Lösungen zu den Übungsaufgaben des Brückenkurses zur Mathematik und Statistik

Kapitel 2

1

a) $M_1 = [1, 3]$

b) $M_2 = \{x|x \in \mathbb{N}_0\}$

c) $M_3 = \{x|x \in \mathbb{Z}\}$

d) $M_4 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

e) $M_5 = \{3, 4\}$

f) $M_6 = \{\}$

g) $M_7 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2

	2	$\sqrt{3}$	$\frac{15}{3}$	-7	$4,\overline{6}$	$4i$	$\sqrt{256}$	$0,6$	0
$\mathbb{N}$	x		x				x		
$\mathbb{Z}$	x		x	x			x		x
$\mathbb{Q}$	x		x	x	x		x	x	x
$\mathbb{I}$		x							
$\mathbb{R}$	x	x	x	x	x		x	x	x
$\mathbb{C}$	x	x	x	x	x	x	x	x	x

3

a) $A \cap D = \emptyset$

b) $B \cup C = \{b, c, d, e, f, g, h\}$

c) $A \setminus D = A$

d) $(B \cup D) \setminus C = \{b, c, d, f, h, j\} \setminus C = \{b, c, d, h, j\}$

e) $(C \cap A) \cup B = \{e, g\} \cup B = \{b, c, d, e, f, g, h\}$

f) $(C \cup A) \cap B = \{a, c, e, f, g, i\} \cap B = \{c, f\}$

4

a) $A = \{a\} \quad B = \{b, c\} \quad C = \{e\} \quad D = \{c, d\} \quad \Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

b) $A = \{a\} \quad B = \{b, c\} \quad C = \{e\} \quad D = \{c, d, e\} \quad \Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

c) klar :)

d) zu a) disjunkt
zu b) echte Teilmenge

5

a) $(4 + 2) \cdot (3 + 6) = 12 + 24 + 6 + 12 = 54$

b) $(12 - 3) \cdot (7 - 1) \cdot 5 = (84 - 12 - 21 + 3) \cdot 5 = 420 - 60 - 105 + 15 = 270$

c) $(7 - 3 + 10) \cdot (14 + 3) \cdot (4 - 2) = (98 + 21 - 42 - 9 + 140 + 30) \cdot (4 - 2) =$
$392 - 196 + 84 - 42 - 168 + 84 - 36 + 18 + 560 - 280 + 120 - 60 = 476$

d) $(2x + 3y) \cdot (7x + y) = 14x^2 + 2xy + 21yx + 3y^2 = 14x^2 + 23xy + 3y^2$

6

a) $36 + 72 + 144 + 288 = 36 \cdot (1 + 2 + 4 + 8)$

b) $21 + 9 + 315 - 42 = 3 \cdot (7 + 3 + 105 - 14)$

c) $-13 - 156 + 273 = -13 \cdot (1 + 12 - 21)$

7

a) $4 + 6 - \dfrac{30}{6} + (4 - 14) = 10 - 5 - 10 = -5$

b) $(4 - 3) \cdot (-(-1)) \cdot 10 = 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10$

c) $7 + 4 \cdot (3 - 2 \cdot 11) = 7 + 4 \cdot (-19) = -69$

8

a) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

b) $196x^2 + 28xy + y^2$

c) $64x^2 - 9y^2$

d) $729x^3 + 972x^2y + 432xy^2 + 64y^3$

e) $8a^3 - 96a^2b + 384ab^2 - 512b^3$

f) $((8x - 3y)(3y + 8x))^2 = (64x^2 - 9y^2)^2 = 4096x^4 - 1152x^2y^2 + 81y^4$

9

a) $(x + 3)(x - 9)$

b) $(x - 12)^2$

c) $(x + 1)(x - 1)$

d) $(x + 5)(x - 4)$

e) $(x - 1)(x - 8)$

f) $(x + 7)^2$

g) $(x + 6)(x + 7)$

10

a)
$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad -x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\;\; x^2 \;\; - x} \\
\qquad\qquad\qquad -6x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\; 6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12\big) : \big(x - 3\big) = 3x^2 - x + 4 \\
\underline{-3x^3 \;\; + 9x^2} \\
\qquad\qquad -x^2 + 7x \\
\qquad\qquad \underline{\;\; x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4x - 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4x + 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

