

Quantitatives Risikomanagement 1

WS 2025

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg



Kapitel 6

Risikoteilung

Abschnitt 6.1

Einleitung

6. Risikoteilung

6.1 Einleitung

Ganz allgemein spricht man von **Risikoteilung**, wenn ein Versicherungsunternehmen Risiken nur zum Teil übernimmt oder wenn es die übernommenen Risiken ganz oder teilweise an andere Versicherungsunternehmen transferiert. Es gibt mehrere Gründe, weshalb eine Risikoteilung für ein Versicherungsunternehmen vorteilhaft sein kann.

Für Versicherungsunternehmen sind vor allem die folgenden drei Arten klassischer Risikoteilung von Bedeutung:

a) **Risikoteilung in der Erstversicherung zwischen Versicherungsnehmer (VN) und Versicherungsunternehmen (VU)**

Bei dieser Art der Risikoteilung verbleibt ein Teil des Risikos beim Versicherungsnehmer in Form von **prozentualen** oder **absoluten Selbstbehalten** und nur das darüberhinausgehende Risiko wird vom Versicherungsunternehmen übernommen. Gründe für diese Art der Risikoteilung sind:

- Ausschluss von Kleinschäden zur Verringerung der Verwaltungs- und Regulierungskosten
- Verringerung des moralischen Risikos (Moral Hazard)

6. Risikoteilung

6.1 Einleitung

b) Risikoteilung in der Rückversicherung zwischen Erstversicherer und Rückversicherer:

Bei dieser Art der Risikoteilung **transferiert (zediert)** ein Versicherungsunternehmen Teile seiner übernommenen Risiken an andere Versicherer. Dieser Vorgang wird als **Rückversicherung** bezeichnet. Das Versicherungsunternehmen, das Teile seiner übernommenen Risiken abgibt, wird als **Erstversicherer (EV)** oder **Zedent** bezeichnet und das Versicherungsunternehmen, das die Risiken übernimmt, wird **Rückversicherer (RV)** oder **Zessionär** genannt. Der vom Erstversicherer abgegebene Risikoanteil wird als **Zession** bezeichnet. Gründe für diese Art der Risikoteilung sind:

- Verringerung des versicherungstechnischen Risikos
- Erhöhung der Zeichnungskapazität
- Risikogebundenes Eigenkapital wird durch Rückversicherung freigesetzt
- Verbesserung des Diversifikationseffekts im verbleibenden Selbstbehalt

c) Risikoteilung zwischen Erstversicherer und Erstversicherer:

Bei dieser Art der Risikoteilung versichern mehrere Erstversicherer rechtlich selbstständig ein Risiko und haften gemäß ihres Anteils an der Gesamtversicherungssumme. Die Gründe für diese als **Mitversicherung** bezeichnete Risikoteilung sind dieselben wie für b).

6. Risikoteilung

6.1 Einleitung

Weiter unterscheidet man zwischen **fakultativer**, **obligatorischer** und **fakultativ-obligatorischer Rückversicherung**:

- **Fakultative Rückversicherung**: Die Abgabe des Risikos durch den Erstversicherer und die Annahme des Risikos durch den Rückversicherer erfolgt freiwillig. Der Rückversicherer hat vor Vertragsabschluß die Möglichkeit die Risiken zu prüfen.
- **Obligatorische Rückversicherung**: Der Erstversicherer muss alle Risiken, welche die Kapazität des Rückversicherers nicht übersteigen, in die Rückversicherungsdeckung geben. Der Rückversicherer ist dabei verpflichtet jedes vom Erstversicherer gezeichnete Risiko ohne Vorprüfung zu übernehmen.
- **Fakultativ-obligatorische Rückversicherung**: Der Erstversicherer hat die Möglichkeit nur ausgewählte Risiken in Rückversicherungsdeckung zu geben. Der Rückversicherer ist dann verpflichtet diese Risiken zu übernehmen.

Erwirbt ein Erstversicherer Rückversicherungsschutz spricht man von **aktiver Rückversicherung**, während das Angebot an Rückversicherungsschutz als **passive Rückversicherung** bezeichnet wird.

6. Risikoteilung

6.1 Einleitung

Analog zu einem Erstversicherer kann auch ein Rückversicherer einen Teil seiner übernommenen Risiken zu anderen Versicherungsunternehmen transferieren. Man spricht dann von **Retrozession** und der abgebende Rückversicherer wird als **Retrozedent** und der annehmende Rückversicherer als **Retrozessionär** bezeichnet. Durch Retrozession soll das Gesamtrisiko unter mehreren Rückversicherern so aufgeteilt werden, dass für jeden Rückversicherer sein Risikoanteil tragbar ist und in seinem Bestand ein Ausgleich der Risiken stattfindet.

