Quantitatives Risikomanagement 1
WS 2025

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Kapitel 4
Schadenanzahl und Schadenhöhenverteilungen

Abschnitt 4.1

Einleitung

Im nächsten Kapitel werden sog. Gesamtschadenmodelle betrachtet. Dabei handelt es sich um stochastische Modelle für den Gesamtschaden eines Portfolios/Kollektivs von Einzelrisiken in einem festen Zeitintervall, in dem die Gesamtschadenhöhe (oder der Gesamtverlust) des betrachteten Portfolios/Kollektivs als zufällige Summe von Zufallsvariablen modelliert wird. D.h. es wird angenommen, dass sich die Gesamtschadenhöhe in der Form

$$\boxed{S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i} \tag{1}$$

darstellen lässt. Dabei ist N eine diskrete Zufallsvariable, welche die Schadenanzahl beschreibt und $Y_1, \ldots, Y_N$ sind i.d.R. absolutstetige Zufallsvariablen, welche die Einzelschadenhöhen darstellen. Bei der Gesamtschadenhöhe (1) handelt es sich also um eine Zufallsvariable im doppelten Sinne, da sowohl die Anzahl der Summanden N als auch die einzelnen Summanden Y_i zufällig sind. Die Verteilung von S ergibt sich daher aus den Verteilungen von N und Y_i.

Die Verteilung von S wird deshalb als zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung (compound aggregate loss distribution) bezeichnet.

D.h. bei Gesamtschadenmodellen der Form (1) werden die Schadenanzahl N und die Einzelschadenhöhen Y_i getrennt voneinander modelliert und daraus anschließend die zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung von S ermittelt.

Die getrennte Modellierung der Verteilungen von N und Y_i hat im Vergleich zur direkten Modellierung der Gesamtschadenverteilung von S den entscheidenden Vorteil, dass bei der Ermittlung der Verteilung von S die folgenden Sachverhalte berücksichtigt werden können:

a) Eine Erhöhung/Verringerung der Größe des Portfolios/Kollektivs hat nur einen Einfluss auf die Verteilung der Schadenanzahl N.

b) Die allgemeine ökonomische Inflation und die Schadeninflation beeinflusst nur die Verteilung Einzelschadenhöhen Y_i.

c) Eine Veränderung des Selbstbehalts oder der Haftungssumme bei Risiken eines Versicherungsportfolios beeinflusst die Verteilung der Schadenanzahl N und die Verteilung Einzelschadenhöhen Y_i in unterschiedlicher Weise.

Die getrennte Modellierung der Verteilungen von N und Y_i ermöglicht somit ein flexibleres und präziseres Modell für den Gesamtschaden S.

Bei der Anwendung eines Gesamtschadenmodells zur Ermittlung der Verteilung des Gesamtschadens S eines Portfolios/Kollektivs von Einzelrisiken in einem festen Zeitintervall wird daher in den folgenden drei Schritten vorgegangen:

1) Wähle ein geeignetes Modell für die Verteilung der Schadenanzahl N.
2) Wähle ein geeignetes Modell für die Verteilung der Einzelschadenhöhen Y_i.
3) Ermittle auf Basis der in 1) und 2) gewählten Verteilungsmodelle die zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung von S.

Das mit Abstand bedeutendste Gesamtschadenmodell ist das kollektive Modell der Risikotheorie, welches Gegenstand von Kapitel 5 ist.

Die im kollektiven Modell getroffenen Annahmen an die Verteilungen von N und Y_i erlauben eine numerische Berechnung der zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung von S. Nur unter zusätzlichen (restriktiven) Annahmen an die Verteilungen von N und Y_i ist in Einzelfällen auch eine analytische Berechnung der Gesamtschadenverteilung von S möglich.

Im Quantitativen Risikomanagement ist man oft vor allem an einer guten Modellanpassung im rechten Tail der zusammengesetzten Gesamtschadenverteilung von S interessiert. Die Gestalt der zusammengesetzten Gesamtschadenverteilung von S hängt dabei sowohl von der Form der Verteilung der Schadenanzahl N als auch von der Form der Einzelschadenhöhenverteilung von Y_i ab.

Wenn die Einzelschadenhöhenverteilung eine Light-Tail-Verteilung ist, aber die Schadenanzahlverteilung eine Heavy-Tail-Verteilung, dann wird der rechte Tail der zusammengesetzten Gesamtschadenverteilung vor allem von der Schadenanzahlverteilung dominiert. Ist umgekehrt die Schadenanzahlverteilung eine Light-Tail-Verteilung, aber die Einzelschadenhöhenverteilung eine Heavy-Tail-Verteilung, dann wird der rechte Tail der zusammengesetzten Gesamtschadenverteilung vor allem durch die Einzelschadenhöhenverteilung festgelegt.

Zum Beispiel gilt bei einer subexponentiellen Verteilung als Einzelschadenhöhenverteilung ein sehr intuitives Ergebnis (siehe untenstehenden Satz). Bei subexponentiellen Verteilungen handelt es sich um eine bedeutende Klasse von Schadenhöhenverteilungen, die zur Klasse der Heavy-Tail-Verteilung gehören.

Definition (Subexponentielle Verteilungen)

Es seien F_Y eine Einzelschadenhöhenverteilung und Y_1, Y_2 zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $Y_1, Y_2 \sim F_Y$. Dann heißt F_Y subexponentiell, wenn gilt

$$\boxed{\lim_{y\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > y)}{1 - F_Y(y)} = 2.} \tag{2}$$

Sind $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der subexponentiellen Verteilung F_Y, dann kann man zeigen, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\boxed{\lim_{y\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_1 + \ldots + Y_n > y)}{\mathbb{P}(\max\{Y_1, \ldots, Y_n\} > y)} = 1} \tag{3}$$

Interpretation: Bei einer subexponentiellen Verteilung ist der rechte Tail der Verteilung des Gesamtschadens $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ durch den rechten Tail der Verteilung des maximalen Schadens $\max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ festgelegt. Dieser Sachverhalt wird auch als

„principle of the single big jump“

bezeichnet (vgl. FOSS ET AL. (2007)).

Ferner kann man zeigen, dass für eine subexponentielle Einzelschadenhöhenverteilung F_Y für alle $t > 0$

$$\boxed{\lim_{y \to \infty} e^{ty}(1 - F_Y(y)) = \infty}$$

gilt (vgl. z.B. WÜTHRICH (2013), Seiten 129–131). Dieses Ergebnis besagt, dass bei einer subexponentiellen Verteilung der rechte Tail

$$\mathbb{P}(Y > y) = 1 - F_Y(y)$$

für alle $t > 0$ langsamer abklingt als e^{-ty}. Dies motiviert die Bezeichnung subexponentielle Verteilung.

Die momenterzeugende Funktion $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}]$ einer subexponentiellen Schadenhöhenverteilung F_Y existiert nicht. D.h. die subexponentiellen Schadenhöhenverteilungen gehören zur Klasse der Heavy-Tail-Verteilungen.

Beispiele für subexponentiellen Schadenhöhenverteilungen sind Lognormalverteilung, Loggammaverteilung, Weibull-Verteilung mit $a < 1$, Pareto-Verteilung und Burr-Verteilung.

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz (Tailverhalten von F_S bei subexponentiell-verteilten Einzelschadenhöhen)

Die momenterzeugende Funktion der Schadenanzahl N existiere und die Verteilung der Einzelschadenhöhen Y_i gehöre zur Klasse der subexponentiellen Verteilungen. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F_S(x)}{1-F_Y(x)} = \mathbb{E}[N]$$

Beweis: Siehe EMBRECHTS ET AL. (1979). ■

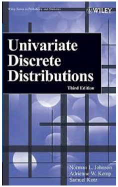
Dieser Satz besagt, dass bei subexponentiell-verteilten Einzelschadenhöhen Y_i und einer Light-Tail-Verteilung als Schadenanzahlverteilung F_N das asymptotische Tailverhalten der zusammengesetzten Gesamtschadenverteilung F_S bis auf den Faktor $\mathbb{E}[N]$ dem der Einzelschadenhöhenverteilung F_Y entspricht.

4. Schadenanzahl und Schadenhöhenverteilungen

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden zuerst mit

1) der Binomialverteilung,
2) der Poisson-Verteilung,
3) der negativen Binomialverteilung und
4) der Logarithmischen Verteilung

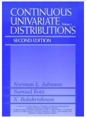


die wichtigsten Schadenanzahlverteilungen vorgestellt. Bei Schadenanzahlverteilungen handelt es sich um diskrete Verteilungen auf den Mengen

$$\{0, 1, \ldots, n\}, \quad \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad \mathbb{N}_0.$$

D.h. sie besitzen nur an diskreten Stellen wie $0, 1, 2, \ldots$ eine positive Wahrscheinlichkeitsmasse und sind somit die natürlichen Kandidaten zur Modellierung der zufälligen Schadenanzahl N im einem Portfolio/Kollektiv aus mehreren Einzelrisiken.

Im Folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften dieser Verteilungen (ohne Beweise) erläutert und ihre jeweils wichtigsten Kenngrößen angegeben. Eine umfassende Darstellung diskreter Verteilungen ist z.B. in JOHNSON ET AL. (2005) zu finden.



Nach Vorstellung der Schadenanzahlverteilungen werden mit

1) der Gammaverteilung,
2) der Lognormalverteilung,
3) der Loggammaverteilung,
4) der Inverse-Gauss-Verteilung,
5) der Weibull-Verteilung,
6) der Pareto-Verteilung und
7) der Burr-Verteilung

die wichtigsten Schadenhöhenverteilungen vorgestellt. Dabei handelt es sich um absolutstetige Verteilungen auf den Mengen

$$(0,\infty) \qquad \text{oder} \qquad (1,\infty).$$

D.h. sie besitzen nur auf der positiven reellen Zahlenachse eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte und sind daher die natürlichen Kandidaten zur Modellierung der zufälligen Schadenhöhe Y eines Einzelrisikos.

Im Folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften dieser Verteilungen (ohne Beweise) erläutert und ihre jeweils wichtigsten Kenngrößen angegeben. Eine umfassende Darstellung absolutstetiger Verteilungen ist z.B. in JOHNSON ET AL. (1994, 1995) zu finden.

Abschnitt 4.2

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Verteilungen. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von k Erfolgen bei n gleichartigen und unabhängigen Versuchen an, die jeweils zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) haben. Die Bezeichnung für diese Verteilung wurde erstmals 1911 von dem schottischen Statistiker GEORGE UDNY YULE (1871–1951) verwendet.

Definition (Binomialverteilung)

Eine Zufallsvariable N besitzt eine Binomialverteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$ (kurz: $N \sim \operatorname{Bin}(n,p)$), wenn gilt

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für alle } k \in \{0,1,\ldots,n\}.} \tag{4}$$

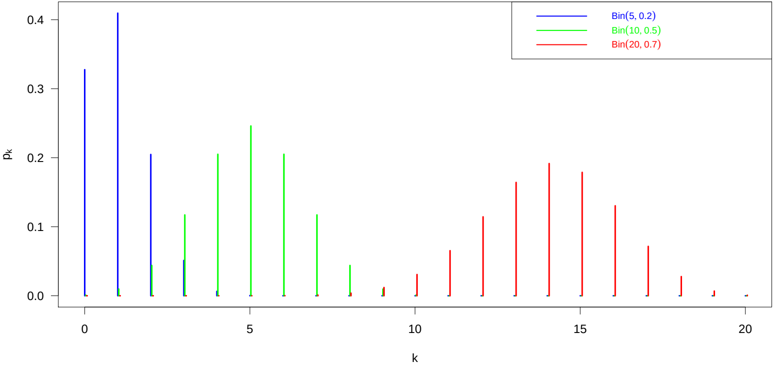
Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[N]$	$\operatorname{Var}(N)$	$V(N)$	$\operatorname{Vko}(N)$	$M_N(t)$
np	$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\sqrt{\frac{1-p}{np}}$	$\left(pe^t + (1-p)\right)^n$ für $t \in \mathbb{R}$

Für $0 < p < 1$ gilt

$$\boxed{\mathbb{E}[N] > \mathrm{Var}(N).}$$

Es liegt somit für $0 < p < 1$ Underdispersion vor.



