Übung 3: Risikomaße II

Aufgabe 1

Betrachtet wird ein Gesamtunternehmen $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$, das aus den drei Geschäftsbereichen X_1, X_2, X_3 besteht. Für den Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ gelte

$$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu} = (10, 5, 5)^T,\ \mathrm{Var}(X_1) = 144,\ \mathrm{Var}(X_2) = 6{,}25,\ \mathrm{Var}(X_3) = 56{,}25$$

und die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bekannt seien.

a) Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ von $\mathbf{X}$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

c) Ermitteln Sie für die drei einzelnen Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 und das Gesamtunternehmen X jeweils den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 99{,}5\%$.

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastich unabhängig und Bernoulli-verteilt mit dem Parameter $p = 0{,}006$, d. h. es gilt

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}994 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}006.$$

Weisen Sie damit nach, dass der Value-at-Risk i. A. kein subadditives Risikomaß ist. Verwenden Sie dabei das Sicherheitsniveau $q = 99\%$.

Aufgabe 3

Prüfen Sie, ob das Risikomaß

$$\rho(X) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]}$$

mit $\mathbb{E}[X] \neq 0$ die Kohärenzaxiome „Monotonie“, „Translationsinvarianz“ und positive „Homogenität“ erfüllt. Anmerkung zur Prüfung des Monotonie-Axioms: Überlegen Sie sich ein geeignetes Beispiel mit zwei diskret verteilten Zufallsvariablen und zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktionen.