

**Brückenkurs zur Mathematik & Statistik
in den Wirtschaftswissenschaften
Übungsaufgaben**

Dozentin
Dipl.-Math. MARIE HIELSCHER

*Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Mathematik
und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften*

Kapitel 2

Essentials

6 Übungsaufgaben

- 1) Geben Sie die folgenden Mengen in einer jeweils anderen Darstellung (Aufzählende Darstellung oder Intervalldarstellung, ggf. beschreibende Darstellung) an. Hierbei gelte $x \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$M_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$M_3 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$M_4 = (6, 13]$$

$$M_5 =]2, 5[$$

$$M_6 = \emptyset$$

$$M_7 =]1, 9]$$

- 2) Ordnen Sie die folgenden Zahlen den Zahlenmengen zu, in denen sie enthalten sind.

$$2 \quad \sqrt{3} \quad \frac{15}{3} \quad -7 \quad 4, \bar{6} \quad 4i \quad \sqrt{256} \quad 0,6 \quad 0$$

3) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{a, c, e, g, i\}$$

$$B = \{b, c, d, f, h\}$$

$$C = \{e, f, g\}$$

$$D = \{b, h, j\}$$

Bestimmen Sie:

a) $A \cap D$

b) $B \cup C$

c) $A \setminus D$

d) $(B \cup D) \setminus C$

e) $(C \cap A) \cup B$

f) $(C \cup A) \cap B$

Fertigen Sie zudem ein geeignetes Venn-Diagramm an, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre Elemente hervorgehen.

4) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A \cap \Omega = \{a\}$$

$$B \cap D = \{c\}$$

$$D \cup C = \{c, d, e\}$$

$$B \setminus D = \{b\}$$

$$\overline{C} = \{a, b, c, d, f\}$$

- a) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d\}$.
- b) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d, e\}$.
- c) Skizzieren Sie zu a) und zu b) jeweils ein geeignetes Venn-Diagramm, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre jeweiligen Elemente hervorgehen.
- d) Wie bezeichnet man die Menge C in Bezug auf die Menge D in Aufgabenteil a) bzw. b)? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

6 Übungsaufgaben

- 5) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und berechnen Sie sie so weit wie möglich.

- a) $(4 + 2) \cdot (3 + 6)$
- b) $(12 - 3) \cdot (7 - 1) \cdot 5$
- c) $(7 - 3 + 10) \cdot (14 + 3) \cdot (4 - 2)$
- d) $(2x + 3y) \cdot (7x + y)$

- 6) Klammern Sie in den folgenden Ausdrücken gemeinsame Faktoren aus.

- a) $36 + 72 + 144 + 288$
- b) $21 + 9 + 315 - 42$
- c) $-13 - 156 + 273$

- 7) Berechnen Sie:

- a) $4 + 2 \cdot 3 - 10 \cdot 3/6 + (4 - (3 + 11))$
- b) $(10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} - 3) \cdot (-(4/2 - 3)) \cdot 10$
- c) $-(-(7 + 4 \cdot (3 - 2 \cdot (4 + 7))))$

6 Übungsaufgaben

8) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der Binomischen Formeln und des Pascalschen Dreiecks aus.

a) $(3a - 5b)^2$

b) $(14x + y)^2$

c) $(8x - 3y) \cdot (3y + 8x)$

d) $(9x + 4y)^3$

e) $(2a - 8b)^3$

f) $(8x - 3y)^2 \cdot (3y + 8x)^2$

9) Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Linearfaktoren.

a) $x^2 - 6x - 27$

b) $x^2 - 24x + 144$

c) $x^2 - 1$

d) $x^2 + x - 20$

e) $x^2 - 9x + 8$

f) $x^2 + 14x + 49$

g) $x^2 + 13x + 42$

6 Übungsaufgaben

10) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$

b) $(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3)$

11) Berechnen Sie:

a)

$$\frac{6}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \right)$$

b)

$$\frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{10}{12}$$

c)

$$4 \cdot \frac{10}{9} - 2 + \frac{15}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{4}$$

d)

$$\frac{11}{13} \cdot \frac{4}{7} : \frac{4}{3} - \left(-\frac{58}{91} \right)$$

12) Fassen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen:

a)

$$\frac{a}{a+b} - 1$$

b)

