Kapitel 6
Wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen

Lernzielangaben Kapitel 6

- Erkennen der Relevanz behandelter Konzepte für wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen.
- Übertragung theoretischer Zusammenhänge auf inhaltliche Relevanz.

Kapitel 6.1
Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

Umsatz, Kosten, Gewinn (1)

Gegeben seien die folgende Umsatzfunktion $U(x)$ und Kostenfunktion $K(x)$ in Abhängigkeit der abgesetzten Menge x eines Produktes:

$$U(x) = -0{,}2x^2 + 40x$$
$$K(x) = 0{,}4x^2 + 10x + 130$$

Dann ist die Gewinnfunktion $G(x)$ gegeben über:

$$\begin{aligned} G(x) = U(x) - K(x) &= -0{,}2x^2 + 40x - \left(0{,}4x^2 + 10x + 130\right) \\ &= -0{,}6x^2 + 30x - 130 \end{aligned}$$

Werden also beispielsweise $x = 30$ Einheiten abgesetzt, gilt $U(30) = 1020$, $K(30) = 790$ und $G(30) = 230$.

Umsatz, Kosten, Gewinn (2)

Ist nun von Interesse, wie sich diese Größen approximativ ändern, wenn eine Einheit mehr abgesetzt werden würde, können die jeweils ersten Ableitungen, d.h. die Grenzumsatz-, Grenzkosten- und Grenzgewinnfunktion, herangezogen werden:

$$U'(x) = -0{,}4x + 40$$
$$K'(x) = 0{,}8x + 10$$
$$G'(x) = -1{,}2x + 30$$

Wird demnach die abgesetzte Menge von $x = 30$ auf $x = 31$ erhöht, ergeben sich approximativ die Änderungen $U'(30) = 28$, $K'(30) = 34$ und $G'(30) = -6$, d.h. der Gewinn fällt um 6.

Exakt ergibt sich die Verringerung im Gewinn übrigens zu:

$$G(30) - G(31) = 230 - 223{,}4 = 6{,}6$$

Kapitel 6.2
Ökonomisches Prinzip

Das ökonomische Prinzip
Das wichtigste Anwendungsgebiet mathematischer Modelle und Methoden in den Wirtschaftswissenschaften ist das Lösen von Optimierungsproblemen, da das *ökonomische Prinzip* seine mathematische Umsetzung in Optimierungsproblemen findet.

Das ökonomische Prinzip beschreibt die fundamentale Annahme, dass ein rational handelnder und nutzenorientierter Wirtschaftsakteur (sog. *Homo oeconomicus*) stets Aufwand und Nutzen zueinander ins Verhältnis setzt und entsprechend seiner persönlichen Präferenzen und Ziele vernünftig handelt.

Maximalprinzip und Minimalprinzip

Das ökonomische Prinzip tritt im Wesentlichen in den beiden Ausprägungen *Maximalprinzip* und *Minimalprinzip* auf:

	Maximalprinzip	**Minimalprinzip**
Ziel	Maximierung des Outputs bei gegebenem Input	Minimierung des Inputs bei gegebenem Output
Mathematische Formulierung	Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen	Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen

Anwendungsgebiete in den Wirtschaftswissenschaften (1)
Optimierungsprobleme treten in den verschiedensten wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen auf, insbesondere in den Bereichen

- Bank- und Finanzwirtschaft
- Mikro- und Makroökonomie
- Produktionsplanung
- Statistik/Ökonometrie

Anwendungsgebiete in den Wirtschaftswissenschaften (2)

Unter *Optimierung* versteht man allgemein, dass eine Zielfunktion bzgl. bestimmter Input-Größen minimiert oder maximiert wird.

Typische Beispiele sind die Maximierung des Gewinns/Umsatzes oder die Minimierung der Kosten als Funktion von Input-Größen wie z.B. Rohstoff-, Personal- und Maschineneinsatz.