11

a) $\frac{10}{5} - \frac{7}{7} = 1$

b) $\frac{7}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$

c) $\dfrac{40}{9} - 2 + \dfrac{15}{27} - \dfrac{24}{8} = \dfrac{40}{9} - 2 + \dfrac{5}{9} - 3 = \dfrac{45}{9} - 5 = 0$

d) $\dfrac{44}{91} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{58}{91} = \dfrac{33}{91} + \dfrac{58}{91} = 1$

12

a) $\dfrac{a}{a+b} - 1 = \dfrac{a}{a+b} - \dfrac{a+b}{a+b} = \dfrac{a-(a+b)}{a+b} = -\dfrac{b}{a+b}$

b) $$\frac{x+a}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a+b} + \frac{x-a}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a-b} - \frac{2a \cdot (x-b)}{a^2-b^2}$$
$$= \frac{xa + xb + a^2 + ab + xa - xb - a^2 + ab - (2ax - 2ab)}{a^2-b^2} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

c) $\dfrac{v}{1-\frac{1}{v}} \cdot \dfrac{v}{v} - \dfrac{1}{v-1} = \dfrac{v^2-1}{v-1} = \dfrac{(v+1)(v-1)}{v-1} = v+1$

d) $\dfrac{\frac{b}{b} + \frac{a}{b}}{\frac{a}{a} + \frac{b}{a}} = \dfrac{b+a}{b} \cdot \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{b}$

13

a) $7^8 = 5764801$

b) $\left(\left(\dfrac{8}{2}\right)^3\right)^2 = 4^6 = 4096$

c) $-\dfrac{1}{12^3} = -\dfrac{1}{1728}$

d) $9^{\frac{1}{12}} \approx 1,20094$

e) $6^{\frac{3}{7}} \approx 2,15523$

f) $\sqrt{\dfrac{4}{16}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

14

a) $\sqrt[3]{x^2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b^2}}$

d) $x^{\frac{3}{7}}$

e) $(2a)^{\frac{3}{4}}$

f) $x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

15

a) $\log_6 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 6} \approx 0,89824$

b) $\log_3(4 \cdot 8) = \dfrac{\ln 32}{\ln 3} \approx 3,15465$

c) $\log_2\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{\ln 2} \approx -0,32193$

d) $6 \cdot \log_7 3 = 6 \cdot \dfrac{\ln 3}{\ln 7} \approx 3,38745$

16

a) $|-8| = 8$

b) $4\sum_{i=5}^{7}(i^3 - i) = 4 \cdot (5^3 - 5 + 6^3 - 6 + 7^3 - 7) = 4 \cdot 666 = 2664$

c) $11^{5-1+1}\prod_{i=1}^{5} i^2 = 11^5 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 2319134400$

d) $(2 + 6 \cdot 2^2)(3 + 6 \cdot 3^2)(4 + 6 \cdot 4^2) = 26 \cdot 57 \cdot 100 = 148200$

e) $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) - (3 \cdot 2 \cdot 1) = 114$

17

a) $6x^2y^2 = 6(xy)^2$

b) $\dfrac{16^3(ab)^3}{4^3(ab)^3} = \left(\dfrac{16}{4}\right)^3 = 4^3 = 64$

c) $9x^2y^4 - 30xy^{b+4} + 25y^{2b+4}$

d) $$\begin{array}{rl}
\big(-2x^4 + ax^3 + \left(4+3a^2\right)x^2 - ax - 2\big) : \left(x^2+ax-1\right) = -2x^2+3ax+2 \\
\underline{2x^4 + 2ax^3 \qquad\qquad - 2x^2} \\
3ax^3 + \left(2+3a^2\right)x^2 - ax \\
\underline{-3ax^3 \qquad - 3a^2x^2 + 3ax} \\
2x^2 + 2ax - 2 \\
\underline{-2x^2 - 2ax + 2} \\
0
\end{array}$$

e) $\dfrac{32}{24}+\dfrac{30}{24}+\dfrac{14}{24}+\dfrac{3}{24}+\dfrac{20}{24}+\dfrac{4}{18}+\dfrac{5}{18}+\dfrac{11}{24}-\dfrac{2}{24}=\dfrac{108}{24}+\dfrac{9}{18}=4,5+0,5=5$

f) $a^{\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{8}}\cdot a^{\frac{19}{24}}=a^{\frac{56+12+24+18+15+19}{24}}=a^6$

g) $\dfrac{3\cdot 3\cdot(x+x+x)}{3^{3-1+1}\cdot x\cdot x\cdot x}=\dfrac{27x}{27x^3}=\dfrac{1}{x^2}$