Die Binomialverteilung besitzt bzgl. des ersten Parameters die folgende Aggregationseigenschaft:

Satz (Aggregationseigenschaft der Binomialverteilung)

Die Zufallsvariablen $N_1,\ldots,N_m$ seien stochastisch unabhängig und $N_i \sim \mathrm{Bin}(n_i,p)$ für $i=1,\ldots,m$. Dann gilt

$$N=\sum_{i=1}^{m} N_i \sim \mathrm{Bin}(n,p) \qquad \text{mit} \qquad n=\sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Beweis: Mit $M_{N_i}(t)=\left(pe^t+(1-p)\right)^{n_i}$ für $i=1,\ldots,m$ erhält man für die momenterzeugende Funktion von N

$$M_N(t)=\mathbb{E}\left[e^{tN}\right]=\mathbb{E}\left[e^{t(N_1+\ldots+N_m)}\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m}e^{tN_i}\right]=\prod_{i=1}^{m}\mathbb{E}[e^{tN_i}]=\prod_{i=1}^{m}\left(pe^t+(1-p)\right)^{n_i}=\left(pe^t+(1-p)\right)^{\sum_{i=1}^{m}n_i}=\left(pe^t+(1-p)\right)^{n}.$$

D.h. M_N stimmt mit der momenterzeugenden Funktion einer $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilten Zufallsvariablen überein. Aufgrund der Eindeutigkeit der momenterzeugenden Funktionen folgt daraus $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. ■

D.h. die Aggregation von m unabhängigen und Binomial-verteilten Schadenanzahlen N_i mit übereinstimmendem zweiten Parameter p ergibt wieder eine Binomial-verteilte Gesamtschadenanzahl $N=\sum_{i=1}^{m} N_i$. Wegen des zentralen Grenzwertsatzes impliziert dies, dass eine $\mathrm{Bin}(n,p)$-Verteilung für wachsendes n immer mehr einer Normalverteilung gleicht. Die Konvergenz ist dabei umso schneller, je näher p bei 0,5 liegt.

Der wichtige Spezialfall $n = 1$ wird nach dem Schweizer Mathematiker JAKOB I. BERNOULLI (1654–1705) als Bernoulli-Verteilung bezeichnet. Anstelle von $\mathrm{Bin}(1,p)$ schreibt man dann häufig auch $\mathrm{Ber}(p)$. Für eine $\mathrm{Ber}(p)$-verteilte Zufallsvariable N gilt

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N = k) = \begin{cases} 1-p & \text{für } k = 0 \\ p & \text{für } k = 1 \end{cases}}$$

(vgl. (4) für $n = 1$).

Die Bernoulli-Verteilung wird daher zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen mit den beiden Ausgängen „Erfolg“ (d.h. $N = 1$) und „Misserfolg“ (d.h. $N = 0$) verwendet, wobei die Erfolgswahrscheinlichkeit p und die Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p$ beträgt. Wird z.B. in einem Portfolio aus n unabhängigen Einzelrisiken das Eintreten eines Schadens bei einem der Einzelrisiken jeweils durch eine $\mathrm{Ber}(p)$-verteilte Zufallsvariable N_i mit der gleichen Eintrittswahrscheinlichkeit p modelliert, dann gibt

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

die Anzahl der im Portfolio insgesamt angefallenen Schäden an. Gemäß des letzten Satzes ist diese Anzahl $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilt.

Bemerkungen:

- Eine $\text{Bin}(n,p)$-Verteilung eignet sich nur zur Beschreibung von Portfolios, in denen ein Einzelrisiko höchstens einen Schaden haben kann. Dies ist z.B. in der Lebensversicherung der Fall, bei der Versicherte höchstens einmal sterben können. In der Schadenversicherung ist dies jedoch anders. In der Hausratsversicherung, Kfz-Versicherung, Sachversicherung usw. kann ein Einzelrisiko in einem festen Zeitraum (z.B. ein Jahr) durchaus auch mehrere Schäden aufweisen. Die Binomialverteilung kommt daher in der Schadenversicherung nicht so oft zum Einsatz.
- Die Binomialverteilung ist nützlich, wenn zur Modellierung der Schadenanzahl in einem Datensatz eine Verteilung mit Underdispersion oder einem endlichen Träger sinnvoll ist. Beides ist aber bei vielen Datensätzen in der Praxis nicht sinnvoll.
- Die Binomialverteilung gehört zur Panjer-Klasse (vgl. Abschnitt 5.5).

Abschnitt 4.3

Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung ist aufgrund ihrer guten analytischen Eigenschaften die bedeutendste Schadenanzahlverteilung. Sie ist nach dem französischen Mathematiker und Physiker SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840) benannt, der 1837 eine Herleitung der Poisson-Vertei lung veröffentlichte.

Definition (Poisson-Verteilung)

Eine Zufallsvariable N besitzt eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ (kurz: $N \sim \Pi(\lambda)$), wenn gilt

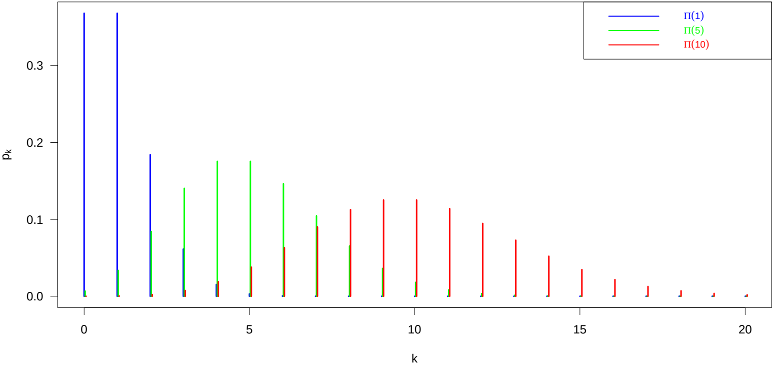
$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.}$$

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[N]$	$\mathrm{Var}(N)$	$V(N)$	$\mathrm{Vko}(N)$	$M_N(t)$
λ	λ	$1/\sqrt{\lambda}$	$1/\sqrt{\lambda}$	$\exp(\lambda(e^t - 1))$ für $t \in \mathbb{R}$

D.h. der Parameter λ gibt die erwartete Anzahl an und es gilt

$$\boxed{\mathbb{E}[N] = \mathrm{Var}(N).}$$



Der folgende Satz besagt, dass eine Binomialverteilung durch eine Poisson-Verteilung approximiert werden kann, wenn n hinreichend groß ist und p hinreichend nahe bei 0 liegt:

Satz (Poisson-Approximation der Binomialverteilung)

Für $N_n \sim \mathrm{Bin}\big(n, p(n)\big)$ mit $p(n) \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\lim_{n\to\infty} np(n) = \lambda > 0.$$

Dann konvergiert N_n für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine $\Pi(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable N.

Beweis: Siehe z.B. HEILMANN-SCHRÖTER (2014), S. 158. ■

Im obigen Satz gilt $p(n) \to 0$ für $n \to \infty$. Die Poisson-Verteilung wird deshalb auch als Verteilung der seltenen Ereignisse bezeichnet.

Die folgenden Aggregations- und Zerlegungseigenschaften sind Gründe für die große Popularität der Poisson-Verteilung in der Praxis. Die Aggregationseigenschaft lautet wie folgt:

Satz (Aggregationseigenschaft der Poisson-Verteilung)

Die Zufallsvariablen $N_1, \ldots, N_m$ seien stochastisch unabhängig und $N_i \sim \Pi(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i \sim \Pi(\lambda) \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

Beweis: Der Nachweis erfolgt analog zum Beweis der entsprechenden Aussage für die Binomial-Verteilung (siehe Abschnitt 4.2). ■

Die Aggregation von m unabhängigen und Poisson-verteilten Schadenanzahlen ergibt somit wieder eine Poisson-verteilte Schadenanzahl. Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes impliziert dies, dass eine $\Pi(\lambda)$-Verteilung für wachsendes λ immer mehr einer Normalverteilung gleicht.

Die folgende Zerlegungseigenschaft besagt, dass auch die Umkehrung des letzten Satzes gilt:

Satz (Zerlegungseigenschaft der Poisson-Verteilung)

Die Zufallsvariable $N \sim \Pi(\lambda)$ beschreibe eine zufällige Anzahl von Ereignissen, die jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ zu einer von m Kategorien gehören. Dann sind die zufälligen Anzahlen $N_1, \ldots, N_m$ von Ereignissen, die zur Kategorie $1, \ldots, m$ gehören, stochastisch unabhängige und mit den Parametern $\lambda p_1, \ldots, \lambda p_m$ Poisson-verteilte Zufallsvariablen.

Beweis: Siehe z.B. KLUGMAN ET AL. (2012), S. 81-82. ■

Bemerkungen:

- Die Zerlegungseigenschaft der Poisson-Verteilung ist bei der Modellierung der Schadenanzahl von Portfolios/Kollektiven hilfreich. Ist zum Beispiel in einer betrachteten Periode die Schadenanzahl N Poisson-verteilt und können die Schäden gemäß m verschiedenen Kategorien klassifiziert werden, z.B. nach
  - der Schadenhöhe (z.B. Schäden unter € 100'000, zwischen € 100'000 und € 1'000'000 bzw. über € 1'000'000) oder
  - der Schadenart (z.B. Personen- bzw. Sachschaden oder Hagel, Sturm bzw. Überschwemmung),

  dann sind die Schadenanzahlen in diesen Kategorien stochastisch unabhängig und ebenfalls Poisson-verteilt.

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Die Poisson-Verteilung gehört zur Panjer-Klasse (vgl. Abschnitt 5.5).
- Für einige Anwendungen besitzt die Poisson-Verteilung den Nachteil, dass sie nur einen Parameter besitzt. Sie ist daher bei der Anpassung an einen gegebenen Datensatz oft nicht flexibel genug.

Beispiel (Aggregations- und Zerlegungseigenschaft der Poisson-Verteilung)

Eine Bank A hält ein Kreditportfolio aus ausschließlich Baukrediten und ein Kreditportfolio aus ausschließlich Studienkrediten. Es ist bekannt, dass die Gesamtzahl der Kreditausfälle bei dieser Bank $\Pi(30)$-verteilt ist und 25% der Kreditausfälle Studienkredite sind.

Eine zweite Bank B hält drei Kreditportfolios, die ausschließlich aus Baukrediten, Studienkrediten bzw. Autokrediten bestehen. Die Gesamtzahl der Kreditausfälle bei dieser Bank ist $\Pi(50)$-verteilt, wobei 20% der Kreditausfälle Studienkredite und 50% der Kreditausfälle Baukredite sind.

Die Kreditausfälle in den beiden Banken können als stochastisch unabhängig angenommen werden.

Beispiel (Fortsetzung)

Es kommt nun zu einer Fusion der Kreditportfolios der beiden Banken und die Geschäftsleitung interessiert sich für die Verteilung der Kreditausfälle in dem Kredit-Portfolio aus ausschließlich Studienkrediten und dem Kreditportfolio aus ausschließlich Autokrediten.

Bank A: Aufgrund der Zerlegungseigenschaft der Poisson-Verteilung ist die Anzahl der Ausfälle im Kreditportfolio aus Studienkrediten $\Pi(\lambda_S^A)$-verteilt mit $\lambda_S^A = 30 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$.

Bank B: Analog folgt, dass die Anzahl der Ausfälle im Kreditportfolio aus Studienkrediten $\Pi(\lambda_S^B)$-verteilt ist mit $\lambda_S^B = 50 \cdot 0{,}20 = 10{,}0$ und die Anzahl der Ausfälle im Kreditportfolio aus Autokrediten eine $\Pi(\lambda_A^B)$-Verteilung mit $\lambda_A^B = 50 \cdot (1 - 0{,}20 - 0{,}50) = 15{,}0$ besitzt.

Bank $A+B$: Aufgrund der Aggregationseigenschaft der Poisson-Verteilung besitzt die Anzahl der Ausfälle im aggregierten Kreditportfolio aus Studienkrediten eine $\Pi(\lambda_S^{A+B})$-Verteilung mit $\lambda_S^{A+B} = \lambda_S^A + \lambda_S^B = 17{,}5$ und die Anzahl der Ausfälle im Kreditportfolio aus Autokrediten ist $\Pi(\lambda_A^{A+B})$-verteilt mit $\lambda_A^{A+B} = \lambda_A^B = 15{,}0$.

Abschnitt 4.4

Negative Binomialverteilung

Die negative Binomialverteilung wird häufig auch nach dem französischen Mathematiker und Philosophen BLAISE PASCAL (1623–1662) als Pascal-Verteilung bezeichnet. Sie gibt bei $n = k + r$ gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) haben, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von k Misserfolgen bis zum Eintreten des r-ten Erfolgs an.

Definition (Negative Binomialverteilung)

Eine Zufallsvariable N besitzt eine negative Binomialverteilung mit den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$ (kurz: $N \sim \mathrm{NBin}(r,p)$), wenn gilt

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.} \tag{5}$$

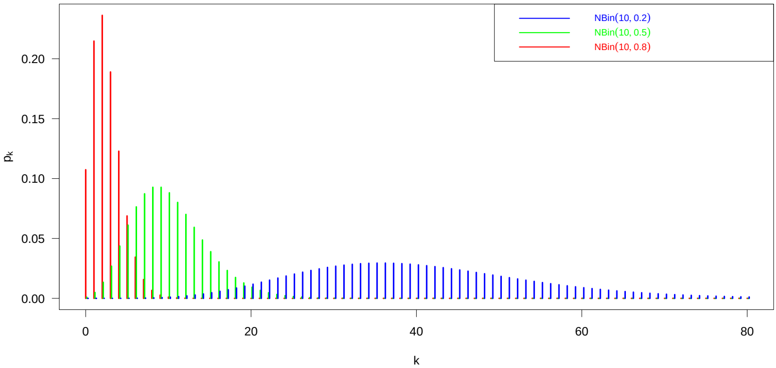
Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[N]$	$\mathrm{Var}(N)$	$V(N)$	$\mathrm{Vko}(N)$	$M_N(t)$
$\frac{(1-p)r}{p}$	$\frac{(1-p)r}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-p)r}}$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r$ für $t < -\ln(1-p)$

Wegen $p \in (0,1)$ gilt

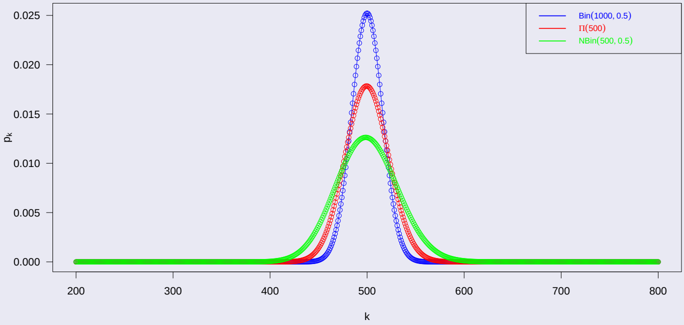
$$\boxed{\mathbb{E}[N] < \mathrm{Var}(N).}$$

Es liegt somit Overdispersion vor. Dies ist neben der größeren Flexibilität der negativen Binomialverteilung aufgrund ihrer zwei Parameter der Hauptgrund, weshalb sie in einigen Fällen der Poisson-Verteilung vorgezogen wird.



Beispiel (Vergleich Binomial-, Poisson- und negative Binomialverteilung)

Die folgende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeiten p_k einer $\mathrm{Bin}(1000, 0{,}5)$-, $\Pi(500)$- und $\mathrm{NBin}(500, 0{,}5)$-Verteilung. D.h. alle drei Schadenanzahlverteilungen haben den Erwartungswert 500. Es ist zu erkennen, dass der Variationskoeffizient und damit die Unsicherheit von der Binomialverteilung über die Poisson-Verteilung zur negativen Binomialverteilung ansteigt.



Die negative Binomialverteilung besitzt bzgl. des ersten Parameters die gleiche Aggregationseigenschaft wie die Binomial- und Poisson-Verteilung:

Satz (Aggregationseigenschaft der negativen Binomialverteilung)

Die Zufallsvariablen $N_1, \ldots, N_m$ seien stochastisch unabhängig und $N_i \sim \mathrm{NBin}(r_i, p)$ für $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$N = \sum_{i=1}^{m} N_i \sim \mathrm{NBin}(r, p) \qquad \text{mit} \qquad r = \sum_{i=1}^{m} r_i.$$

Beweis: Der Nachweis erfolgt analog zum Beweis der entsprechenden Aussage für die Binomial-Verteilung (siehe Abschnitt 4.2). ■

D.h. die Aggregation von m unabhängigen und negativ Binomial-verteilten Risiken mit übereinstimmendem zweiten Parameter p ergibt wieder ein negativ Binomial-verteiltes Risiko. Zusammen mit dem zentralen Grenzwertsatz impliziert dies, dass eine $\mathrm{NBin}(r, p)$-Verteilung für wachsendes r immer mehr einer Normalverteilung gleicht.

Für die negative Binomialverteilung lässt sich auch eine ähnliche Zerlegungseigenschaft wie für die Poisson-Verteilung nachweisen. Allerdings sind die Schadenanzahlen in den einzelnen Kategorien nun nicht mehr stochastisch unabhängig, sondern positiv korreliert:

Satz (Zerlegungseigenschaft der negativen Binomialverteilung)

Die Zufallsvariable $N \sim \mathrm{NBin}(r,p)$ beschreibe eine zufällige Anzahl von Ereignissen, die jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1,\ldots,p_m$ zu einer von m Kategorien gehören. Dann sind die zufälligen Anzahlen $N_1,\ldots,N_m$ von Ereignissen, die zur Kategorie $1,\ldots,m$ gehören, positiv korrelierte negativ Binomial-verteilte Zufallsvariablen mit den Parametern r und $p/(p+p_i(1-p))$ für $i=1,\ldots,m$.

Beweis: Dies zeigt man mit Hilfe der Zerlegungseigenschaft der Poisson-Verteilung (siehe letzter Satz in Abschnitt 4.3) und der Tatsache, dass sich eine negative Binomialverteilung als eine gemischte Poisson-Gamma-Verteilung darstellen lässt. ■

Analog zu einer $\mathrm{Bin}(n,p)$-Verteilung kann auch eine $\mathrm{NBin}(r,p)$-Verteilung mit

$$r \gg 0 \qquad \text{und} \qquad p \approx 1$$

durch eine Poisson-Verteilung approximiert werden. Genauer gilt:

Satz (Poisson-Approximation der negativen Binomialverteilung)

Für $N_r \sim \mathrm{NBin}\big(r, p(r)\big)$ mit $p(r) \in (0,1)$ und $r \in \mathbb{N}$ gelte

$$\lim_{r\to\infty} \big(1 - p(r)\big) r = \lambda > 0.$$

Dann konvergiert N_r für $r \to \infty$ in Verteilung gegen eine $\Pi(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable N.

Beweis: Siehe z.B. HEILMANN-SCHRÖTER (2014), S. 158. ■

Für $r \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{k+r-1}{k} = \frac{(k+r-1)!}{(r-1)!k!} = \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!}. \tag{6}$$

Der Binomialkoeffizient (6) ist daher auch für beliebige $r \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Er wird dann verallgemeinerter Biniomialkoeffizient genannt, und da sich die Gültigkeit von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k = 1$$

auch für alle $r \in (0,\infty)$ und $p \in (0,1)$ nachweisen lässt, kann die negative Binomialverteilung (5) für beliebige $r \in (0,\infty)$ und $p \in (0,1)$ definiert werden. Wegen

$$\binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k} \tag{7}$$

für alle $r \in (0,\infty)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ besitzt diese Verallgemeinerung dann neben (5) auch die alternative Darstellung

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N=k) = (-1)^k \binom{-r}{k} p^r (1-p)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.} \tag{8}$$

Diese Verallgemeinerung der negativen Binomialverteilung von $r \in \mathbb{N}$ auf beliebige $r \in (0,\infty)$ wird häufig nach dem ungarischen Mathematiker GEORGE PÓLYA (1887–1985) als Pólya-Verteilung bezeichnet.

Für die Gammafunktion

$$\boxed{\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du}$$

gilt

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \qquad \text{für alle } r > 0.$$

D.h. es gilt $\Gamma(k+1) = k!$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Damit erhält man für den Binomialkoeffizienten (7) die Darstellung

$$\begin{aligned} \binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)} \end{aligned} \tag{9}$$

für alle $r \in (0,\infty)$ und $k \in \mathbb{N}_0$. D.h. die verallgemeinerte negative Binomialverteilung bzw. Pólya-Verteilung besitzt neben (5) und (8) auch die alternative Darstellung

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N = k) = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)} p^r (1-p)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.}$$

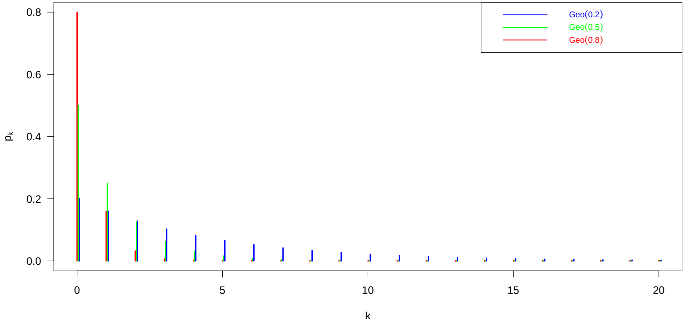
Diese Darstellung ist sehr nützlich, da die Werte der Gammafunktion in vielen Programmen verfügbar sind.

Für $r = 1$ erhält man aus der $\mathrm{NBin}(r, p)$-Verteilung einen wichtigen Spezialfall, der geometrische Verteilung genannt wird. Anstelle von $\mathrm{NBin}(1, p)$ schreibt man dann häufig $\mathrm{Geo}(p)$. Für eine $\mathrm{Geo}(p)$-verteilte Zufallsvariable N gilt

$$\boxed{p_k = \mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0}$$

(vgl. (5) für $r = 1$).

Die geometrische Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl k von „Misserfolgen“ bis der erste „Erfolg“ eintritt.



Bemerkungen:

- Sind $N_1, \ldots, N_r$ unabhängige Geo(p)-verteilte Zufallsvariablen, dann folgt aus dem vorletzten Satz

$$N = \sum_{i=1}^{r} N_i \sim \mathrm{NBin}(r,p).$$

- Die geometrische Verteilung ist die einzige diskrete Verteilung mit der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit. D.h. es gilt

$$\mathbb{P}(N = n + k | N \geq n) = \mathbb{P}(N = k) \qquad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

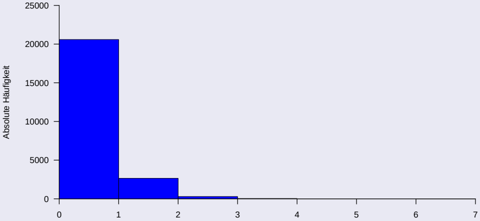
  Sie ist in dieser Hinsicht das diskrete Analogon der Exponential-Verteilung (siehe Abschnitt 4.7).