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} - \frac{2a \cdot (x-b)}{a^2 - b^2}$$

c)

$$\frac{v}{1 - \frac{1}{v}} - \frac{1}{v-1}$$

d)

$$\frac{1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{b}{a}}$$

6 Übungsaufgaben

13) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(7^2)^4$

b) $\left(\frac{8^3}{2^3}\right)^2$

c) -12^{-3}

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}$

e) $\sqrt[7]{6^3}$

f) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}$

14) Schreiben Sie die folgenden Terme in Wurzel- bzw. Potenzform um:

a) $x^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{-\frac{3}{4}}$

c) $(a + b^2)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[7]{x^3}$

e) $(\sqrt[4]{2a})^3$

f) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$

6 Übungsaufgaben

15) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\log_6 5$

b) $\log_3 4 + \log_3 8$

c) $\log_2 4 - \log_2 5$

d) $\log_7 (3^6)$

16) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $|-10 - 13 + 15|$

b) $\sum_{i=5}^7 (4i^3 - 4i)$

c) $\prod_{i=1}^5 11i^2$

d) $\prod_{i=2}^4 (i + 6i^2)$

e) $5! - 3!$

17) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(30x^4y^7) : (5x^2y^5)$

b) $((16ab)^3) : ((4ab)^3)$

c) $(3xy^2 - 5y^{b+2})^2$

d) $(-2x^4 + ax^3 + 3a^2x^2 + 4x^2 - ax - 2) : (x^2 + ax - 1)$

e) $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{12} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{11}{24} - \frac{1}{12}$

f) $\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a} \cdot a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[24]{a^{19}}$

g) $\frac{3 \cdot \sum_{i=1}^3 3x}{\prod_{i=1}^3 3x}$

Kapitel 3

Gleichungen und Ungleichungen

6 Übungsaufgaben

18) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen, sofern möglich.

a) $11x - 7 = 4$

b) $3x + 9 - 2x + 6x = 4x - 7 + 4$

c) $8x - 2 - 2x + x \cdot (3 - 5) = 11x - 3 - 7x + 1$

d) $-(7 + 4x) - (3x + 2) = 2x \cdot (5 - 2) - 13x - 10$

19) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils nach allen vier Verfahren, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

a) $x^2 - x = 12$

b) $x^2 + 11x + 10 = -14$

20) Berechnen Sie die Diskriminante und die Lösungen der folgenden Gleichung.

$$x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$$

6 Übungsaufgaben

21) Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen.

a) $7x^3 - 7x = 0$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x = -8$

c) $x^3 + 3x^2 - 3x = 14$

22) Lösen Sie die folgenden speziellen Gleichungen.

a) $\frac{2x + 8}{2x - 4} = \frac{7x + 4}{4x - 2}$

b) $\sqrt{7x + 1} - 3 = 5$

c) $5^x \cdot 25^{2x-1} = 625$

d) $\ln x = \ln 4 - \ln 3$

23) Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

a) $7x + 14 < 4 - 8x$

b) $-12x - 3 \leq 4x - 5$

c) $-4x^2 \geq -16$

6 Übungsaufgaben

- 24) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach allen drei Ihnen aus der Vorlesung bekannten Verfahren.

$$8x + 4y = 2$$

$$12x - 2y = 7$$

- 25) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$x - y + z = 2$$

$$3x - 2y + 2z = 5$$

$$-3x + 3y + 5z = 18$$

Kapitel 4

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

- 26) Stellen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine geeignete Wertetabelle auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

$$f_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = 6x^2 - x$$

$$f_3(x) = x^5$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4x}$$

$$f_5(x) = \sqrt{x}$$

$$f_6(x) = x^e$$

$$f_7(x) = 2^x$$

$$f_8(x) = \ln(x)$$

27) Rechnen Sie das gegebene Maß in das jeweilige andere Maß um.

a) $\alpha = 90^\circ$

b) $\alpha = 120^\circ$

c) $x = \frac{\pi}{6}$

d) $x = 2\pi$

28) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

a) monoton wachsend, (streng) konkav, unbeschränkt

b) nicht monoton, teils streng konvex, teils streng konkav, unbeschränkt, zwei Extrema, ein Wendepunkt

c) monoton fallend, erst streng konvex, dann streng konkav, punktsymmetrisch, unbeschränkt, keine Extrema, ein Terrassenpunkt

d) gleichzeitig monoton wachsend und fallend, gleichzeitig konvex und konkav, achsensymmetrisch

29) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{x-2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 - x + 4}{x^4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10x^3}{x^4} \cdot \frac{2x}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} \right)$$

- 30) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \leq 1 \\ ax^2 + \frac{1}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

eine an der Stelle $x = 1$ stetige Funktion darstellt.

- 31) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{für } x \leq -1 \\ -x^2 - 4x - 1 & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ x^3 - 3bx + c & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Parameter a , b und c so, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion darstellt.

- 32) Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 13x^4 + 5x^2 - 3$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - 14x^3 + \ln(x^2)$$

$$f_3(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x}$$

$$f_4(x) = (3 - 2 \ln x)^4$$

$$f_5(x) = \ln(x^2 + \sin(2x))$$

$$f_6(x) = \frac{\sqrt{20x}}{e^x}$$

$$f_7(x) = 7^x \cdot \ln(7^x)$$

$$f_8(x) = \log_4(x) \cdot \ln(4)$$

$$f_9(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

- 33) Berechnen Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 6x^3 + 2x^2 - 4x - 7$$

$$f_2(x) = \sin(x)$$

$$f_3(x) = e^{x^3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{16x}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

- 34) Führen Sie an den folgenden Funktionen jeweils eine umfassende Kurvendiskussion durch, die alle acht in Kapitel 4.5 erläuterten Punkte abhandelt. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktionen.