Kapitel 3

18

a) $11x = 11$
$x = 1$

b) $3x = -12$
$x = -4$

c) $4x - 2 = 4x - 2$
$x = x \qquad \mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R}\}$

d) $-7 - 4x - 3x - 2 = 10x - 4x - 13x - 10$
$-9 = -10 \qquad \mathbb{L} = \{\}$

19

a) Es gilt: $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$

Zerlegen in Linearfaktoren

$(x + 3)(x - 4)$

Quadratische Ergänzung

$$\left(x + \frac{-1}{2}\right)^2 = -(-12) + \left(\frac{-1}{2}\right)^2$$
$$x = \sqrt{12 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$
$$x_{1,2} = \pm 3,5 + \frac{1}{2}$$

p-*q*-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-12)} = \frac{1}{2} \pm 3,5$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \pm 3,5$$

b) Es gilt: $x_1 = -3$ und $x_2 = -8$

Zerlegen in Linearfaktoren

$(x+3)(x+8)$

Quadratische Ergänzung

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 = -24+\left(\frac{11}{2}\right)^2$$
$$x=\sqrt{-24+30,25}-5,5$$
$$x_{1,2}=\pm 2,5-5,5$$

p-q-Formel

$$x_{1,2}=-\frac{11}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2-24}=-5,5\pm 2,5$$

Mitternachtsformel

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1}=-5,5\pm 2,5$$

20

Disk$= b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot\frac{5}{4}=-4<0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4}}{2}\cdot i=-\frac{1}{2}\pm i$$

21

a) $7x^3-7x=7x\cdot(x^2-1)=7x\cdot(x+1)(x-1)=0 \qquad \Rightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm 1$

b) $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3=0 \qquad \Rightarrow x_{1,2,3}=-2$

c) $x^3+3x^2-3x-14=(x-2)(x^2+5x+7)=0$
$\Rightarrow x_1=2$
$x^2+5x+7=0$
$x_{2,3}=-2,5\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=-2,5\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}i$

22

a) $(2x+8)\cdot(4x-2)=(7x+4)\cdot(2x-4)$
$8x^2-4x+32x-16=14x^2-28x+8x-16$

$6x^2 - 48x = 0$
$x^2 - 8x = x \cdot (x-8) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 8$

b) $\sqrt{7x+1} = 8$
$7x + 1 = 64$
$x = 9$

c) $5^x \cdot 25^{2x-1} = 5^x \cdot 5^{4x-2} = 625$
$5^{5x-2} = 625$
$5x - 2 = \dfrac{\ln 625}{\ln 5}$
$x = 1,2$

d) $\ln x = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$
$x = \dfrac{4}{3}$

23

a)
$$\begin{array}{rcl} 15x & < & -10 \\ x & < & -\frac{2}{3} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcl} -16x & \leq & -2 \\ x & \geq & \frac{1}{8} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcccl} & & x^2 & \leq & 4 \\ -2 & \leq & x & \leq & 2 \end{array}$$

24

$$8x + 4y = 2 \tag{1}$$
$$12x - 2y = 7 \tag{2}$$

Einsetzungsverfahren

Aus (2) folgt:

$$6x - 3,5 = y \tag{3}$$

Einsetzen in (1) ergibt:

$$\begin{aligned} 8x + 4 \cdot (6x - 3,5) &= 2 \\ 32x - 14 &= 2 \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in (3) folgt: $x = 0,5 \qquad y = -0,5$

Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{aligned} 8x + 4y - 2 &= 12x - 2y - 7 \\ -4x + 6y + 5 &= 0 \\ 4x &= 6y + 5 \\ x &= \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Einsetzen in (1) ergibt:

$$\begin{aligned} 8 \cdot \left(\frac{3}{2}y + \frac{5}{4}\right) + 4y &= 2 \\ 12y + 10 + 4y &= 2 \\ 16y &= -8 \end{aligned}$$