- Die geometrische Verteilung dient häufig als Benchmark für das Tail-Verhalten von Schadenanzahlverteilungen. Klingt der Tail einer Schadenanzahlverteilung langsamer (schneller) als der einer geometrischen Verteilung ab, wird sie als Heavy-Tail-Verteilung (Light-Tail-Verteilung) bezeichnet.
- Die geometrische Verteilung spielt aufgrund der Eigenschaft (10) eine wichtige Rolle in der Ruintheorie. Sie erlaubt es bedingte Wahrscheinlichkeiten auf unbedingte Wahrscheinlichkeiten zurückzuführen.
- Die negative Binomialverteilung gehört zur Panjer-Klasse (vgl. Abschnitt 5.5).

Beispiel (Vergleich Poisson- und negative Binomialverteilung)

Die folgenden Schadenanzahlen aus der Autoversicherung sind aus TRÖBLIGER (1961):

Anzahl Schäden k pro Jahr	Anzahl Fahrzeughalter	Erwartete Schadenanzahl Poisson	Erwartete Schadenanzahl NBin
0	20592	20420,9	20596,8
1	2651	2945,1	2631,0
2	297	212,4	318,4
3	41	10,2	37,8
4	7	0,4	4,4
5	0	0,0	0,5
6	1	0,0	0,1
7	0	0,0	0,0
Total	23589	23589	23589



Beispiel (Fortsetzung)

Die beiden verschiedenen Schadenanzahlverteilungen wurden jeweils mit der ML-Methode an die beobachteten Schadendaten angepasst. Es ist zu erkennen, dass die negative Binomialverteilung insgesamt eine deutlich bessere Anpassung liefert. Dies gilt vor allem im rechten Tail der Verteilung. Dies ist nicht verwunderlich, denn für den Mittelwert und die korrigierte Stichprobenvarianz im Datensatz gilt

$$\overline{n} = \frac{1}{23589} \sum_{i=1}^{23589} n_i = 0{,}1442198$$

bzw.

$$s^2 = \frac{1}{23589-1} \sum_{i=1}^{23589} (n_i - \overline{n})^2 = 0{,}1638699.$$

D.h. es gilt $s^2 > \overline{n}$ und es liegt somit Overdispersion vor. Dieser Sachverhalt kann durch eine gewöhnliche Poisson-Verteilung nicht erfasst werden kann.

Abschnitt 4.5

Logarithmische Verteilung

Die logarithmische Verteilung ist aus der Taylor-Reihendarstellung

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad \text{für } x \in [-1,1)$$

abgeleitet (vgl. Merz-Wüthrich (2013), Seite 497). Denn mit $x = 1-p$ für $p \in (0,1)$ folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(1-p)^k}{k\ln(p)} = 1$$

Definition (Logarithmische Verteilung)

Eine Zufallsvariable N besitzt eine logarithmische Verteilung mit dem Parameter $p \in (0,1)$ (kurz: $N \sim \text{Log}(p)$), wenn gilt

$$\boxed{p_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad p_k = \mathbb{P}(N=k) = -\frac{(1-p)^k}{k\ln(p)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.}$$

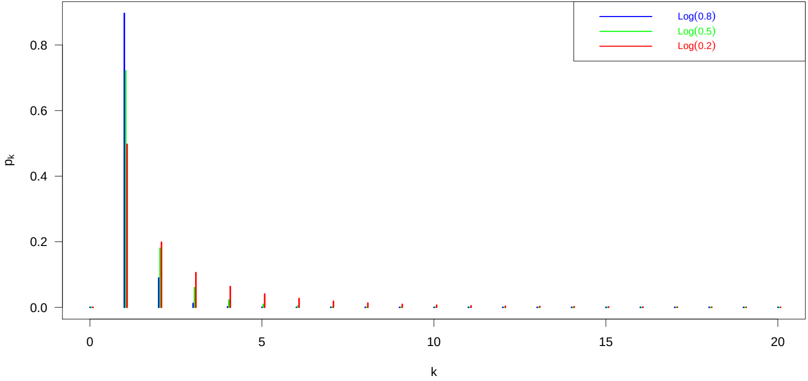
Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[N]$	$\mathrm{Var}(N)$	$V(N)$
$-\frac{1-p}{p\ln(p)}$	$\frac{-(1-p)\left(\ln(p)+1-p\right)}{p^2\ln^2(p)}$	$-\frac{\frac{\ln^2(p)}{\ln(p)+(1-p)}+p\left(\ln(p)+2(1-p)\right)}{\sqrt{-(1-p)\left(\ln(p)+(1-p)\right)}}$

$\mathrm{Vko}(N)$	$M_N(t)$
$\sqrt{\frac{1-p}{-\left(\ln(p)+(1-p)\right)}}$	$\frac{\ln(1-(1-p)e^t)}{\ln(p)}$ für $t < -\ln(1-p)$

Bemerkungen:

- Im Gegensatz zur Binomial-, Poisson- und negativen Binomialverteilung besitzt die logarithmische Verteilung an der Stelle $k=0$ keine Wahrscheinlichkeitsmasse.
- Die logarithmische Verteilung gehört nicht zur Panjer-Klasse.


Log(0.8)
Log(0.5)
Log(0.2)
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
p_k
0
5
10
15
20
k

Beispiel (Vergleich von Tailwahrscheinlichkeiten)

Die Poisson-, negative Binomial- und logarithmische Verteilung sind Verteilungen auf der (abzählbar) unendlichen Menge $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$.

Die folgende Tabelle zeigt die Tailwahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(N \geq 10)$, $\mathbb{P}(N \geq 12)$ und $\mathbb{P}(N \geq 15)$ für sieben ausgewählte Schadenanzahlverteilungen mit dem Erwartungswert 3.

Verteilung	$\mathbb{P}(N \geq 10)$	$\mathbb{P}(N \geq 12)$	$\mathbb{P}(N \geq 15)$
$\Pi(3)$	0,0011	0,000071	0,00000067
$\mathrm{NBin}(3, 1/2)$	0,0193	0,006470	0,00117493
$\mathrm{NBin}(2, 2/5)$	0,0302	0,012625	0,00329130
$\mathrm{Geo}(1/4)$	0,0563	0,031676	0,01336346
$\mathrm{NBin}(3/4, 1/5)$	0,0681	0,042071	0,02060198
$\mathrm{NBin}(1/3, 1/10)$	0,0931	0,069364	0,04544745
$\mathrm{Log}(0{,}149)$	0,0499	0,031354	0,01615977

Es ist zu beobachten:

Beispiel (Fortsetzung)

Ausgehend von der $\Pi(3)$-Verteilung steigen die Tailwahrscheinlichkeiten bei der negativen Binomialverteilung mit kleiner werdendem Parameter r an und die logarithmische und die geometrische Verteilung weisen in diesem Beispiel ein ähnliches Tailverhalten auf.

Allgemein gilt: Die negative Binomialverteilung ist für $r > 1$ light-tailed (d.h. klingt schneller ab als die geometrische Verteilung) und ist für $r < 1$ heavy-tailed (d.h. klingt langsamer ab als die geometrische Verteilung).

Abschnitt 4.6

Zero-Modification und Zero-Truncation

In einigen Anwendungen kommt es vor, dass die Daten mit einer der vier vorgestellten Schadenanzahlverteilungen gut übereinstimmen, allerdings mit einer Verzerrung für die Schadenanzahl $N = 0$. Es kommt z.B. relativ häufig vor, dass im Datensatz mehr Risiken mit der Schadenanzahl 0 beobachtet wurden als man es unter einer dieser Verteilungen erwarten würde.

In diesen Fällen kann es angebracht sein, eine sog. zero-modified Verteilung zu verwenden. Eine solche Verteilung ist eine Mischung aus der Verteilung einer degenerierten Zufallsvariablen $N \equiv 0$ mit seiner kompletten Wahrscheinlichkeitsmasse an der Stelle $k = 0$ und einer bedingten Schadenanzahlverteilung für Schadenanzahlen $k \geq 1$.

Genauer gilt: Besitzt die Zufallsvariable Z eine Schadenanzahlverteilung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, dann folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k | Z \geq 1) &= \frac{\mathbb{P}(Z = k)}{\mathbb{P}(Z \geq 1)} \\ &= \frac{p_k}{1 - p_0} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Folglich besitzt die Zufallsvariable

$$\boxed{N = \begin{cases} 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \alpha \\ Z|Z \geq 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-\alpha \end{cases}}$$

eine zero-modified Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

$$\boxed{q_0 = \alpha \in [0,1] \qquad \text{und} \qquad q_k = (1-\alpha)\frac{p_k}{1-p_0} \quad \text{für } k = 1,2,\ldots}$$

D.h. die Wahrscheinlichkeit für die Schadenanzahl 0 wird gleich α gesetzt und die Wahrscheinlichkeiten q_k mit $k = 1,2,\ldots$ werden entsprechend skaliert, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k = \alpha + (1-q_0) = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

gilt.

Auf diese Weise erhält man aus der Binomial-, Poisson-, negativen Binomial- und logarithmischen Verteilung die folgenden zero-modified Verteilungen:

1) Zero-modified Binomialverteilung ZM-Bin(n,p,α)

$$q_0 = \alpha \in (0,1) \qquad \text{und} \qquad q_k = \frac{1-\alpha}{1-(1-p)^n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 1,2,\dots$$

2) Zero-modified Poisson-Verteilung ZM-$\Pi(\lambda,\alpha)$

$$q_0 = \alpha \in (0,1) \qquad \text{und} \qquad q_k = \frac{1-\alpha}{1-e^{-\lambda}}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } k = 1,2,\dots$$

3) Zero-modified negative Binomialverteilung ZM-NBin(r,p,α)

$$q_0 = \alpha \in (0,1) \qquad \text{und} \qquad q_k = \frac{1-\alpha}{1-p^r}p^r(1-p)^k\binom{k+r-1}{k} \quad \text{für } k = 1,2,\dots$$

Für $r = 1$ erhält man daraus die Zero-modified geometrische Verteilung ZM-Geo(p,α).

4) Zero-modified logarithmische Verteilung ZM-Log(p,α)

$$q_0 = \alpha \in (0,1) \qquad \text{und} \qquad q_k = -(1-\alpha)\frac{(1-p)^k}{k\ln(p)} \quad \text{für } k = 1,2,\dots$$

Setzt man $\alpha = 0$, so dass $q_0 = \mathbb{P}(N = 0) = 0$ bzw. $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1$ gilt, erhält man die folgenden sog. zero-truncated Verteilungen:

1) Zero-truncated Binomialverteilung ZT-Bin(n,p)

$$q_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad q_k = \frac{1}{1-(1-p)^n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 1,2,\ldots$$

2) Zero-truncated Poisson-Verteilung ZT-$\Pi(\lambda)$

$$q_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad q_k = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } k = 1,2,\ldots$$

3) Zero-truncated negative Binomialverteilung ZT-NBin(r,p)

$$q_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad q_k = \frac{1}{1-p^r} p^r (1-p)^k \binom{k+r-1}{k} \quad \text{für } k = 1,2,\ldots$$

Für $r = 1$ erhält man daraus die Zero-truncated geometrische Verteilung ZT-Geo(p).

Beispiel (Zero-truncated und Zero-modified negative Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Zero-truncated negative Binomialverteilung ZT-NBin$(-1/2, 1/2)$ sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
q_0 &= 0 \\
q_1 &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2}^{1}\binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{1-\sqrt{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}853553 \\
q_2 &= \ldots \approx \left(\frac{1}{2}-\frac{3/4}{2}\right)\cdot 0{,}853553 = 0{,}106694 \\
q_3 &= \ldots \approx \left(\frac{1}{2}-\frac{3/4}{3}\right)\cdot 0{,}106694 = 0{,}026674 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Beispiel (Fortsetzung)

Für die Zero-modified negative Binomialverteilung ZM-NBin$(-1/2, 1/2, 3/5)$ gilt $q_0 = \frac{3}{5}$. Die anderen Werte ihrer Wahrscheinlichkeitsfunktion $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ erhält man durch Multiplikation der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Zero-truncated negative Binomialverteilung ZT-NBin$(-1/2, 1/2)$ mit dem Wert $1 - q_0 = \frac{2}{5}$. Dies liefert dann die Werte

$$\begin{aligned} q_1 &\approx \frac{2}{5} \cdot 0{,}853553 = 0{,}341421 \\ q_2 &\approx \frac{2}{5} \cdot 0{,}106694 = 0{,}042678 \\ q_3 &\approx \frac{2}{5} \cdot 0{,}026674 = 0{,}010670 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Abschnitt 4.7

Gammaverteilung

Die Gammaverteilung wird in der Risikotheorie z.B. zur Modellierung der Lebensdauer sowie kleineren und mittleren Schadenhöhen eingesetzt.

