

Übung 1: Statistische Grundlagen & KLM 1

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Schiefe und Kurtosis folgender Zufallsvariablen:

a) X besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

b) $X \sim \text{Bin}(4; 0,3)$, d.h. X besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{4}{x} 0,3^x 0,7^{4-x} & \text{für } x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aufgabe 2

Eine faire Münze wird 1000 mal geworfen. Approximieren Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass dabei häufiger als 530 mal Kopf fällt.

Aufgabe 3

Der dreidimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ sei $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilt mit

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Geben Sie die Verteilung von X_1 an.

b) Geben Sie die Verteilung des zweidimensionalen Zufallsvektors $(X_1, X_3)^T$ an.

c) Ermitteln Sie die Verteilung des zweidimensionalen Zufallsvektors $(X_1, X_2)^T$, bedingt gegeben $X_3 = 3$.

Aufgabe 4

Es soll der Zusammenhang zwischen einer abhängigen Variablen y und zwei erklärenden Variablen x_1 und x_2 untersucht werden. Bei x_1 handelt es sich dabei um eine stetige Variable und bei x_2 um eine kategoriale Variable, welche die drei Ausprägungen 1, 2 und 3 annehmen kann. Für die Variablen y , x_1 und x_2 liegen folgende Beobachtungen vor:

y	x_1	x_2
5	4	1
3	3	1
9	5	2
10	6	2
10	2	3
15	5	3

- Stellen Sie ein geeignetes Regressionsmodell auf und wählen Sie dabei $x_2 = 1$ als Referenzlevel der kategorialen Variablen x_2 .
- Berechnen Sie den KQ-Schätzer für β für das in a) aufgestellte lineare Regressionsmodell und verwenden Sie dafür:

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 60 & -14 & 17 & -11 \\ -14 & 4 & -8 & 0 \\ 17 & -8 & 38 & 11 \\ -11 & 0 & 11 & 22 \end{pmatrix}$$

- Testen Sie mittels t -Test die Signifikanz der erklärenden Variablen x_2 bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,01$.

Aufgabe 5

Ein Mitarbeiter in der Marketingabteilung eines Finanzdienstleisters vermutet, dass es einen positiven Zusammenhang zwischen den Werbeausgaben (in Millionen Euro) und dem Absatz (in Millionen Euro) des beworbenen Finanzproduktes gibt. In den letzten drei Jahren wurden folgende Zahlen beobachtet:

Absatz y	Werbeausgaben x
5	2
8	3
9	4

Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass ein linearer Zusammenhang zwischen dem Absatz und den Werbeausgaben vorliegt.

- Bestimmen Sie die Designmatrix \mathbf{X} und den KQ-Schätzer $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)^T$.
- Bestimmen Sie eine Schätzung für die Varianz-Kovarianzmatrix des KQ-Schätzers $\hat{\beta}$.
- Ermitteln Sie den Wert des Bestimmtheitsmaßes R^2 und des adjustierten Bestimmtheitsmaßes R_a^2 .
- Testen Sie die Signifikanz der erklärenden Variablen x bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,1$.
- Ermitteln Sie für den Regressionskoeffizienten β_1 das 95%-Konfidenzintervall.