Somit folgt: $x = 0,5 \qquad y = -0,5$

Additionsverfahren

Addition von $\frac{1}{2}\cdot(1)+(2)$ führt zu:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 4x & + & 2y & = & 1 \\ + & 12x & - & 2y & = & 7 \\ \hline & 16x & & & = & 8 \end{array}$$

Somit folgt: $x = 0,5 \qquad y = -0,5$

25

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 && (1) \\ 3x - 2y + 2z &= 5 && (2) \\ -3x + 3y + 5z &= 18 && (3) \end{aligned}$$

Aus (1) folgt:

$$x + z - 2 = y \qquad (4)$$

Einsetzen in (2) ergibt:

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot (x + z - 2) + 2z &= 5 \\ x + 4 &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Einsetzen in (4) ergibt:

$$1 + z - 2 = y \qquad \Rightarrow y = z - 1 \tag{5}$$

Einsetzen in (3) ergibt:

$$\begin{aligned} -3 + 3 \cdot (z - 1) + 5z &= 18 \\ 8z &= 24 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in (5) folgt: $x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$

Kapitel 4

26

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
$f_1(x) = 4x$	-12	-8	-4	-2	0	2	4	8	12
$f_2(x) = 6x^2 - x$	57	26	7	2	0	1	5	22	51
$f_3(x) = x^5$	-243	-32	-1	$-0{,}031$	0	$0{,}031$	1	32	243
$f_4(x) = \frac{1}{4x}$	$-0{,}083$	$-0{,}125$	$-0{,}25$	$-0{,}5$		$0{,}5$	$0{,}25$	$0{,}125$	$0{,}083$
$f_5(x) = \sqrt{x}$					0	$0{,}707$	1	$1{,}414$	$1{,}732$
$f_6(x) = x^e$					0	$0{,}152$	1	$6{,}581$	$19{,}813$
$f_7(x) = 2^x$	$0{,}125$	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}707$	1	$1{,}414$	2	4	8
$f_8(x) = \ln(x)$						$-0{,}693$	0	$0{,}693$	$1{,}099$

Die Graphen zu den Funktionen f_1 bis f_8 finden sich auf S. 21/22.

27

a) $x = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi = \dfrac{1}{2}\pi$

b) $x = \dfrac{2}{3}\pi$

c) $\alpha = \dfrac{x}{2\pi} \cdot 360° = 30°$

d) $\alpha = 360°$

28

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = x^3 - x^2$

c) $f(x) = -x^3$

d) $f(x) = 5$

Die Graphen zu diesen Funktionen finden sich auf S. 23.

29

a) $\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{x-2}}\right)=3$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1^x}{2^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2^x}\right)=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+x^3-x+4}{x^4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^4}\right)=2$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3x}+\frac{8}{3x^2}+\frac{26}{9x^3}\right)\right)=-\infty$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{10x^3}{x^4}\cdot\frac{2x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{20}{x^3}\right)$

Divergent, da $\lim_{x\uparrow 0}\left(\frac{20}{x^3}\right)=-\infty$ bzw. $\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{20}{x^3}\right)=\infty$

f) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+2x-15}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x+5)(x-3)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}(x+5)=8$

30

Die Funktion ist genau dann stetig an der Stelle x, wenn der linksseitige Grenzwert dem rechtsseitigen Grenzwert entspricht.

$$\lim_{x\uparrow 1}(f(x))=1$$
$$\lim_{x\downarrow 1}(f(x))=a+\frac{1}{3}$$
$$1=a+\frac{1}{3}$$

Für $a=\frac{2}{3}$ ist die Funktion stetig, insbesondere an der Stelle $x=1$.

