt zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x -Achse in einem Bereich ermittelt werden, in dem die Funktionswerte teils positiv und teils negativ werden, gibt das bestimmte Integral nicht den gesuchten Flächeninhalt wieder.

Der Grund ist darin zu sehen, dass sich Flächen in Bereichen positiver und negativer Funktionswerte gegenseitig (über-)kompensieren.

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 \right) = \frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0$$

Hierbei tritt der Fall ein, dass die eingerechneten Flächen in den Bereichen positiver und negativer Funktionswerte genau gleich groß sind und sich daher gegenseitig zu Null kompensieren.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Vier Schritte einer Flächenberechnung

Soll der Flächeninhalt zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x -Achse innerhalb eines Integrationsintervalls $[a, b]$ ermittelt werden, in dem die Funktion teils positive und teils negative Werte annimmt, ist das folgende 4-Schritte-Schema zur Bestimmung des Flächeninhaltes zugrunde zu legen:

1. Berechnen der Nullstellen von $f(x)$
2. Splitten des Integrals in Teil-Integrale nicht-negativer und negativer Funktionswerte
3. Versehen derjenigen Teil-Integrale, in denen die Funktionswerte negativ sind, mit einem negativen Vorzeichen
4. Berechnen der Teil-Integrale und Zusammenführen der Ergebnisse zum gesuchten Flächeninhalt

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Anwendungsbeispiel des 4-Schritte-Schemas (1)

Berechnen des bestimmten Integrals über die Sinusfunktion im Integrationsintervall $[0, 2\pi]$ liefert:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx = 0$$

Da der Flächeninhalt zwischen der Sinusfunktion und der x -Achse im Intervall $[0, 2\pi]$ nicht Null ist, wird nun das Schema durchlaufen.

1. Die Nullstellen der Sinusfunktion im Intervall $[0, 2\pi]$ lauten:

$$x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$$

2. Da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, \pi]$ und $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [\pi, 2\pi]$ gilt, ist folgende Splittung des Integrals in Teil-Integrale vorzunehmen:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \, dx$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Anwendungsbeispiel des 4-Schritte-Schemas (2)

3. Aufgrund von $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [\pi, 2\pi]$ ist das Teil-Integral über dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ mit einem negativen Vorzeichen zu versehen.

4. Berechnen der Teil-Integrale und Zusammenführen der Ergebnisse zum gesuchten Flächeninhalt ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \, dx \\ &= [-\cos(x)]_0^{\pi} - [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) - (-\cos(2\pi) - (-\cos(\pi))) \\ &= -(-1) - (-1) - (-1 - (-(-1))) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt zu 4.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Zwei alternative Wege im Anwendungsbeispiel (1)

Alternative 1: (anstelle von Schritt 3.) Versehen aller Teil-Integrale mit einem Betrag:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \, dx \right| \\ &= \left| [-\cos(x)]_0^{\pi} \right| + \left| [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} \right| \\ &= \left| -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \right| + \left| (-\cos(2\pi) - (-\cos(\pi))) \right| \\ &= \left| -(-1) - (-1) \right| + \left| (-1 - (-(-1))) \right| \\ &= |1 + 1| + |-1 - 1| = 4 \end{aligned}$$

Alternative 1 bietet den Vorteil, dass nicht bekannt sein muss, ob im betreffenden Teil-Intervall $f(x) \leq 0$ oder $f(x) \geq 0$ gilt. Es kann einfach über jedes zu berechnende Teil-Integral ein Betrag gelegt werden. So ist sichergestellt, dass jedes Flächenstück mit einem positiven Vorzeichen eingeht.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Zwei alternative Wege im Anwendungsbeispiel (2)

Alternative 2: Da die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft, genügt es bspw. das bestimmte Integral im Integrationsintervall $[0, \pi]$ zu berechnen und den Flächeninhalt mit „2“ zu multiplizieren:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \, dx \\ &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx \\ &= 2 \cdot [-\cos(x)]_0^{\pi} \\ &= 2 \cdot (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) \\ &= 2 \cdot (-(-1) - (-1)) \\ &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

Alternative 2 bietet den Vorteil, dass aufgrund von Symmetrieüberlegungen deutlich an Rechenaufwand eingespart werden kann.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Flächeninhalte zwischen den Graphen zweier Funktionen (1)

Manchmal ist nicht der Flächeninhalt zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x -Achse, sondern der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ von Interesse.

Flächeninhalte dieser Art lassen sich einfach als Differenz zweier bestimmter Integrale bestimmen. Die Integrationsgrenzen a und b sind dabei die x -Koordinaten der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$. Damit der Flächeninhalt zudem stets nicht-negativ ist, wird der resultierende Wert als absolut angesehen.

Der Flächeninhalt zwischen zwei beliebigen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ergibt sich über

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \right|,$$

wobei die Integrationsgrenzen a und b mit $a \leq b$ den x -Werten der Schnittpunktkoordinaten von $f(x)$ und $g(x)$ entsprechen.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Flächeninhalte zwischen den Graphen zweier Funktionen (2)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{und} \quad g(x) = -x^2 + 4x + 2.$$

Bestimmen der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$ ergibt:

$$x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x \cdot (x - 3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

Damit ergeben sich die Integrationsgrenzen zu $a = 0$ und $b = 3$.

