

Übung 5: Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilungen, Modellanpassung und -überprüfung

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer und der Momentenschätzer einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung mit $\lambda > 0$ durch $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{Y}}$ mit $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ gegeben ist.

Aufgabe 2

Von einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable X liegen die Beobachtungen 0,47, 0,49, 0,91, 1,00, 2,47, 5,03 und 16,09 vor. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzungen für das 25%-Quantil $x(0,25)$.

Aufgabe 3

Es sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung eine Mischung ist, die zu 40% aus einer $\text{Exp}(\lambda_1)$ - und zu 60% aus einer $\text{Exp}(\lambda_2)$ -Verteilung besteht. Es sei weiter bekannt, dass $\mathbb{E}[X] = 4$ und $\text{Var}(X) = 22$ gilt. Bestimmen Sie die Momentenschätzer für die Parameter λ_1 und λ_2 .

Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	7	12

- Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion formal an.
- Skizzieren Sie zu den gegebenen Daten einen Boxplot und interpretieren Sie diesen.
- Passen Sie an die gegebenen Daten eine Exponentialverteilung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode an.

Hinweis: Verwenden Sie hierfür das Resultat aus der Übung 5, Aufgabe 1.

- Beurteilen Sie die Güte der angepassten Verteilung mit Hilfe eines Kolmogorov-Smirnov-Tests zu einem Signifikanzniveau von 5%.

Aufgabe 5

Bei der Tarifierung in der Elementarschadenversicherung (d. h. gegen Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen Vulkanausbrüche) wird zwischen Normalschadenereignissen (Schadenhöhe < 50 Mio. €) und Großschadenereignissen (Schadenhöhe ≥ 50 Mio. €) unterschieden. In den Jahren 1986 bis 2005 wurden die folgenden 15 Großschadenereignisse beobachtet (Indexierung der Schadenhöhen auf 2005):

Datum	Schadenhöhe Y in Mio. €
20.06.1986	52,8
18.08.1986	135,2
18.07.1987	55,9
23.08.1987	138,6
26.02.1990	122,9
21.08.1992	55,8
24.09.1993	368,2
08.10.1993	83,8
18.05.1994	78,5
18.02.1999	75,3
12.05.1999	178,3
26.12.1999	182,8
04.07.2000	54,4
13.10.2000	365,3
20.08.2005	1051,1

- Passen Sie an die Großschadendaten Y eine europäische Pareto-Verteilung $\text{Par}^*(\alpha, u)$ mit Threshold $u = 50$ Mio. € an. Verwenden Sie zur Schätzung des Shapeparameters α den modifizierten (erwartungstreuen) ML-Schätzer $\hat{\alpha}_*^{ML}$. Machen Sie hierbei auch eine Angabe über die Genauigkeit von $\hat{\alpha}_*^{ML}$ mittels $V_{\text{ko}}(\hat{\alpha}_*^{ML})$.
- Überprüfen Sie die Anpassungsgüte mittels eines log-log- und QQ-Plots. Benutzen Sie zum Bilden der Plots eine der gängigen Statistiksoftwares (Stata, R, Python).

Aufgabe 6*

Die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(y - \delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Schätzer für δ erwartungstreu und/oder konsistent sind.

- Das arithmetische Mittel:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

- Der Schätzer \hat{Y} mit der Dichtefunktion:

$$f_{\hat{Y}}(y) = \begin{cases} n \exp(-n(y - \delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*Zusatzaufgabe