31

Es gilt:

$$\lim_{x\uparrow -1}\left(x^2-a\right)=1-a$$
$$\lim_{x\downarrow -1}\left(-x^2-4x-1\right)=2$$
$$\lim_{x\uparrow 1}\left(-x^2-4x-1\right)=-6$$
$$\lim_{x\downarrow 1}\left(x^3-3bx+c\right)=1-3b+c$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 - a &= 2 \Rightarrow a = -1 \\ -6 &= 1 - 3b + c \Rightarrow c = 3b - 7 \end{aligned} \tag{6}$$

Für den rechts- und linksseitigen Grenzwert von f' an der Stelle $x = -1$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow -1} (2x) = \lim_{x \downarrow -1} (-2x - 4) = -2$$

Für die rechts- und linksseitige Ableitung von f an der Stelle $x = 1$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} (-2x - 4) = -6$$
$$\lim_{x \downarrow 1} \left(3x^2 - 3b\right) = 3 - 3b$$

Daraus folgt:

$$-6 = 3 - 3b \Rightarrow b = 3$$

Einsetzen von $b = 3$ in (6) liefert $c = 2$.

Damit ist f für $a = -1$, $b = 3$ und $c = 2$ stetig und differenzierbar.

32

a) $f_1'(x) = 52x^3 + 10x$

b) $f_2'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 42x^2 + \dfrac{2}{x}$

c) $f_3'(x) = -\dfrac{4}{x^2} \cdot e^{5x} + 5 \cdot \dfrac{4}{x} \cdot e^{5x} = \dfrac{4}{x} \cdot e^{5x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x} + 5\right)$

d) $f_4'(x) = 4 \cdot (3 - 2\ln(x))^3 \cdot \left(-\dfrac{2}{x}\right) = -\dfrac{8 \cdot (3 - 2\ln(x))^3}{x}$

e) $f_5'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \sin(2x)} \cdot (2x + 2\cos(2x))$

f) $f_6'(x) = \dfrac{1}{2}(20x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 20 \cdot e^{-x} + \sqrt{20x} \cdot (-e^{-x}) = \dfrac{10}{\sqrt{20x} \cdot e^x} - \dfrac{\sqrt{20x}}{e^x}$

g) $f_7'(x) = 7^x \cdot \ln(7) \cdot \ln(7) \cdot x + 7^x \cdot \ln(7) = 7^x \cdot \ln(7) \cdot (\ln(7) \cdot x + 1)$

h) $f_8(x) = \log_4(x) \cdot \ln(4) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(4)} \cdot \ln(4)$

$f_8'(x) = \dfrac{1}{x}$

i) $f_9'(x) = \dfrac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

33

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
$6x^3+2x^2-4x-7$	$18x^2+4x-4$	$36x+4$	36
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^{x^3}	$3x^2\cdot e^{x^3}$	$e^{x^3}\cdot(9x^4+6x)$	$e^{x^3}\cdot(27x^6+54x^3+6)$
$\sqrt{16x}=4\sqrt{x}$	$\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	$\dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$
$\dfrac{\ln(x)}{e^x}$	$e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{x}-\ln(x)\right)$	$e^{-x}\cdot\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln(x)\right)$	$e^{-x}\cdot\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\ln(x)\right)$

34

$f_1(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$

1) Definitionsbereich: $D_1=\mathbb{R}$

2) Nullstellen: $x(x^2-\frac{3}{2}x-6)$

$x_1=0 \qquad x_2=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{105}{16}}\approx 3,3117 \qquad x_3=\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{105}{16}}\approx -1,8117$

3) Stetigkeit: Ja, da Polynome stets stetig sind.

4) Extrema:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 3x^2-3x-6 &&= 3(x+1)(x-2)\\ f_1''(x) &= 6x-3 &&= 6(x-\tfrac{1}{2})\\ f_1'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Bestimme jene x, für die gilt $f_1'(x)=0 \Rightarrow x=-1 \vee x=2$
Prüfe mit Hilfe von $f''(x)$, welche der stationären Stellen ein Extremum ist und von welcher Art diese sind:

$$f''(-1)=-9<0 \Rightarrow \text{Maximum}$$
$$f''(2)=9>0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Somit liegt der Hochpunkt bei $(-1;3,5)$ und der Tiefpunkt bei $(2;-10)$.

5) Wendepunkte: Bestimme jene x, für die gilt $f_1''(x)=0 \Rightarrow x=0,5$
Einsetzen in $f_1'''(x)$ liefert:

$$f_1'''(0,5)=6>0 \Rightarrow \text{Konkav-Konvex-Wendepunkt}$$

Somit liegt ein Konkav-Konvex-Wendepunkt bei $(0,5;-3,25)$

6) Monotonieverhalten:
Für $x\in(-\infty;-1]$ verläuft f wegen $f'(x)>0$ streng monoton steigend.
Für $x\in[-1;2]$ verläuft f wegen $f'(x)<0$ streng monoton fallend.
Für $x\in[2;\infty)$ verläuft f wegen $f'(x)>0$ streng monoton steigend.