Berechnen des Flächeninhaltes zwischen $f(x)$ und $g(x)$ führt zu:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) \, dx \right| &= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 0 \right| \\ &= |18 - 27| = |-9| = 9 \end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.3 Berechnung von Flächeninhalten

Flächeninhalte zwischen den Graphen zweier Funktionen (3)

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 3x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Bestimmen der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$ ergibt:

$$x^2 + 3x = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}x \cdot (x + 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -6$$

Damit ergeben sich die Integrationsgrenzen zu $a = -6$ und $b = 0$.

Berechnen des Flächeninhaltes zwischen $f(x)$ und $g(x)$ führt zu:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-6}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx \right| &= \left| \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-6}^0 \right| \\ &= \left| 0 - \left(\frac{1}{6} \cdot (-6)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-6)^2 \right) \right| = |-18| = 18 \end{aligned}$$

Kapitel 5.4

Uneigentliche Integrale

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.4 Uneigentliche Integrale

Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen

Weisen Integrale unendliche Integrationsgrenzen a oder/und b auf, spricht man von *uneigentlichen Integralen*.

Uneigentliche Integrale sind generell von der folgenden Form:

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^{\infty} f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

Ein uneigentliches Integral existiert, wenn der entsprechende Grenzwert existiert:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.4 Uneigentliche Integrale

Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsgrenzen

Uneigentliche Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsgrenzen lassen sich auf uneigentliche Integrale mit einseitig unendlichen Integrationsgrenzen zurückführen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{\infty} f(x) \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) \, dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_{-b}^a f(x) \, dx + \int_a^b f(x) \, dx \right)\end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale werden als *konvergent* bezeichnet, wenn der korrespondierende Grenzwert existiert. Andernfalls sind sie *divergent*.

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.4 Uneigentliche Integrale

Anwendungsbeispiele

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} - (-e^0)) = e^0 = 1 \quad (\text{konvergent})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 dx &= \int_{-\infty}^0 3x^2 dx + \int_0^{\infty} 3x^2 dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_{-b}^0 3x^2 dx + \int_0^b 3x^2 dx \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left([x^3]_{-b}^0 + [x^3]_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(0 - (-b)^3 + b^3 - 0 \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (2b^3) \rightarrow \infty \quad (\text{divergent})\end{aligned}$$

Kapitel 5.5

Produktintegrations- und Substitutionsregel

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.5 Produktintegrations- und Substitutionsregel

Produktintegrationsregel

Die Produktintegrationsregel kann als Umkehrung der Produktregel in der Differentialrechnung angesehen werden und wird oft auch als *Partielle Integration* bezeichnet.

Gegeben seien zwei integrierbare Funktionen f und g . Das unbestimmte Integral von $f \cdot g'$ ergibt sich dann über die Produktintegrationsregel zu:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

Analog gilt die Produktintegrationsregel für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.5 Produktintegrations- und Substitutionsregel

Anwendungen der Produktintegrationsregel (1)

Gegeben sei das folgende unbestimmte Integral:

$$\int x \cdot \ln(x) \, dx$$

Unter Verwendung von

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad g'(x) = x \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

erhält man mittels Produktintegration:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x) \, dx &= \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x) \cdot x^2 - \frac{1}{2} \int x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln(x) \cdot x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) + c \end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.5 Produktintegrations- und Substitutionsregel

Anwendungen der Produktintegrationsregel (2)

Gegeben sei das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^1 x \cdot \cos(x) \, dx$$

Unter Verwendung von

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1 \quad g'(x) = \cos(x) \quad g(x) = \sin(x)$$

erhält man mittels Produktintegration:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \cos(x) \, dx &= [x \cdot \sin(x)]_0^1 - \int_0^1 \sin(x) \, dx \\ &= \sin(1) - [-\cos(x)]_0^1 \\ &= \sin(1) - (-\cos(1) - (-\cos(0))) \\ &\approx 0,84 - (-0,54 - (-1)) \\ &= 0,84 + 0,54 - 1 = 0,38 \end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.5 Produktintegrations- und Substitutionsregel

Substitutionsregel

Die Substitutionsregel kann als Umkehrung der Kettenregel in der Differentialrechnung angesehen werden. Der „Trick“ besteht bei dieser Regel darin, mit Hilfe einer neuen Integrationsvariablen $y := g(x)$ einen Teil des Integranden zu ersetzen/substituieren.

