Übung 5: Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilungen, Modellanpassung und -überprüfung

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer und der Momentenschätzer einer $\operatorname{Exp}(\lambda)$-Verteilung mit $\lambda > 0$ durch $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{Y}}$ mit $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ gegeben ist.

Aufgabe 2

Von einer $\operatorname{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable X liegen die Beobachtungen 0,47, 0,49, 0,91, 1,00, 2,47, 5,03 und 16,09 vor. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzungen für das 25%-Quantil $x(0{,}25)$.

Aufgabe 3

Es sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung eine Mischung ist, die zu 40% aus einer $\operatorname{Exp}(\lambda_1)$- und zu 60% aus einer $\operatorname{Exp}(\lambda_2)$-Verteilung besteht. Es sei weiter bekannt, dass $\mathbb{E}[X] = 4$ und $\operatorname{Var}(X) = 22$ gilt. Bestimmen Sie die Momentenschätzer für die Parameter λ_1 und λ_2.

Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	7	12

a) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion formal an.

b) Skizzieren Sie zu den gegebenen Daten einen Boxplot und interpretieren Sie diesen.

c) Passen Sie an die gegebenen Daten eine Exponentialverteilung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode an.

   Hinweis: Verwenden Sie hierfür das Resultat aus der Übung 5, Aufgabe 1.

d) Beurteilen Sie die Güte der angepassten Verteilung mit Hilfe eines Kolmogorov-Smirnov-Tests zu einem Signifikanzniveau von 5%.

Aufgabe 5

Bei der Tarifberechnung in der Elementarschadenversicherung (d. h. gegen Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen Vulkanausbrüche) wird zwischen Normalschadenereignissen (Schadenhöhe < 50 Mio. €) und Großschadenereignissen (Schadenhöhe ≥ 50 Mio. €) unterschieden. In den Jahren 1986 bis 2005 wurden die folgenden 15 Großschadenereignisse beobachtet (Indexierung der Schadenhöhen auf 2005):

Datum	Schadenhöhe Y in Mio. €
20.06.1986	52,8
18.08.1986	135,2
18.07.1987	55,9
23.08.1987	138,6
26.02.1990	122,9
21.08.1992	55,8
24.09.1993	368,2
08.10.1993	83,8
18.05.1994	78,5
18.02.1999	75,3
12.05.1999	178,3
26.12.1999	182,8
04.07.2000	54,4
13.10.2000	365,3
20.08.2005	1051,1

a) Passen Sie an die Großschadendaten Y eine europäische Pareto-Verteilung $\text{Par}^*(\alpha, u)$ mit Threshold $u = 50$ Mio. € an. Verwenden Sie zur Schätzung des Shapeparameters α den modifizierten (erwartungstreuen) ML-Schätzer $\widehat{\alpha}_*^{ML}$. Machen Sie hierbei auch eine Angabe über die Genauigkeit von $\widehat{\alpha}_*^{ML}$ mittels $\text{Vko}(\widehat{\alpha}_*^{ML})$.

b) Überprüfen Sie die Anpassungsgüte mittels eines log-log- und QQ-Plots. Benutzen Sie zum Bilden der Plots eine der gängigen Statistiksoftwares (Stata, R, Python).

Aufgabe 6*

Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(y-\delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Schätzer für δ erwartungstreu und/oder konsistent sind.

a) Das arithmetische Mittel:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

b) Der Schätzer $\widehat{Y}$ mit der Dichtefunktion:

$$f_{\widehat{Y}}(y) = \begin{cases} n \exp(-n(y-\delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*Zusatzaufgabe