7) Krümmungsverhalten:
Für $x \in (-\infty; 0,5]$ verläuft f wegen $f''(x) < 0$ streng konkav.
Für $x \in [0,5; \infty)$ verläuft f wegen $f''(x) > 0$ streng konvex.

8) Asymptotisches Verhalten:
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)) = -\infty$

$f_2(x) = x \cdot \ln(x)$

1) Definitionsbereich: $D_2 = \{x | x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

2) Nullstellen: $x = 1$

3) Stetigkeit: Die Funktion f_2 ist stetig.

4) Extrema:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \ln(x) + 1 \\ f_2''(x) &= \frac{1}{x} \\ f_2'''(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Bestimme jene x, für die gilt $f_2'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$
Prüfe mit Hilfe von $f''(x)$, ob die stationäre Stelle ein Extremum ist und von welcher Art dieses ist:

$$f''(e^{-1}) = e > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Somit liegt ein Tiefpunkt bei $(e^{-1}; -e^{-1})$.

5) Wendepunkte: $f_2''(x) = 0$ ist für kein $x \in \mathrm{D}_2$ erfüllt, somit besitzt $f_2(x)$ keinen Wendepunkt.

6) Monotonieverhalten:
Für $x \in (0; e^{-1}]$ verläuft f wegen $f'(x) < 0$ streng monoton fallend.
Für $x \in [e^{-1}; \infty)$ verläuft f wegen $f'(x) > 0$ streng monoton steigend.

7) Krümmungsverhalten:
Für $x \in (0; \infty)$ verläuft f wegen $f''(x) > 0$ streng konvex.

8) Asymptotisches Verhalten:
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)) = \infty$

Die Graphen zu den Funktionen f_1 und f_2 finden sich auf S. 24.

Kapitel 5

35

a) $2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

b) $\cos(x) + c$

c) $10 \ln |u| + c$

d) $\frac{1}{2}e^{2z} + c$

e) $\log_5 |x| + c$

f) $3^x + c$

g) $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$

36

a) $\Big[\ln(x)\Big]_1^3 = \ln(3)$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$

c) $\left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$

d) $\displaystyle\int_4^4 \sqrt[7]{7x}\,dx = 0$

e) $\left[-\frac{2}{x+1}\right]_2^3 = \frac{1}{6}$

f) $\left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 + \Big[2x^2 - 2x\Big]_2^4 = 22$

37

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 4 = 4(x - 0,5)(x + 2)$$

$$\left|\left[\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 4x\right]_0^{0,5}\right| + \left|\left[\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 4x\right]_{0,5}^{1}\right| = 2,5$$

38

Gleichsetzen, um Schnittstellen zu bestimmen und anschließendes Berechnen der Fläche ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 &= \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0\end{aligned}$$

$$\left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3\right| = \frac{4}{3}$$

39

a) $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a\right) = 1$

b) $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^a\right) = 2$

c)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(|x|+4)^2}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{0}\frac{2}{(4-x)^2}\,dx + \lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{2}{(4+x)^2}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{2}{4-x}\right]_{-a}^{0} + \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{2}{4+x}\right]_{0}^{a} \\ &= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4+a}\right) + \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{2}{4+a} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 - 0 + \frac{1}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

40

a) Unter Verwendung von

$$f(x) = 2x \qquad f'(x) = 2 \qquad g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$$

erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x \cdot e^x \, dx &= \Big[2x \cdot e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^x \, dx \\ &= 2e - \Big[2e^x\Big]_0^1 \\ &= 2e - 2e + 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

b) Unter Verwendung von $z = \frac{1}{12}x^3$ und

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{4}x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad dx = \frac{4dz}{x^2}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4}x^2 \cdot e^{\frac{1}{12}x^3} \, dx &= \int \frac{1}{4}x^2 \cdot e^z \cdot \frac{4}{x^2} \, dz \\ &= \int e^z \, dz \\ &= e^{\frac{1}{12}x^3} + c\end{aligned}$$