Gegeben sei eine integrierbare Funktion f mit der Stammfunktion F und eine integrierbare Funktion g . Das unbestimmte Integral von $f \circ g \cdot g'$ ergibt sich dann über die Substitutionsregel zu:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + c = \int f(y) \, dy$$

Analog gilt die Substitutionsregel für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = [F(g(x))]_a^b = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.5 Produktintegrations- und Substitutionsregel

Anwendungen der Substitutionsregel (1)

Gegeben sei das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^3}{3x^4 - 2} dx$$

Unter Verwendung der neuen Integrationsvariablen $u = 3x^4 - 2$ und

$$\frac{du}{dx} = 12x^3 \quad \text{bzw.} \quad dx = \frac{1}{12x^3} du$$

erhält man mittels Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{3x^4 - 2} dx &= \int \frac{x^3}{u} \cdot \frac{1}{12x^3} du \\ &= \frac{1}{12} \cdot \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{12} \cdot \ln |u| + c \\ &= \frac{1}{12} \cdot \ln |3x^4 - 2| + c \end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.5 Produktintegrations- und Substitutionsregel

Anwendungen der Substitutionsregel (2)

Gegeben sei das folgende bestimmte Integral:

$$\int_1^2 \frac{\ln^2(x) - 1}{x} dx$$

Unter Verwendung der neuen Integrationsvariablen $u = \ln(x)$ und

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad dx = x du$$

erhält man mittels Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln^2(x) - 1}{x} dx &= \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{u^2 - 1}{x} \cdot x du = \int_0^{\ln(2)} (u^2 - 1) du \\ &= \left[\frac{1}{3} u^3 - u \right]_0^{\ln(2)} = \left[\frac{1}{3} \cdot \ln^3(x) - \ln(x) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \ln^3(2) - \ln(2) - \left(\frac{1}{3} \cdot \ln^3(1) - \ln(1) \right) \approx -0,582 \end{aligned}$$

Kapitel 5.6

Komplexere Anwendungen

Komplexere Anwendungen (1)

1) Gegeben sei das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \sin^3(x) \cdot \cos^3(x) \, dx$$

Unter Verwendung der neuen Integrationsvariablen $u = \sin(x)$ und

$$\frac{du}{dx} = \cos(x) \quad \text{bzw.} \quad dx = \frac{1}{\cos(x)} \, du$$

erhält man mittels Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \cdot \cos^3(x) \, dx &= \int u^3 \cdot \cos^3(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \, du \\ &= \int u^3 \cdot \cos^2(x) \, du \end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (2)

Aufgrund des Zusammenhanges

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x) \cdot \cos^3(x) \, dx &= \int u^3 \cdot (1 - u^2) \, du \\ &= \int (u^3 - u^5) \, du \\ &= \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6 + c \\ &= \frac{1}{4}\sin^4(x) - \frac{1}{6}\sin^6(x) + c\end{aligned}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.6 Komplexere Anwendungen

Komplexere Anwendungen (3)

2) Gegeben sei das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Unter Verwendung der neuen Integrationsvariablen $u = \ln(x)$ und

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad dx = x du$$

erhält man mittels Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \int \frac{u}{x} \cdot x du \\ &= \int u du = \frac{1}{2}u^2 + c \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln^2(x) + c \end{aligned}$$

Komplexere Anwendungen (4)

3) Gegeben sei das folgende unbestimmte Integral:

$$\int 2x^3 \cdot e^{x^2} dx$$

Unter Verwendung der neuen Integrationsvariablen $u = x^2$ und

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{bzw.} \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

erhält man mittels Substitutionsregel:

$$\int 2x^3 \cdot e^{x^2} dx = 2 \cdot \int x^3 \cdot e^u \cdot \frac{1}{2x} du = \int u \cdot e^u du$$

Komplexere Anwendungen (5)

Unter Verwendung von

$$f(u) = u \quad f'(u) = 1 \quad g'(u) = e^u \quad g(u) = e^u$$

erhält man mittels Produktintegration:

$$\begin{aligned} \int u \cdot e^u \, du &= u \cdot e^u - \int e^u \, du \\ &= u \cdot e^u - e^u + c \\ &= e^{x^2} \cdot (x^2 - 1) + c \end{aligned}$$

Kapitel 5.7

Übungsaufgaben

35) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$\int (6x^2 - 4x + 3) \, dx$$

$$\int -\sin(x) \, dx$$

$$\int 10u^{-1} \, du$$

$$\int e^{2z} \, dz$$

$$\int (\ln(5) \cdot x)^{-1} \, dx$$

$$\int \ln(3) \cdot 3^x \, dx$$

$$\int \sqrt{t} \, dt$$

36) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) \, dx$$

$$\int_4^4 \sqrt[7]{7x} \, dx$$

$$\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2} \, dx$$

$$\int_0^4 f(x) \, dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{für } x < 2 \\ 4x-2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

5 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

5.7 Übungsaufgaben

- 37) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 4$$

und der x -Achse innerhalb des Integrationsintervalls $[0, 1]$.

- 38) Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Funktionen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

eingeschlossen wird.

39) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(|x| + 4)^2} dx$$

40) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int_0^1 2x \cdot e^x \, dx$$

$$\int \frac{1}{4} x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{12} x^3\right) \, dx$$

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} \, dx$$

$$\int (1 + x^2) \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}} \, dx$$