Definition (Gammaverteilung)

Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Gammaverteilung mit Shapeparameter $\alpha > 0$ und Rateparameter $\beta > 0$ (bzw. Scaleparameter $1/\beta$) (kurz: $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$), wenn gilt

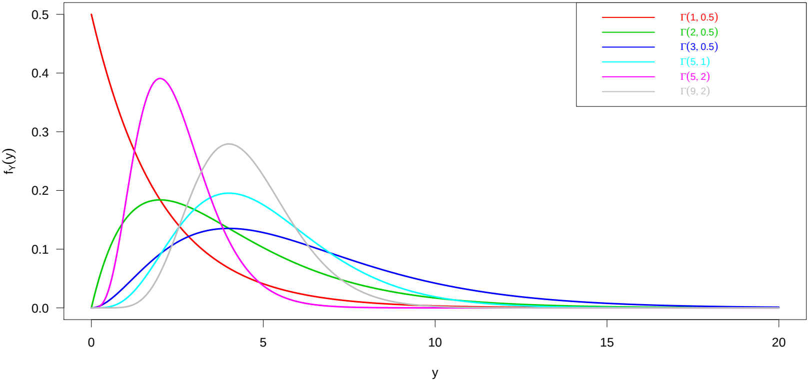
$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.} \tag{11}$$

Dabei ist $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ \alpha \mapsto \Gamma(\alpha) := \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\, du$ die Gammafunktion.

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[Y]$	$\operatorname{Var}(Y)$	$V(Y)$	$\operatorname{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ für $t < \beta$

Der Shapeparameter $\alpha > 0$ bestimmt die Gestalt der Dichte über eine reine Verschiebung oder Skalierung hinaus. Z.B. resultieren für $\alpha > 1$ Dichten, die denen der Lognormalverteilung (siehe nachfolgende Verteilung) ähneln. Der Scaleparameter $1/\beta > 0$ steuert dagegen die Skalierung (Breite) der Dichte, d.h. wie stark die Dichte bzgl. der x-Achse gestaucht oder gestreckt ist.



Die Gammaverteilung besitzt die folgende Aggregationseigenschaft:

Satz (Aggregationseigenschaft der Gammaverteilung)

Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_m$ seien stochastisch unabhängig und $Y_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta)$ für $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j \sim \Gamma(\alpha, \beta) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j.$$

Beweis: Mit $M_{Y_j}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_j}$ für $j = 1, \ldots, m$ und $t < \beta$ erhält man für die momentenerzeugende Funktion von Y:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t(Y_1 + \ldots + Y_m)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{m} e^{tY_j}\right] = \prod_{j=1}^{m} \mathbb{E}[e^{tY_j}] = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_j} = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j} = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

D.h. M_Y stimmt mit der momentenerzeugenden Funktion einer $\Gamma(\alpha, \beta)$-verteilten Zufallsvariablen überein. Aufgrund der Eindeutigkeit der momentenerzeugenden Funktionen folgt daraus $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. ∎

Die Verteilung von Y heißt skalierungsinvariant, wenn die Verteilungen von

$$Y \qquad \text{und} \qquad qY \qquad \text{für alle } q > 0$$

zur gleichen parametrischen Verteilungsfamilie gehören. Das Vorliegen dieser Eigenschaft ist z.B. bei der Berücksichtigung von Inflation oder Währungsumrechnungen hilfreich, da sich dann dadurch die Verteilung der Zufallsvariablen (bis auf eventuelle Parameterveränderungen) nicht verändert.

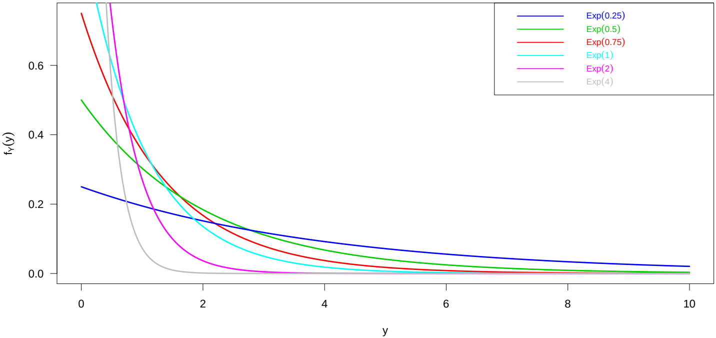
Bemerkungen:

- Die Gammaverteilung ist eine skalierungsinvariante Verteilung. Für $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ gilt
$$qY \sim \Gamma(\alpha, \beta/q)$$
(vgl. (30)).
- Analog zur Normalverteilung kann auch bei der Gammaverteilung die Verteilungsfunktion nicht in geschlossener Form angegeben werden.
- Für die Gammafunktion Γ gilt bekanntlich
$$\Gamma(1) = 1 \qquad \text{und} \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \text{für alle } \alpha > 0.$$
- Wichtige Spezialfälle
  - $\alpha = n/2$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\beta = 1/2$: χ^2_n-Verteilung mit n Freiheitsgraden
  - $\alpha \in \mathbb{N}$: Erlang-Verteilung mit Parametern α und β (benannt nach dem dänischen Mathematiker und Ingenieur Agner Krarup Erlang (1878–1929))

Ein ganz besonders wichtiger Spezialfall von $\Gamma(\alpha, \beta)$ resultiert für $\alpha = 1$ und wird Exponentialverteilung genannt. Anstelle von $\Gamma(1, \beta)$ schreibt man häufig $\mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = \beta > 0$. Für eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable Y gilt:

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \tag{12}$$

In der Risikotheorie wird die Exponentialverteilung häufig zur Modellierung des zeitlichen Abstands zwischen dem Eintreten zufälliger Ereignisse verwendet.



Bemerkungen:

- Sind $Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Exp(λ)-verteilte Zufallsvariablen, dann folgt aus dem letzten Satz

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j \sim \Gamma(m, \lambda).$$

- Die Exponentialverteilung ist die einzige stetige Verteilung mit der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit. D.h. es gilt

$$\mathbb{P}(Y > y + u | Y > u) = \mathbb{P}(Y > y) \qquad \text{für alle } y, u \in (0, \infty). \tag{13}$$

  Sie ist in dieser Hinsicht das stetige Analogon der geometrischen Verteilung (vgl. Abschnitt 4.4).

- Die Exponentialverteilung dient häufig als Benchmark für das Tail-Verhalten von Schadenhöhenverteilungen. Klingt der Tail einer Schadenhöhenverteilung langsamer (schneller) als der einer Exponentialverteilung ab, wird sie als Heavy-Tail-Verteilung (Light-Tail-Verteilung) bezeichnet.

- Die Exponentialverteilung spielt aufgrund von (13) in der Ruintheorie und im Zusammenhang mit sog. Poisson-Prozessen eine wichtige Rolle.

Abschnitt 4.8

Lognormalverteilung

Die Lognormalverteilung besitzt auf dem rechten Tail mehr Wahrscheinlichkeitsmasse als die Gammaverteilung. Sie wird deshalb oft zur Modellierung von mittleren und größeren Schadenhöhen verwendet.

Eine lognormal-verteilte Zufallsvariable Y ergibt sich durch exponentielle Transformation

$$Y = e^X$$

einer $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen X. Für die Verteilungsfunktion von Y gilt somit

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{für } y > 0. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung wird entsprechend mit ϕ bezeichnet.

Durch Ableiten von F_Y oder mit (31) erhält man die Dichtefunktion der Lognormalverteilung. Dies führt zur folgenden Definition:

Definition (Lognormalverteilung)

Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Lognormalverteilung mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ (kurz: $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$), wenn gilt

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.}$$

Per Definition gilt:

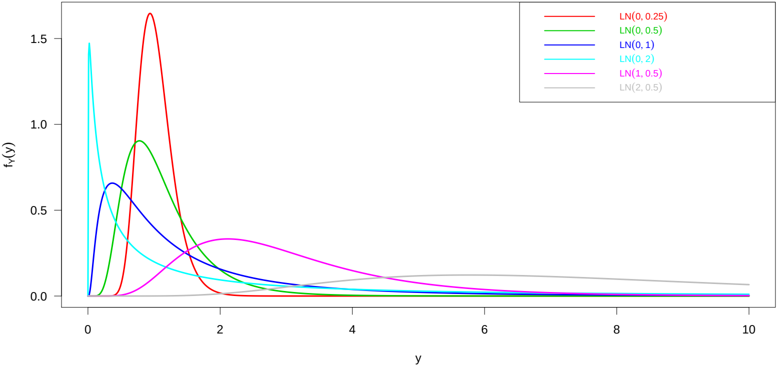
$$Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(Y) \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2). \tag{14}$$

Dieser Zusammenhang ist bei vielen Berechnungen hilfreich. Zum Beispiel erhält man für die Momente von $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ mit Hilfe von $M_{\ln(Y)}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ für $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{E}[Y^n] = \mathbb{E}[e^{n\ln(Y)}] = M_{\ln(Y)}(n) = e^{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}}$$

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[Y]$	$\mathrm{Var}(Y)$	$V(Y)$	$\mathrm{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$\left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$	$\left(e^{\sigma^2}+2\right)\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$	$\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$	existiert nicht



Bemerkungen:

- Die Lognormalverteilung ist eine skalierungsinvariante Verteilung. Für $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ und $q > 0$ gilt (vgl. (30))

$$qY \sim \mathrm{LN}(\mu + \ln(q), \sigma^2).$$

- Für $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ folgt mit (14)

$$\frac{1}{Y} \sim \mathrm{LN}(-\mu, \sigma^2) \qquad \text{und} \qquad Y^r \sim \mathrm{LN}(r\mu, r^2\sigma^2) \quad \text{für } r \neq 0.$$

- Wegen (14) werden die Parameter μ und σ oft als meanlog bzw. sdlog bezeichnet. Auf einer logarithmischen Skala handelt es sich bei μ and σ um einen Location- bzw. Scaleparameter. Beachte aber, dass die Parameter μ und σ bei einer Lognormalverteilung im Gegensatz zur Normalverteilung nicht dem Erwartungswert bzw. der Standardabweichung der Lognormalverteilung entsprechen.

Beispiel (Tailwahrscheinlichkeiten bei Exponential- und Lognormalverteilungen)

Betrachtet wird ein Portfolio bestehend aus stochastisch unabhängigen Einzelrisiken. Das Portfolio setzt sich zu 75% aus Einzelrisiken vom Typ A mit $\mathrm{Exp}(1/2)$-verteilten Einzelschadenhöhen und zu 25% aus Einzelrisiken vom Typ B mit $\mathrm{Exp}(1/8)$-verteilten Einzelschadenhöhen zusammen.