Ein anderes Anwendungsgebiet sind statistische und ökonometrische Anwendungen, bei denen verschiedene Modellparameter so geschätzt werden, dass die Datenbeziehungen optimal dargestellt werden.

Kapitel 6.3
Optimierung in $\mathbb{R}$

Kostenminimierung (1)

Gegeben sei die folgende Gesamtkostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 18x$$

Interessiert man sich nun für diejenige Produktionsmenge x, die zu einer Minimierung der Stückkosten führt, ist die Stückkostenfunktion

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 6x + 18$$

zu minimieren.

Kostenminimierung (2)

Nullsetzen der ersten Ableitungsfunktion

$$k'(x) = 2x - 6 \stackrel{!}{=} 0$$

führt zur stationären Stelle $x = 3$, die aufgrund von $k'' = 2 > 0$ der gesuchten (globalen) Minimalstelle entspricht. Die minimalen Stückkosten ergeben sich also zu

$$k(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 18 = 9.$$

Kostenminimierung (3)

Ist weiter von Interesse, an welcher Stelle sich die Grenz- und Durchschnittskosten treffen, sind die Grenzkosten

$$K'(x) = 3x^2 - 12x + 18$$

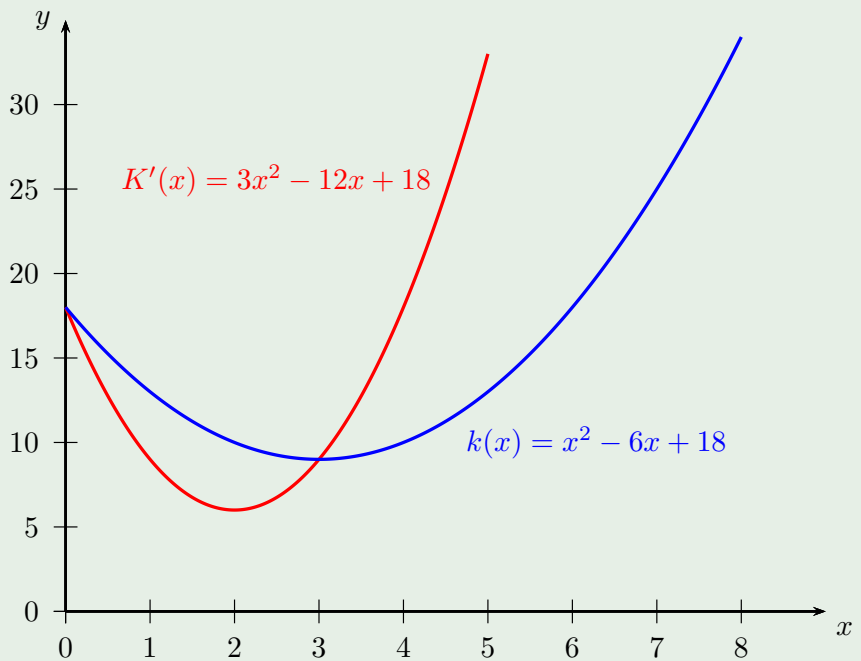
den Durchschnittskosten gleichzusetzen:

$$3x^2 - 12x + 18 = x^2 - 6x + 18$$

Nach kurzer Umformung folgt $2x \cdot (x - 3) = 0$, weshalb sich die Funktionen in $x = 0$ (Startpunkt) und $x = 3$ treffen.

Kostenminimierung (4)

Die Grenzkosten schneiden die Durchschnittskosten demnach in deren Minimum: Aufgrund dessen, dass die Stückkosten im Minimum $k(3) = 9$ betragen, sollte also ein Stückpreis von mindestens $p = 9$ angesetzt werden, um keinen Verlust einzufahren. Die folgende Graphik illustriert diesen Zusammenhang:



Gewinnmaximierung (1)

Gegeben seien die folgende Kosten- und Preis-Absatz-Funktion:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + x + 200$$
$$p(x) = 25 - 0{,}15x$$