$$f_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f_2(x) = x \cdot \ln(x)$$

Kapitel 5

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

35) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$\int (6x^2 - 4x + 3) \, dx$$

$$\int -\sin(x) \, dx$$

$$\int 10u^{-1} \, du$$

$$\int e^{2z} \, dz$$

$$\int (\ln(5) \cdot x)^{-1} \, dx$$

$$\int \ln(3) \cdot 3^x \, dx$$

$$\int \sqrt{t} \, dt$$

36) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$\int_4^4 \sqrt[7]{7x} \, dx$$

$$\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2} \, dx$$

$$\int_0^4 f(x) \, dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{für } x < 2 \\ 4x-2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

- 37) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 4$$

und der x -Achse innerhalb des Integrationsintervalls $[0, 1]$.

- 38) Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Funktionen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

eingeschlossen wird.

39) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(|x| + 4)^2} dx$$

40) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int_0^1 2x \cdot e^x \, dx$$

$$\int \frac{1}{4} x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{12} x^3\right) \, dx$$

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} \, dx$$

$$\int (1 + x^2) \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}} \, dx$$

Kapitel 6

Wirtschaftswissenschaftliche Anwendungen

41) Gegeben sei die folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = 2x^3 - 32x^2 + 5x$$

- a) Bestimmen Sie die Produktionsmenge x , die zu einer Minimierung der Stückkosten führt.
- b) Bestimmen Sie die Produktionsmenge x , bei der Grenz- und Durchschnittskosten übereinstimmen.

42) Gegeben sei die folgende Produktionsfunktion:

$$f : (0, 40) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + 18x^2 + 24x$$

- a) Bestimmen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Grenzertrag maximal ist.
- b) Bestimmen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Durchschnittsertrag maximal ist.
- c) Untersuchen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Grenz- und Durchschnittsertrag übereinstimmen.

Kapitel 7

Einführung in die beschreibende Statistik

6 Übungsaufgaben

- 43) Für die 18 Arbeitstage des Monats April wurden bei einem Vertreter hinsichtlich des Merkmals „Anzahl der Verkaufsabschlüsse pro Arbeitstag“ die folgenden Werte erhoben:

22 18 22 15 16 23 24 17 19 17 17 18 23 18 22 23 25 21

- a) Stellen Sie für das betrachtete Merkmal eine Häufigkeitstabelle auf, die die absoluten, relativen und kumulierten relativen Häufigkeiten beinhaltet.
- b) Zeichnen Sie ein Stabdiagramm und die empirische Verteilungsfunktion für das betrachtete Merkmal. Was können Sie aus dem Stabdiagramm über den Modus des betrachteten Merkmals folgern?
- c) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung des betrachteten Merkmals.
- d) Bestimmen Sie für das betrachtete Merkmal den Median, das 50%-Quantil und den Interquartilsabstand.
- e) Treffen Sie auf Grundlage eines Vergleiches von arithmetischem Mittel, Median und Modus eine Aussage über die Schiefe der Verteilung des betrachteten Merkmals.

6 Übungsaufgaben

- 44) Ein Zeitschriftenhändler bestellt von einer wöchentlich erscheinenden Zeitschrift jeweils 20 Exemplare pro Ausgabe. Aus seinen Aufzeichnungen ermittelt er die folgende Häufigkeitsverteilung für den wöchentlichen Absatz:

Verkaufte Exemplare	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Absolute Häufigkeit	1	3	6	8	10	10	7	4	1

- Erstellen Sie eine vollständige Häufigkeitstabelle für die wöchentlich verkauften Exemplare.
- Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modus der verkauften Exemplare pro Woche.
- Bestimmen Sie das untere und das obere Quartil sowie den Interquartilsabstand der verkauften Exemplare pro Woche.
- Stellen Sie den gegebenen Datensatz mit Hilfe eines Box-Plots grafisch dar.

6 Übungsaufgaben

- 45) Für $n = 40$ Besucher eines Erlebnisbades wurden die Merkmale „Alter in Jahren“ (X) und „Aufenthaltsdauer im Erlebnisbad in Stunden“ (Y) erhoben. Aus den Daten wurden folgende Summen berechnet:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{40} x_i^2 &= 100840 & \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2 &= 57840 & \sum_{i=1}^{40} y_i^2 &= 1998,4 \\ \sum_{i=1}^{40} (y_i - \bar{y})^2 &= 360 & \sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= 2592\end{aligned}$$

- Berechnen Sie für beide Merkmale die empirische Varianz und die empirische Standardabweichung.
- Berechnen Sie die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten nach BRAVAIS-PEARSON und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
- Stellen Sie eine sinnvolle Regressionsbeziehung zwischen den beiden Merkmalen auf, schätzen Sie den Steigungsparameter unter Verwendung der KQ-Methode und interpretieren Sie diesen.
- Beurteilen Sie die Güte des von Ihnen aufgestellten linearen Regressionsmodells anhand eines geeigneten Kriteriums.