Ist Y die Einzelschadenhöhe eines zufällig aus dem Portfolio ausgewählten Einzelrisikos, dann erhält man für die Tailwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 10)$ den folgenden Wert (vgl. (12)):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 10) &= \mathbb{P}(Y > 10|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Y > 10|B)\mathbb{P}(B)\\ &= (1 - F_Y(10|A))\mathbb{P}(A) + (1 - F_Y(10|B))\mathbb{P}(B)\\ &= e^{-5} \cdot 0{,}75 + e^{-1{,}25} \cdot 0{,}25 \approx 0{,}07668\end{aligned}$$

Wegen $\Gamma(1,\lambda) = \mathrm{Exp}(\lambda)$ (vgl. Abschnitt 4.7) gilt ferner

$$\mathbb{E}[Y|A] = \frac{1}{\lambda_A} = 2,\ \mathbb{E}[Y|B] = \frac{1}{\lambda_B} = 8,\ \mathbb{E}[Y^2|A] = \frac{2}{\lambda_A^2} = 8 \ \text{ und } \ \mathbb{E}[Y^2|B] = \frac{2}{\lambda_B^2} = 128.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Damit erhält man für den Erwartungswert und die Varianz von Y die folgenden Werte

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y|A]\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[Y|B]\,\mathbb{P}(B) = 2\cdot 0{,}75 + 8\cdot 0{,}25 = \frac{7}{2}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2\\ &= \mathbb{E}[Y^2|A]\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[Y^2|B]\,\mathbb{P}(B) - \left(\frac{7}{2}\right)^2\\ &= 8\cdot 0{,}75 + 128\cdot 0{,}25 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{103}{4}.\end{aligned}$$

Es werden nun die Zufallsvariablen $U \sim \operatorname{Exp}(2/7)$ und $V \sim \operatorname{LN}(0{,}68673;1{,}06398)$ betrachtet. Für diese beiden Zufallsvariablen gilt (einfach nachrechnen)

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[Y] = \frac{7}{2} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Var}(V) = \operatorname{Var}(Y) = \frac{103}{4}.$$

Beispiel (Fortsetzung)

D.h. U hat den gleichen Erwartungswert und V den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz wie Y. Für ihre Tailwahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(U > 10)$ und $\mathbb{P}(V > 10)$ gilt jedoch (vgl. (12))

$$\mathbb{P}(U > 10) = 1 - F_U(10) = e^{-20/7} \approx 0{,}0574$$

bzw. (vgl. (14))

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V > 10) = \mathbb{P}\left(\ln(V) > \ln(10)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\ln(V) - 0{,}68673}{1{,}06398} > \frac{\ln(10) - 0{,}68673}{1{,}06398}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(10) - 0{,}68673}{1{,}06398}\right) = 1 - \Phi(1{,}518689) \approx 0{,}0644.\end{aligned}$$

D.h. durch die Zufallsvariablen U und V wird die Tailwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 10)$ unterschätzt. Sie sind nicht in der Lage, die erhöhte Heterogenität im Portfolio aufgrund des Vorhandenseins von zwei unterschiedlichen Arten von Risiken zu erfassen.

Abschnitt 4.9

Loggammaverteilung

Die Loggammaverteilung besitzt auf dem rechten Tail mehr Wahrscheinlichkeitsmasse als die Lognormalverteilung. Sie wird deshalb oft zur Modellierung von großen und sehr großen Schadenhöhen eingesetzt.

Eine loggamma-verteilte Zufallsvariable Y ergibt sich durch exponentielle Transformation

$$Y = e^X$$

einer $\Gamma(\alpha, \beta)$-verteilten Zufallsvariablen X. Für die Verteilungsfunktion von Y gilt somit

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) \\ = \int_0^{\ln(y)} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \, dx \qquad \text{für } y > 1 \end{aligned}$$

(vgl. (11)) und durch Ableiten von F_Y mit der Kettenregel oder mit (31) erhält man daraus die Dichtefunktion der Loggammaverteilung.

Dies führt zur folgenden Definition:

Definition (Loggammaverteilung)

Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Loggammaverteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ (kurz: $Y \sim \mathrm{L}\Gamma(\alpha, \beta)$), wenn gilt

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \ln(y)^{\alpha-1} y^{-(\beta+1)} & \text{für } y > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.}$$

Es gilt somit per Definition

$$Y \sim \mathrm{L}\Gamma(\alpha, \beta) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(Y) \sim \Gamma(\alpha, \beta). \tag{15}$$

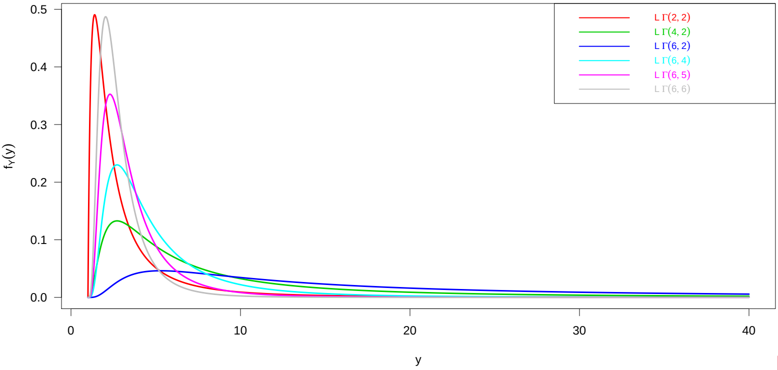
Damit und mit $M_{\ln(Y)}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$ für $t < \beta$ (vgl. Abschnitt 4.7) erhält man für die Momente von $Y \sim \mathrm{L}\Gamma(\alpha, \beta)$:

$$\boxed{\mathbb{E}[Y^n] = \mathbb{E}[e^{n \ln(Y)}] = M_{\ln(Y)}(n) = \left(\frac{\beta}{\beta - n}\right)^\alpha \quad \text{für } n < \beta}$$

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[Y]$	$\mathrm{Var}(Y)$	$V(Y)$
$\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\alpha}$ für $\beta>1$	$\left(\frac{\beta}{\beta-2}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{2\alpha}$ für $\beta>2$	$\frac{\left(\frac{\beta}{\beta-3}\right)^{\alpha}-3\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\alpha}\mathrm{Var}(Y)-\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{3\alpha}}{\mathrm{Var}(Y)^{3/2}}$ für $\beta>3$

$\mathrm{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\beta(\beta-2)}\right)^{\alpha}}-1$ für $\beta>2$	existiert nicht



Bemerkungen:

- Wegen (15) werden die Parameter α und β shapelog bzw. ratelog genannt.
- Da die Loggammaverteilung eine Verteilung auf $(1,\infty)$ ist, wird häufig nicht eine $\mathrm{L}\Gamma(\alpha,\beta)$-verteilte Zufallsvariable X betrachtet, sondern deren Translation

$$Y = X - 1.$$

Diese um -1 verschobene Zufallsvariable hat eine Verteilung auf $(0,\infty)$ und besitzt die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \ln(y+1)^{\alpha-1}(y+1)^{-(\beta+1)} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. (29)). Diese Verteilung wird als um -1 verschobene Loggammaverteilung bezeichnet.

Abschnitt 4.10

Inverse Gauss-Verteilung

Die Dichte der inversen Gauss-Verteilung wurde erstmals 1915 von dem österreichischen Physik-Nobelpreisträger ERWIN SCHRÖDINGER (1887–1961) bei der Bestimmung der ersten Durchgangszeit eines positiven Niveaus bei der Brownschen-Bewegung hergeleitet. Sie besitzt eine Reihe guter analytischer Eigenschaften.

Definition (Inverse Gauss-Verteilung)

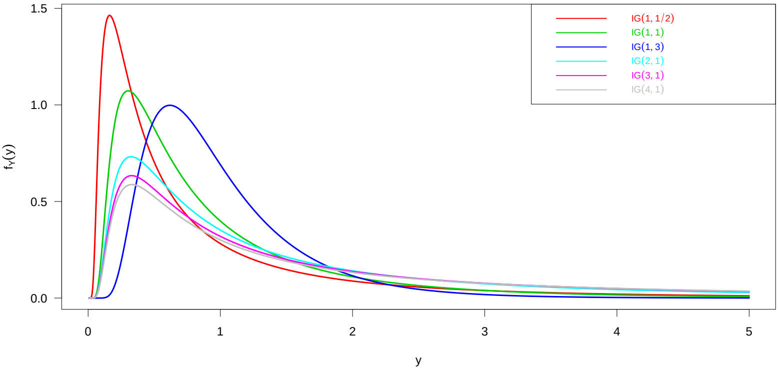
Eine Zufallsvariable Y besitzt eine inverse Gauss-Verteilung mit Mittelwert $\mu > 0$ und Shapeparameter $\lambda > 0$ (kurz: $Y \sim \mathrm{IG}(\mu, \lambda)$), wenn gilt

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}}\, e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 y}(y-\mu)^2} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.}$$

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[Y]$	$\mathrm{Var}(Y)$	$V(Y)$	$\mathrm{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
μ	$\frac{\mu^3}{\lambda}$	$3\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$	$e^{\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right)}$

Die Dichte der inversen Gauss-Verteilung ähnelt der Dichte der Gammaverteilung, besitzt aber tendenziell eine größere Schiefe und einen schärferen Gipfel, d.h. eine größere Kurtosis. Sie wird daher häufig eingesetzt, wenn eine sehr große Rechtsschiefe in den Daten vorliegt.



Die inverse Gauss-Verteilung besitzt die folgende Aggregationseigenschaft:

Satz (Aggregationseigenschaft der Inversen Gauss-Verteilung)

Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_m$ seien stochastisch unabhängig und $Y_j \sim \mathrm{IG}(\mu_j, \kappa\mu_j^2)$ für $j = 1, \ldots, m$ und $\kappa > 0$. Dann gilt

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j \sim \mathrm{IG}(\mu, \kappa\mu^2) \qquad \text{mit} \qquad \mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j.$$

Beweis: Der Nachweis erfolgt analog zum Beweis der entsprechenden Aussage für die Gammaverteilung (siehe Abschnitt 4.7). ■

Bemerkungen:

- Die inverse Gauss-Verteilung ist eine skalierungsinvariante Verteilung. Für $Y \sim \mathrm{IG}(\mu, \lambda)$ und $q > 0$ gilt (vgl. (30))

$$qY \sim \mathrm{IG}(q\mu, q\lambda).$$

- Für $\lambda \to \infty$ geht die inverse Gauss-Verteilung in eine Normalverteilung über.
- Die Verteilungsfunktion der inverse Gauss-Verteilung ist gegeben durch

$$F_Y(y) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{y}}\left(\frac{y}{\mu} - 1\right)\right) + e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\,\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{y}}\left(\frac{y}{\mu} + 1\right)\right) \qquad \text{für } y > 0.$$

Abschnitt 4.11

Weibull-Verteilung

Die Weibull-Verteilung ist nach dem schwedischen Ingenieur und Mathematiker ERNST H. W. WEIBULL (1887–1979) benannt, der sie 1951 als erster im Detail untersucht hat. Entdeckt wurde sie jedoch bereits 1927 von MAURICE FRÉCHET (1878–1973) als Spezialfall der sog. verallgemeinerten Extremwertverteilung. Sie wird z.B. zur Modellierung von Schadenhöhen und Lebensdauern verwendet.

Definition (Weibull-Verteilung)

Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Weibull-Verteilung mit Shapeparameter $a > 0$ und Scaleparameter $b > 0$ (kurz: $Y \sim \text{Weibull}(a,b)$), wenn gilt

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{a-1} e^{-(y/b)^a} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.}$$

Eine $\text{Weibull}(a,b)$-verteilte Zufallsvariable Y lässt sich als Potenz einer $\text{Exp}(1)$-verteilten Zufallsvariable X konstruieren. Genauer gilt

$$X \sim \text{Exp}(1) \quad \Longrightarrow \quad Y = bX^{1/a} \sim \text{Weibull}(a,b)$$

(vgl. (30) und (32)).