Die vorgestellten **klassischen Formen der Risikoteilung** haben gemeinsam, dass der Risikotransfer mit Hilfe versicherungstechnischer Instrumentarien erfolgt und Versicherungsunternehmen als Risikoträger fungieren.

Erfolgt der Risikotransfer mit Hilfe von kapitalmarktspezifischen Instrumentarien, dann spricht man von einem **alternativen Risikotransfer (ART)** und die Risikoträger sind in diesem Fall ausgewählte Teilnehmer am Kapitalmarkt.

6. Risikoteilung

6.1 Einleitung

Da sich die drei Formen der Risikoteilung aus mathematischer Sicht nicht groß unterscheiden, werden sie i.d.R. zusammen behandelt. Die Formulierungen beziehen sich dennoch häufig auf die Risikoteilung zwischen Erstversicherer und Rückversicherer, d.h. auf die **Rückversicherung**, welche im Folgenden auch im Mittelpunkt steht. Eine ausführlichere Darstellung der Grundlagen der Rückversicherung ist z.B. in LIEBWEIN (2009), GORGE (2013) und DIENST (1988) zu finden.



Die weltweit zehn größten Rückversicherer (Life & Nonlife) 2021 nach gebuchten Bruttoprämien in Mrd. US-Dollar:



	Rückversicherer	Land	Bruttoprämie
1	Munich Re	Deutschland	46,836
2	Swiss Re	Schweiz	39,202
3	Hannover Re	Deutschland	31,443
4	Canada Life Re	Kanada	23,547
5	SCOR	Frankreich	19,933
6	General Insurance (Berkshire Hathaway)	USA	19,906
7	Lloyd's	UK	19,343
8	China Reinsurance	China	17,808
9	Reinsurance Group of America	USA	13,348
10	Everest Re Group	Bermuda	9,067

(Quelle: A. M. BEST (2021))

Abschnitt 6.2

Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Bei einer Risikoteilung handelt es sich **Formal** um die additive Zerlegung eines Risikos $Y \geq 0$ gemäß

$$Y = (Y - g(Y)) + g(Y),$$

wobei $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine monoton wachsende Funktion mit der Eigenschaft

$$0 \leq g(y) \leq y$$

ist. Die Funktion g wird als **Erstattungsfunktion** bezeichnet und bei

$$\underline{Y} := Y - g(Y) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{Y}} := g(Y)$$

handelt es sich dann um den **Selbstbehalt (Erstrisiko)** bzw. das **transferierte Risiko (Zweitrisiko)**.

Im Wesentlichen unterscheidet man nur die beiden folgenden Arten von Risikoteilung:

- a) **Proportionale Risikoteilung**
- b) **Nichtproportionale Risikoteilung**

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

a) Proportionale Risikoteilung

Bei der proportionalen Risikoteilung ist die Erstattungsfunktion von der Form

$$g(y) = (1 - c)y \quad \text{mit} \quad c \in (0, 1),$$

wobei c als **Selbstbehaltsanteil** und $(1 - c) \in (0, 1)$ als **Quote** bezeichnet werden. D.h. es gilt

$$\underline{Y} = cY \quad \text{und} \quad \underline{\underline{Y}} = (1 - c)Y.$$

Die proportionale Risikoteilung weist die folgenden **Merkmale** auf:

- Sie hat eine einfache Struktur und Wirkungsweise.
- Bei jedem Schaden sind beide Parteien beteiligt.
- Ihre quantitative Analyse ist vergleichsweise einfach.
- Sie ist unflexibel und weniger gut geeignet für das Erreichen gezielter Entlastungseffekte.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Proportionale Risikoteilung zwischen VN und VU)

- a) **Prozenttarife:** Der Erstversicherer erstattet dem Versicherten nur einen vereinbarten Prozentsatz des Schadens. Prozenttarife kommen z.B. häufig in der privaten Krankenversicherung vor, wenn Versicherungsnehmer einen prozentalen Selbstbehalt tragen.
- b) **Unterversicherung:** Der Erstversicherer erstattet dem Versicherten Schäden nur anteilig, falls die vereinbarte Versicherungssumme nicht dem vollen Wert der versicherten Sache entspricht. Unterversicherung kommt z.B. relativ oft in der Hausratsversicherung vor.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Proportionale Risikoteilung zwischen VU und RV)