Dann ist die Gewinnfunktion $G(x)$ gegeben über:

$$\begin{aligned} G(x) = U(x) - K(x) &= p(x) \cdot x - K(x) \\ &= (25 - 0{,}15x) \cdot x - \left(0{,}1x^2 + x + 200\right) \\ &= 25x - 0{,}15x^2 - 0{,}1x^2 - x - 200 \\ &= -0{,}25x^2 + 24x - 200 \end{aligned}$$

Gewinnmaximierung (2)

Die Produktionsmenge x, die den Gewinn maximiert, kann wie folgt bestimmt werden. Hierzu werden die beiden ersten Ableitungen von G berechnet:

$$G'(x) = -0{,}5x + 24 \qquad\qquad G''(x) = -0{,}5$$

Nullsetzen von $G'(x)$ führt zur stationären Stelle

$$x = 48,$$

die wegen $G'' < 0$ der gesuchten globalen Maximalstelle entspricht.

Gewinnmaximierung (3)

Ist nun von Interesse, bei welcher Menge x Grenzkosten und Grenzumsatz übereinstimmen, kann auf zwei Wegen vorgegangen werden.

Alternative 1: Für die Grenzkosten und den Grenzumsatz gilt:

$$K'(x) = 0{,}2x + 1$$
$$U'(x) = 25 - 0{,}3x$$

Gleichsetzen von $K'(x)$ und $U'(x)$ liefert $0{,}5x = 24$ und damit $x = 48$.

Alternative 2: Da die Bedingungen $G'(x) = 0$ und $K'(x) = U'(x)$ äquivalent zueinander sind, ist die gesuchte Menge ebenfalls die Maximalstelle $x = 48$ der Gewinnfunktion.

Kapitel 6.4
Integralrechnung in $\mathbb{R}$

Bestimmung der Kostenfunktion (1)

Aus der Grenzkostenfunktion $K' : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eines Produktes (d.h. $K'(x)$ gibt die Kosten an, die durch die Produktion einer zusätzlichen Einheit des Produktes entstehen) kann durch Integration die zugehörige Kostenfunktion $K(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$ ermittelt werden:

$$\int_0^x K'(t)\, dt = K(x) - K(0) \quad \text{bzw.} \quad K(x) = \int_0^x K'(t)\, dt + K(0)$$

Dabei gibt $K(0) \geq 0$ die *Fixkosten* an (d.h. den Teil der Gesamtkosten, der unabhängig von der Produktionsmenge x anfällt), und $\int_0^x K'(t)\, dt$ umfasst die *variablen Kosten* (d.h. den Teil der Gesamtkosten, der von der Produktionsmenge x abhängig ist).

Bestimmung der Kostenfunktion (2)

Ist die Grenzkostenfunktion bspw. durch $K'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ gegeben, und gilt für die Fixkosten $K(0) = \frac{3}{2}$, dann folgt für $K(x)$:

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^x K'(t)\, dt + K(0) \\
&= \int_0^x \left(\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 1\right)\, dt + K(0) \\
&= \int_0^x \left(t^2 - 3t + \frac{9}{4} + 1\right)\, dt + K(0) \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{13}{4}t\right]_0^x + \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{4}x + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

für alle $x \geq 0$.

Kapitel 6.5
Übungsaufgaben

41) Gegeben sei die folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = 2x^3 - 32x^2 + 5x$$

a) Bestimmen Sie die Produktionsmenge x, die zu einer Minimierung der Stückkosten führt.
b) Bestimmen Sie die Produktionsmenge x, bei der Grenz- und Durchschnittskosten übereinstimmen.

42) Gegeben sei die folgende Produktionsfunktion:

$$f : (0, 40) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + 18x^2 + 24x$$

a) Bestimmen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Grenzertrag maximal ist.
b) Bestimmen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Durchschnittsertrag maximal ist.
c) Untersuchen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Grenz- und Durchschnittsertrag übereinstimmen.