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[Y]$	$\mathrm{Var}(Y)$	$V(Y)$
$b\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)$	$b^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)$	$\frac{b^3\Gamma(1+3/a)-3b\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\mathrm{Var}(Y)-b^3\Gamma^3\left(1+\frac{1}{a}\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)^3}}$

$\mathrm{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
$\frac{\sqrt{\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n b^n}{n!}\Gamma\left(1+\frac{n}{a}\right)$ für $a \geq 1$

Eine Weibull(a,b)-verteilte Zufallsvariable Y besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-(y/b)^a} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{16}$$

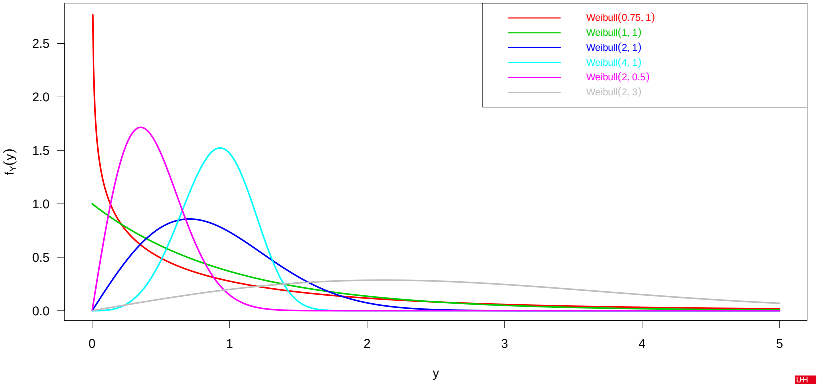
und für $y > 0$ die Tailwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y > y) = 1 - F_Y(y) = e^{-(y/b)^a}. \tag{17}$$

Ein Vergleich von (16) und (12) zeigt, dass für $a = 1$ eine $\mathrm{Exp}(1/b)$-Verteilung resultiert und die Weibull-Verteilung damit als Verallgemeinerung der Exponentialverteilung betrachtet werden kann. Für $a > 1$ besitzt sie auf dem rechten Tail weniger und für $a < 1$ mehr Masse als die Exponentialverteilung.

Die Gestalt der Weibull-Verteilung verändert sich stark mit a:

- Für $0 < a < 1$ ist $f_Y(y)$ streng monoton fallend mit $f_Y(y) \uparrow \infty$ für $y \downarrow 0$.
- Für $a = 1$ ist $f_Y(y)$ streng monoton fallend mit $f_Y(y) \uparrow \frac{1}{b}$ für $y \downarrow 0$.
- Für $a > 1$ ist $f_Y(y)$ monoton wachsend und anschließend monoton fallend mit $f_Y(y) \downarrow 0$ für $y \downarrow 0$.



Bemerkungen:

- Die Weibull-Verteilung ist eine skalierungsinvariante Verteilung. Für $Y \sim \text{Weibull}(a,b)$ und $q > 0$ gilt (vgl. (30))
$$qY \sim \text{Weibull}(a,qb).$$
- Für $a = 2$ erhält man aus der Weibull-Verteilung die sog. Rayleigh-Verteilung und für $a = 3{,}602$ ergibt sich eine Verteilung mit verschwindender Schiefe, welche der Normalverteilung ähnelt.

Beispiel (Weibull-Verteilung)

Aus $X \sim \text{Weibull}(a,b)$ folgt $Y = \left(\frac{1}{b}X\right)^a \sim \text{Exp}(1)$. Denn für $y > 0$ gilt: (vgl. (12))

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{b}X\right)^a \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq by^{1/a}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{b}by^{1/a}\right)^a} = 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

Abschnitt 4.12

Pareto-Verteilung

Die Pareto-Verteilung ist nach dem italienischen Ökonom, Soziologen und Begründer der Wohlfahrtsökonomik VILFREDO F. PARETO (1848–1923) benannt, der sie zur Beschreibung der Vermögens- und Einkommensverteilung verwendete. In der Risikotheorie wird sie häufig zur Modellierung von großen und sehr großen Schadenhöhen eingesetzt.

Es existieren verschiedene Varianten der Pareto-Verteilung. In der Risikotheorie ist die folgende Pareto-Verteilung vom Typ II – auch amerikanische Pareto-Verteilung genannt (vgl. RYTGAARD (1990)) – am verbreitetsten.

Definition (Pareto-Verteilung)

Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Pareto-Verteilung mit dem Shapeparameter $\alpha > 0$ und dem Scaleparameter $\lambda > 0$ (kurz: $Y \sim \mathrm{Par}(\alpha, \lambda)$), wenn gilt

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+y)^{\alpha+1}} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.} \tag{18}$$

Wichtige Kennziffern:

$\mathbb{E}[Y]$	$\operatorname{Var}(Y)$	$V(Y)$
$\frac{\lambda}{\alpha-1}$ für $\alpha > 1$	$\frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ für $\alpha > 2$	$\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)^{1/2}$ für $\alpha > 3$

$\operatorname{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}$ für $\alpha > 2$	existiert nicht

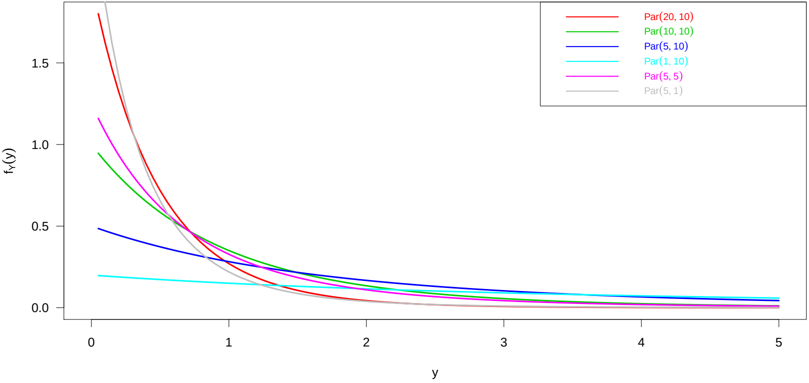
Eine $\operatorname{Par}(\alpha,\lambda)$-verteilte Zufallsvariable Y besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^{\alpha} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{19}$$

und für $y > 0$ die Tailwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y > y) = 1 - F_Y(y) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^{\alpha}. \tag{20}$$

Der rechte Tail einer Pareto-Verteilung verhält sich folglich wie $cy^{-\alpha}$ für $y \to \infty$. Er läuft daher langsamer aus als bei einer Gamma-, Exponential-, Lognormal-, inverse Gauss- und Weibull-Verteilung und besitzt umso mehr Masse, desto kleiner $\alpha > 0$ ist.



Anstelle einer Par(α,λ)-verteilten Zufallsvariablen X wird häufig die verschobene Zufallsvariable $Y = X + c$ mit der Dichte

$$f_Y(y) = f_X(y-c) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+y-c)^{\alpha+1}} & \text{für } y > c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet (vgl. (29)). Wird speziell $c = \lambda$ gewählt, resultiert die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{y^{\alpha+1}} & \text{für } y > \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{y}\right)^\alpha & \text{für } y > \lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Diese Variante wird als Pareto-Verteilung vom Typ I oder europäische Pareto-Verteilung bezeichnet (kurz: $Y \sim \text{Par}^*(\alpha,\lambda)$). Es besteht der einfache Zusammenhang

$$Y \sim \text{Par}(\alpha,\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad Y + \lambda \sim \text{Par}^*(\alpha,\lambda).$$

Die Pareto-Verteilung vom Typ I wird verwendet, falls nur Schadenhöhen ab einem bestimmten Schwellenwert (Threshold) λ betrachtet werden sollen. Bei λ handelt es sich dann um keinen Parameter, der aus den Daten geschätzt werden muss, sondern ist durch die konkrete Anwendung vorgegeben.

Bemerkungen:

- Die Pareto-Verteilung ist eine skalierungsinvariante Verteilung. Für $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ und $q > 0$ gilt (vgl. (30))
$$qY \sim \text{Par}(\alpha, q\lambda).$$
- Die Pareto-Verteilung besitzt die Conditional-Tail-Eigenschaft
$$Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda) \quad \Longrightarrow \quad Y - y_0 | Y > y_0 \sim \text{Par}(\alpha, \lambda + y_0). \tag{21}$$
D.h. gegeben, dass $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ einen Schwellenwert (Threshold) y_0 überschreitet, ist die Überschreitung $Y - y_0$ wieder Pareto-verteilt, allerdings mit dem neuen Scale-Parameter $\lambda + y_0$. Diese Eigenschaft ist z.B. in der Rückversicherung von großer Bedeutung.
- Da die Pareto-Verteilung für kleine α auf dem rechten Tail sehr viel Wahrscheinlichkeitsmasse besitzt, wird in der Praxis häufig die gestutzte Version
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + y}\right)^{\alpha} & \text{für } 0 < y \leq M \\ 1 & \text{für } y > M \end{cases}$$
verwendet. Der Stutzungspunkt M wird als MPL (Maximum Possible Loss) bezeichnet.

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Die Exponentialverteilung ist ein Grenzfall der Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}(\alpha, \beta\alpha)$ für $\alpha \to \infty$. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha(\beta\alpha)^\alpha}{(\beta\alpha+y)^{\alpha+1}} &= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha(\beta\alpha)^\alpha}{(\beta\alpha)^\alpha \left(1+\frac{y/\beta}{\alpha}\right)^\alpha \alpha\left(\beta+\frac{y}{\alpha}\right)} \\ &= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{y/\beta}{\alpha}\right)^\alpha \left(\beta+\frac{y}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{\beta e^{y/\beta}} = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}\end{aligned}$$

  und somit

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{Par}(\alpha, \beta\alpha) = \mathrm{Exp}(1/\beta). \tag{22}$$

  Da der Shape-Parameter α die „Gefährlichkeit“ der Pareto-Verteilung bestimmt, besagt dieses Ergebnis, dass es sich bei der Exponential-Verteilung um die „ungefährlichste“ Pareto-Verteilung handelt.

- Mittels (31) und (30) erhält man

$$X \sim \mathrm{Exp}(\alpha) \quad \Longrightarrow \quad Y = \lambda e^X - \lambda \sim \mathrm{Par}(\alpha, \lambda).$$

Beispiel (Pareto-Verteilung)

Für $Y \sim \text{Par}(5,360)$ sei $\mathbb{E}[Y|Y>80]$ und $\mathbb{E}[Y|Y<80]$ zu berechnen. Aus der Conditional-Tail-Eigenschaft (21) folgt $Y-80|Y>80 \sim \text{Par}(5,440)$ und somit

$$\mathbb{E}[Y|Y>80] = 80 + \mathbb{E}[Y-80|Y>80] = 80 + \frac{440}{5-1} = 190.$$

Ferner gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y|Y>80]\,\mathbb{P}(Y>80) + \mathbb{E}[Y|Y\leq 80]\,\mathbb{P}(Y\leq 80).$$

Zusammen mit

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{360}{5-1} = 90,\ \mathbb{P}(Y>80) = \left(\frac{360}{360+80}\right)^5 \text{ und } \mathbb{P}(Y\leq 80) = 1 - \left(\frac{360}{360+80}\right)^5$$

(vgl. (20)) folgt daraus

$$\mathbb{E}[Y|Y<80] = \mathbb{E}[Y|Y\leq 80] = \frac{\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y|Y>80]\,\mathbb{P}(Y>80)}{\mathbb{P}(Y\leq 80)} = 32{,}10996.$$

Abschnitt 4.13

Burr-Verteilung

Die Burr-Verteilung ist nach dem amerikanischen Statistiker IRVING W. BURR (1908–1989) benannt und auch unter dem Namen Pareto-Verteilung vom Typ IV bekannt. Aufgrund ihrer drei Parameter zeichnet sie sich durch eine große Flexibilität aus. In der Risikotheorie wird sie zur Modellierung von großen und sehr großen Schadenhöhen herangezogen.