- a) **Quoten-Rückversicherung (Quota-share reinsurance):** Der Rückversicherer übernimmt eine feste Quote $1 - c$ von allen Risiken im Portfolio und erhält dafür dieselbe Quote von allen Prämien. Diese Form der Risikoteilung eignet sich, wenn viele kleine und mittelgroße Schäden auftreten. D.h. sie bietet gegen das Frequenzrisiko Schutz und kommt vor allem in Massensparten wie z.B. der Kfz-, Haftpflicht-, Wohngebäude-, Kredit-, Hagel-, Sturm- und Hausratsversicherung zur Anwendung. Sie wirkt jedoch auch in Schadenbereichen, in denen der Erstversicherer eigentlich keinen Versicherungsschutz benötigt, da er diese Risiken selbst tragen kann.
- b) **Summenexzedenten-Rückversicherung (Surplus reinsurance):** Während bei der Quoten-Rückversicherung das Aufteilungsverhältnis $c : (1 - c)$ für alle Risiken gleich ist, variiert es bei der Summenexzedenten-Rückversicherung in Abhängigkeit von der Versicherungssumme v_i eines Risikos. Der Selbstbehaltsanteil ist

$$c_i := \min \left\{ \frac{M}{v_i}, 1 \right\},$$

und der Erstversicherer trägt somit alle Risiken mit $v_i \leq M$ selbst.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Der Rückversicherer ist bei allen Risiken mit $v_i > M$ mit der Quote $1 - c_i$ beteiligt. Es gilt daher:

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^n c_i Y_i \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^n (1 - c_i) Y_i$$

D.h. analog zur Quoten-Rückversicherung werden bei einem Risiko mit Versicherungssumme v_i Schäden und Prämien im Verhältnis $c_i : (1 - c_i)$ aufgeteilt, wobei sich jedoch für jedes Risiko eine andere Quote ergeben kann. Der Parameter M wird dabei als globaler Selbstbehalt bezeichnet.

Im Gegensatz zur Quoten-Rückversicherung wirkt die Summenexzedenten-Rückversicherung nur auf große Risiken, so dass sie vor allem Schutz gegen das Großschadenrisiko bietet. Die Bezeichnung „Summenexzedenten-Rückversicherung“ rührt daher, dass für die Leistung des Rückversicherers die Versicherungssumme v_i ausschlaggebend ist.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

b) Nichtproportionale Risikoteilung

Unter der Bezeichnung **nichtproportionale Risikoteilung** werden alle anderen Formen der Risikoteilung verstanden. Bei dem weitaus wichtigsten Ansatz ist die Erstattungsfunktion durch

$$g(Y) = \max \{Y - d, 0\},$$

gegeben, wobei $d \geq 0$ als **Selbstbehaltsgrenze** oder **Priorität** (engl. priority) bezeichnet wird. D.h. es gilt

$$\underline{Y} = \min \{Y, d\} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{Y}} = \max \{Y - d, 0\}. \quad (1)$$

Speziell in der Rückversicherung werden der Selbstbehalt $\underline{Y}$ und das transferierte Risiko $\underline{\underline{Y}}$ häufig auch als **Erstrisiko** bzw. **Zweitrisiko** bezeichnet.

Die nichtproportionale Risikoteilung weist die folgenden **Merkmale** auf:

- Sie hat eine kompliziertere Struktur und Wirkungsweise.
- Es sind nicht bei jedem Schaden beide Parteien beteiligt.
- Ihre quantitative Analyse ist anspruchsvoller.
- Sie bietet flexible Gestaltungsmöglichkeiten und ermöglicht das Erreichen gezielter Entlastungseffekte.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Nichtproportionale Risikoteilung zwischen VN und VU)

- a) **Abzugsfranchise:** Der Versicherungsnehmer trägt jeden Schaden bis zur Selbstbehaltsgrenze d selbst und der Erstversicherer übernimmt nur den darüber hinausgehenden Teil. D.h. es gilt

$$\underline{Y} = \min \{Y, d\} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{Y}} = \max \{Y - d, 0\}.$$

Sie kommt z.B. in der Haftpflicht-, Unfall-, Kfz-, Betriebsunterbrechungs- und Feuer-Versicherung zur Anwendung.

Zur Abdeckung des Frequenzrisikos des Versicherungsnehmers kann zusätzlich ein Jahreslimit D ergänzt werden, so dass der jährliche Selbstbehalt des Versicherungsnehmers durch D nach oben beschränkt ist. D.h. es gilt dann

$$\underline{S} = \min \left\{ D, \sum_{i=1}^N \min \{Y_i, d\} \right\} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N Y_i - \underline{S}.$$

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

- b) **Integralfranchise:** Hier trägt der Erstversicherer den ganzen Schaden, falls dieser die Selbstbehaltsgrenze d übersteigt. D.h. es gilt

$$\underline{Y} = \begin{cases} Y & \text{für } Y \leq d \\ 0 & \text{für } Y > d \end{cases} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{Y}} = \begin{cases} 0 & \text{für } Y \leq d \\ Y & \text{für } Y > d \end{cases}.$$

Diese Form der Risikoteilung ist weniger gebräuchlich, da sie Moral Hazard forciert. Sie ist vor allem in der Transportversicherung anzutreffen. Vereinzelt kommt sie aber auch in der Haftpflicht-, Berufsunfähigkeits-, Unfall- und Pflegeversicherung zum Einsatz.