c) Unter Verwendung von $z = 2x - 4$ und

$$\frac{dz}{dx} = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad dx = \frac{dz}{2}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} \, dx &= \int_{-2}^0 4e^{-z} \cdot \frac{1}{2} \, dz \\ &= 2 \int_{-2}^0 e^{-z} \, dz \\ &= -2 \cdot \left[e^{-z}\right]_{-2}^0 \\ &= -2 \cdot \left(e^0 - e^2\right) \\ &\approx 12,778\end{aligned}$$

d) Unter Verwendung von

$$f(x) = 1 + x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad g'(x) = e^{-x} \qquad g(x) = -e^{-x}$$

erhält man:

$$\int (1 + x^2) \cdot e^{-x}\, dx = -(1 + x^2) \cdot e^{-x} - \int 2x \cdot (-e^{-x})\, dx$$

Unter Verwendung von

$$f(x) = 2x \qquad f'(x) = 2 \qquad g'(x) = -e^{-x} \qquad g(x) = e^{-x}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} -(1 + x^2) \cdot e^{-x} - \int 2x \cdot (-e^{-x})\, dx &= -(1 + x^2)e^{-x} - \left(2xe^{-x} - \int 2e^{-x}\, dx\right) \\ &= -(1 + x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \\ &= -e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 3) + c \end{aligned}$$

e) Unter Verwendung von $z = \frac{2}{x}$ und

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad dx = -\frac{x^2}{2} dz$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}}\, dx &= \int_2^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x^2} \cdot e^z \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^2\, dz \\ &= -\frac{1}{2} \int_2^{\frac{2}{3}} e^z\, dz \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left[e^z\right]_2^{\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{2}{3}} - e^2\right) \\ &\approx 2,72066 \end{aligned}$$

Kapitel 6

41

a) Die Durchschnittskosten ergeben sich zu:

$$k(x) = 2x^2 - 32x + 5$$

Für die erste Ableitung folgt dann:

$$k'(x) = 4x - 32$$

Nullsetzen von $k'(x)$ führt direkt zu $x = 8$ (stationäre Stelle von $k(x)$). Aufgrund von $k''(x) = 4 > 0$ handelt es sich bei $x = 8$ um die globale Minimalstelle von $k(x)$, demnach führt die Produktionsmenge $x = 8$ zu einer Minimierung der Stückkosten.

b) Die Grenzkosten ergeben sich zu:

$$K'(x) = 6x^2 - 64x + 5$$

Gleichsetzen von $K'(x)$ und $k(x)$ führt zu $4x(x-8) = 0$ und damit zu $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$. Wie zu erwarten schneiden die Grenzkosten die Durchschnittskosten demnach in deren Minimum.

42

a) Für die ersten drei Ableitungen von f gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{6}{5}x^2 + 36x + 24 \\ f''(x) &= -\frac{12}{5}x + 36 \\ f'''(x) &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

Nullsetzen der zweiten Ableitung von f führt zur stationären Stelle $x = 15$ von f'. Aufgrund von $f'''(x) < 0$ für alle x, handelt es sich hierbei um die globale Maximalstelle von f'.

b) Der Durchschnittsertrag ergibt sich über:

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x} = -\frac{2}{5}x^2 + 18x + 24$$

Die ersten beiden Ableitungen von $\overline{f}(x)$ lauten:

$$\begin{aligned} \overline{f}'(x) &= -\frac{4}{5}x + 18 \\ \overline{f}''(x) &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Nullsetzen der ersten Ableitung von $\overline{f}'$ führt zur stationären Stelle $x = 22,5$ von $\overline{f}$. Aufgrund von $\overline{f}''(x) < 0$ für alle x, handelt es sich hierbei um die globale Maximalstelle von $\overline{f}$.

c) Gleichsetzen von $f'(x)$ und $\overline{f}(x)$

$$-\frac{6}{5}x^2 + 36x + 24 = -\frac{2}{5}x^2 + 18x + 24$$

führt zu $x = 22{,}5$. Für die zweite Lösung $x = 0$ gilt, dass sie nicht in D enthalten und damit nicht zugelassen ist. Damit stimmen Grenz- und Durchschnittsertrag gerade bei der globalen Maximalstelle von $\overline{f}$ überein.