Für $\alpha, \gamma, \theta > 0$ ergibt sich eine Burr-verteilte Zufallsvariable Y durch Potenztransformation

$$Y = X^{1/\gamma} \tag{23}$$

einer $\mathrm{Par}(\alpha, \theta^\gamma)$-verteilten Zufallsvariablen X. Mit (32) und (18) erhält man für die Dichte von Y für $y > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \gamma y^{\gamma-1} \frac{\alpha(\theta^\gamma)^\alpha}{(\theta^\gamma + y^\gamma)^{\alpha+1}} \\ &= \gamma y^{\gamma-1} \frac{\alpha(\theta^\gamma)^\alpha}{(\theta^\gamma)^{\alpha+1}(1+(y/\theta)^\gamma)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha\gamma y^{\gamma-1}}{\theta^\gamma(1+(y/\theta)^\gamma)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Dies führt zur folgenden Definition:

Definition (Burr-Verteilung)

Eine Zufallsvariable Y besitzt eine Burr-Verteilung mit den beiden Shapeparametern $\alpha > 0$ und $\gamma > 0$ und dem Scaleparameter $\theta > 0$ (kurz: $Y \sim \text{Burr}(\alpha, \gamma, \theta)$), wenn gilt

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\alpha\gamma y^{\gamma-1}}{\theta^\gamma(1+(y/\theta)^\gamma)^{\alpha+1}} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.} \tag{24}$$

Es gilt somit per Definition

$$Y \sim \text{Burr}(\alpha, \gamma, \theta) \quad \Longleftrightarrow \quad Y^\gamma \sim \text{Par}(\alpha, \theta^\gamma).$$

Mit (19) und (23) folgt für die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X^{1/\gamma} \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y^\gamma) \\ &= \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{1+(y/\theta)^\gamma}\right)^\alpha & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für $y > 0$ die Tailwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y > y) = 1 - F_Y(y) = \left(\frac{1}{1 + (y/\theta)^\gamma}\right)^\alpha. \tag{25}$$

Wichtige Kennziffern:

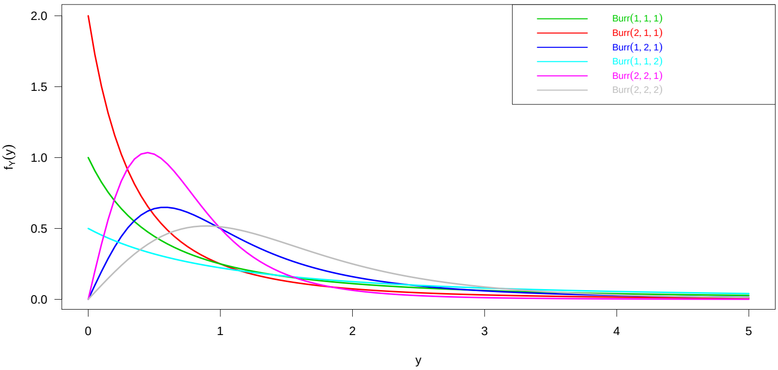
$\mathbb{E}[Y]$	$\mathrm{Var}(Y)$
$\frac{\theta\Gamma(1+1/\gamma)\Gamma(\alpha-1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}$ für $\alpha\gamma > 1$	$\frac{\theta^2\Gamma(\alpha)\Gamma(1+2/\gamma)\Gamma(\alpha-2/\gamma)-\Gamma^2(1+1/\gamma)\Gamma^2(\alpha-1/\gamma)}{\Gamma^2(\alpha)}$ für $\alpha\gamma > 2$

$\mathrm{Vko}(Y)$	$M_Y(t)$
$\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+2/\gamma)\Gamma(\alpha-2/\gamma)}{\Gamma^2(1+1/\gamma)\Gamma^2(\alpha-1/\gamma)} - 1}$ für $\alpha\gamma > 2$	existiert nicht

Die Burr-Verteilung umfasst eine Reihe von bekannten Verteilungen als Spezialfälle. Zum Beispiel erhält man:

- Pareto-Verteilung vom Typ II für $\gamma = 1$ (vgl. Abschnitt 4.12)
- Paralogistische Verteilung für $\alpha = \gamma$
- Fisk-Verteilung (log-logistische Verteilung) für $\alpha = 1$

Der Shapeparameter α beeinflusst nur den rechten Tail, während der Shapeparameter γ auf beide Tails der Verteilungsfunktion einen Einfluss hat.



Beispiel (Vergleich Tailwahrscheinlichkeiten)

Die folgende Tabelle zeigt die Tailwahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(Y \geq 5000)$, $\mathbb{P}(Y \geq 10000)$ und $\mathbb{P}(Y \geq 15000)$ für 16 ausgewählte Schadenhöhenverteilungen.

Verteilung	$\mathbb{P}(Y \geq 5000)$	$\mathbb{P}(Y \geq 10000)$	$\mathbb{P}(Y \geq 15000)$
$\mathrm{Exp}(0{,}001)$	0,00673795	0,00004540	0,00000031
$\Gamma(0{,}5;0{,}0005)$	0,02534732	0,00156540	0,00010751
$\mathrm{LN}(6{,}10304;1{,}26864)$	0,02852381	0,00715639	0,00281210
$\mathrm{LN}(5{,}75646;1{,}51743)$	0,03442918	0,01141887	0,00548986
$\mathrm{L}\Gamma(5;1{,}33545)$	0,01171367	0,00615775	0,00419098
$\mathrm{L}\Gamma(20;3{,}42402)$	0,03060827	0,01144430	0,00617022
$\mathrm{IG}(1000;500)$	0,02442103	0,00318506	0,00055424
$\mathrm{IG}(1000;200)$	0,04019162	0,01218938	0,00474499
$\mathrm{Weibull}(0{,}5;500)$	0,04232922	0,01142289	0,00418091
$\mathrm{Weibull}(0{,}3;107{,}985)$	0,04242732	0,02043777	0,01235644

Beispiel (Forsetzung)

Verteilung	$\mathbb{P}(Y \geq 5000)$	$\mathbb{P}(Y \geq 10000)$	$\mathbb{P}(Y \geq 15000)$
Par(1,5; 500)	0,02741012	0,01039133	0,00579372
Par(0,8; 500)	0,14685402	0,08754363	0,06410777
Par(0,5; 1000)	0,40824830	0,30151130	0,25000000
Burr(2; 1,5; 1240,494)	0,01209674	0,00175243	0,00053963
Burr(1,5; 1; 500)	0,02741012	0,01039133	0,00579372
Burr(1; 1; 1000)	0,50000000	0,33333333	0,25000000

Die Exponential-, Gamma-, Lognormal-, Loggamma-, Inverse Gauss- und Weibull-Verteilungen haben alle den Erwartungswert 1000. Das Gleiche gilt für die erste Pareto- und die ersten beiden Burr-Verteilungen. Die zweite und dritte Pareto- sowie die dritte Burr-Verteilung besitzen dagegen keine endlichen Momente. Die Standardabweichungen (gerundet auf ganze Werte) sind der Reihe nach gegeben durch 1000, 1414, 2000, 3000, ∞, 6380, 1414, 2236, 2240, 5410, ∞, ∞, ∞, 1217, ∞ und ∞.

Abschnitt 4.14

Transformation von Zufallsvariablen

Der Transformationssatz für Dichtefunktionen ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung von Dichtefunktionen transformierter absolutstetiger Zufallsvariablen:

Satz (Transformationssatz für Dichtefunktionen)

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}$ und $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare sowie streng monotone Funktion mit $g' \neq 0$ und $\mathscr{R} \subseteq D$. Dann besitzt $Y = g(X)$ den Wertebereich $g(\mathscr{R})$ und die Dichtefunktion

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|} & \text{für } y \in g(\mathscr{R}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.} \tag{26}$$

Beweis: Die Zufallsvariable Y besitzt offensichtlich den Wertebereich $g(\mathscr{R})$, so dass insbesondere

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{für} \quad y < \inf g(\mathscr{R}) \qquad \text{und} \qquad F_Y(y) = 1 \quad \text{für} \quad y > \sup g(\mathscr{R})$$

gilt. Nach Voraussetzung ist g streng monoton. OBdA sei angenommen, dass g (und damit insbesondere auch g^{-1}) streng monoton wachsend ist. Für $y \in g(\mathscr{R})$ folgt dann

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)). \tag{27}$$

Ferner sei $x \in \mathscr{R}$ beliebig gewählt und $y = g(x)$. Dann erhält man durch Ableiten von $g^{-1}(g(x)) = x$ mittels Kettenregel $(g^{-1})'(g(x))g'(x) = 1$ und damit

$$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} \qquad \text{bzw.} \qquad (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}. \tag{28}$$

Beweis (Fortsetzung): Ableiten von (27) mittels Kettenregel und Einsetzen von (28) liefert schließlich für die Dichte

$$f_Y(y) = \left(F_X\left(g^{-1}(y)\right)\right)' = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'\left(g^{-1}(y)\right)}.$$

Im Fall einer streng monoton fallenden Funktion g erhält man völlig analog $f_Y(y) = -\frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'\left(g^{-1}(y)\right)}$. Unter Berücksichtigung von $g' < 0$ liefert dies schließlich die Behauptung (26). ■

Wichtige Transformationen sind z.B.:

a) Verschiebung: $Y = X + c$

Für $y = g(x) = x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt $g'(x) = 1$ und $g^{-1}(y) = y - c$. Für die Dichte der Zufallsvariablen $Y = X + c$ folgt somit

$$f_Y(y) = f_X(y - c). \tag{29}$$

b) Affin-lineare Transformation: $Y = aX + b$

Für $y = g(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ gilt $g'(x) = a$ und $g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$. Für die Dichte der Zufallsvariablen $Y = aX + b$ folgt daher

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \tag{30}$$

c) Exponentielle Transformation: $Y = e^X$

Für $y = g(x) = e^x$ gilt $g'(x) = e^x$ und $g^{-1}(y) = \ln(y)$ für $y > 0$. Für die Dichte der Zufallsvariablen $Y = e^X$ folgt somit

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) \quad \text{für } y > 0. \tag{31}$$

d) Logarithmische Transformation: $Y = \ln(X)$

Für $y = g(x) = \ln(x)$ mit $x > 0$ gilt $g'(x) = \frac{1}{x}$ und $g^{-1}(y) = e^y$. Für die Dichte der Zufallsvariablen $Y = \ln(X)$ folgt daher

$$f_Y(y) = e^y f_X(e^y).$$

e) Potenztransformation: $Y = X^{1/c}$

Für $y = g(x) = x^{1/c}$ mit $x > 0$ und $c \neq 0$ gilt $g'(x) = \frac{1}{c} x^{1/c-1}$ und $g^{-1}(y) = y^c$. Für die Dichte der Zufallsvariablen $Y = X^{1/c}$ folgt somit

$$f_Y(y) = |c| y^{c-1} f_X(y^c) \quad \text{für } y > 0. \tag{32}$$

Im Falle von $c = -1$ spricht man von inverser Verteilung.

Abschnitt 4.15

Literatur

- EMBRECHTS, P., GOLDIE, C., VERAVERBEKE, N. (1979). *Subexponentiality and infinite divisibility.* Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 49, p. 335–347.
- FOSS, S., KONSTANTOPOULOS, T., ZACHARY, S. (2007). *Discrete and continuous time modulated random walks with heavy-tailed increments.* Journal of Theoretical Probability, 20/3, p. 581–612.
- HEILMANN, W.-R., SCHRÖTER, K. J. (2014). *Grundbegriffe der Risikotheorie.* Verlag Versicherungswirtschaft GmbH.
- JOHNSON, N. L., KEMP, A. W., KOTZ, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions.* Wiley.
- JOHNSON, N. L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions, Band 1.* Wiley.
- JOHNSON, N. L., KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N (1995). *Continuous Univariate Distributions, Band 2.* Wiley.

KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., WILMOTT, G. E. (2012). *Loss Models: From Data to Decisions.* Wiley.

MERZ, M., WÜTHRICH, M. V. (2013). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen.* Vahlen Verlag.

WÜTHRICH, M. V. (2013). *Non-Life Insurance: Mathematics & Statistics (December 2, 2013).* http://ssrn.com/abstract=2319328.