Kapitel 7

43

a) Die Häufigkeitstabelle ergibt sich zu:

k	x_k	n_k	h_k	$\widehat{F}_k$
1	15	1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	16	1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$
3	17	3	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$
4	18	3	$\frac{3}{18}$	$\frac{8}{18}$
5	19	1	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{18}$
6	21	1	$\frac{1}{18}$	$\frac{10}{18}$
7	22	3	$\frac{3}{18}$	$\frac{13}{18}$
8	23	3	$\frac{3}{18}$	$\frac{16}{18}$
9	24	1	$\frac{1}{18}$	$\frac{17}{18}$
10	25	1	$\frac{1}{18}$	1

b) Stabdiagramm & empirische Verteilungsfunktion
Da das Stabdiagramm multimodal ist, existieren mehrere Modi (bei $17, 18, 22, 23$).

c) Es gilt:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{18} \cdot 360 = 20 \\ &= \sqrt{\frac{1}{18} \cdot 7362 - 20^2} = 3 \end{aligned}$$

d) Median: $\overline{x}^{\text{Med}} = \frac{19+21}{2} = 20$
50%-Quantil: $z_{0,5} = x_5 = 19$
Interquartilsabstand: $d_Q = z_{0,75} - z_{0,25} = x_8 - x_3 = 23 - 17 = 6$

e) Es gilt $\overline{x} = \overline{x}^{\text{Med}} = \overline{x}^{\text{Mod}}$ (bzw. entspricht dem AM der Modi), weshalb es sich um eine symmetrische Verteilung handelt.

44

a) Es gilt:

k	x_k	n_k	h_k	$\widehat{F}_k$
1	9	1	0,02	0,02
2	10	3	0,06	0,08
3	11	6	0,12	0,20
4	12	8	0,16	0,36
5	13	10	0,20	0,56
6	14	10	0,20	0,76
7	15	7	0,14	0,90
8	16	4	0,08	0,98
9	17	1	0,02	1,00

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{50} \cdot (1 \cdot 9 + \ldots + 1 \cdot 17) = \frac{1}{50} \cdot 657 = 13{,}14 \\ \overline{x}^{\text{Med}} &= \frac{1}{2} \cdot (x_{[25]} + x_{[26]}) = 13 \\ \overline{x}^{\text{Mod}} &= \{13, 14\}\end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}z_{0{,}25} &= 12 \\ z_{0{,}75} &= 14 \\ d_Q &= 14 - 12 = 2\end{aligned}$$

d) Box-Plot

45

a) Es gilt:

$$s_x^2 = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{57840}{40} = 1446 \quad \text{und} \quad s_x = \sqrt{1446} = 38{,}026$$

$$s_y^2 = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (y_i - \overline{y})^2 = \frac{360}{40} = 9 \quad \text{und} \quad s_y = \sqrt{9} = 3$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}s_{x,y} &= \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{2592}{40} = 64{,}8 \\ r_{x,y} &= \frac{s_{x,y}}{s_x s_y} = 0{,}568\end{aligned}$$

Interpretation der Kovarianz: Es besteht ein gleichgerichteter linearer Zusammenhang zwischen beiden Merkmalen.
Interpretation des Korrelationskoeffizienten: Es besteht ein mittlerer gleichgerichteter linearer Zusammenhang beider Merkmale.

c) Eine sinnvolle Regressionsbeziehung betrachtet die Aufenthaltsdauer im Erlebnisbad in Abhängigkeit vom Alter der Besucher:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

Der KQ-Schätzer des Steigungsparameters b ergibt sich zu:

$$\widehat{b} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} = \frac{64{,}8}{1446} = 0{,}0448$$

Interpretation von $\widehat{b}$: Steigt das Alter um ein Jahr, erhöht sich die Aufenthaltsdauer im Erlebnisbad im Mittel um 0,0448 Stunden.

d) Die Güte des Regressionsmodells kann über das Bestimmtheitsmaß beurteilt werden:

$$R^2 = r_{x,y}^2 = 0{,}568^2 = 0{,}3226$$

32,26% der Streuung der Daten bzgl. der Aufenthaltszeit lassen sich durch die Geradendarstellung erfassen, d.h. die Daten werden nicht sonderlich gut durch die Regressionsgerade erklärt.