- c) **Jahresfranchise:** In diesem Fall bezieht sich die Selbstbehaltsgrenze d nicht auf Einzelschäden, sondern auf die Summe aller Schäden eines Jahres. D.h. das Versicherungsunternehmen übernimmt den Anteil des Jahresgesamtschadens, der den Selbstbehalt d überschreitet. Eine Jahresfranchise kommt z.B. in der privaten Krankenversicherung zur Anwendung.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

- d) **Erstrisikodeckung:** Das Versicherungsunternehmen übernimmt den Anteil jedes Einzelschadens Y_i , der die vereinbarte Deckungssumme h nicht übersteigt. D.h. es gilt

$$\underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N \min \{Y_i, h\} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N \max \{Y_i - h, 0\}$$

Hier trägt also das Versicherungsunternehmen das Erstrisiko und der Versicherungsnehmer das Zweitrisko. Der Versicherungsnehmer ist hier dem Risiko ausgesetzt, dass die vereinbarte Deckungssumme h zu tief angesetzt wurde und er den darüberliegenden Schadenanteil selbst bezahlen muss. Diese Form der Risikoteilung ist in verschiedenen Arten der Haftpflichtversicherung anzutreffen. Dabei wird dann die Deckungssumme h i.d.R. so hoch angesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Schaden mit einer Schadenhöhe größer als h , sehr klein ist.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Nichtproportionale Risikoteilung zwischen VU und RV)

Das Analogon zur Franchise in der Erstversicherung ist in der Rückversicherung die **Schadenexzedenten-Rückversicherung** (engl. Excess-of-loss reinsurance bzw. XL-reinsurance). Die Selbstbehaltsgrenze $d \geq 0$ wird in diesem Zusammenhang i.d.R. Priorität genannt. Die Bezeichnung Schadenexzedenten-Rückversicherung drückt aus, dass die Leistung durch den Rückversicherer ausschließlich durch die Schadenhöhe bestimmt wird. Je nach gedecktem Risiko unterscheidet man die folgenden Arten von XL-Rückversicherungen:

- a) **Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung (Excess-of-loss per risk, Working-XL)**: Hier trägt der Erstversicherer jeden Schaden bis zur Priorität d selbst, während der Rückversicherer den darüber hinausgehenden Teil übernimmt, solange die Haftstrecke $h > 0$ nicht überschritten wird. Ein etwaiger Schadenteil über $d + h$ geht wieder zu Lasten des Erstversicherers, falls nicht eine weitere Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $d + h$ besteht. D.h. es gilt

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\min \{ \max \{ Y_i - d, 0 \}, h \}}_{=h \text{ xs } d} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N Y_i - \underline{S}.$$

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Im Falle von $h = \infty$ erhält man

$$\underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N \max \{Y_i - d, 0\} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N \min \{Y_i, d\}. \quad (2)$$

Die Summe $d + h$ wird Plafond genannt und gibt die Kapazität der Rückversicherung an. Für eine Schadenexzedenten-Versicherung ist die Kurznotation h xs d (gelesen: h in excess of d) geläufig.

Eine Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung schützt den Erstversicherer vor großen Einzelschäden, aber nicht vor vielen kleineren oder mittleren Schäden. Sie ist in der Haftpflicht-, Unfall-, Kasko- und Sachversicherung sehr häufig anzutreffen.

In der Praxis werden oft mehrere Einzelschadenexzedenten-Rückversicherungen derart kombiniert, dass der Plafond $d + h$ des ersten Einzelschadenexzedenten die Priorität des zweiten Einzelschadenexzedenten bildet. Dieses Vorgehen wird als Layerung bezeichnet und die einzelnen übereinanderliegenden Einzelschadenexzedenten werden Layer genannt.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Der untere Bereich der aneinander gereihten Layer heißt Working Cover. Seine Kapazität sollte mindestens so hoch sein, dass sie von Klein- und Mittelschäden nicht überschritten wird. Die Layerung ermöglicht eine leichtere Platzierung auf dem Rückversicherungsmarkt und es ist durchaus üblich, dass sich an einem Layer mehrere Rückversicherer prozentual beteiligen.

Rückversicherer sind bei einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung einem Frequenzrisiko ausgesetzt. Um sich davor zu schützen, kann der Rückversicherer zusätzlich ein Jahreslimit oder einen Jahresselbstbehalt vereinbaren. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Haftstrecke h nur k -mal zur Verfügung zu stellen und für eine Wiederauffüllung ein Entgelt zu verlangen.

- b) **Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung (Excess-of-loss per event, CAT-XL):** Diese Art der Rückversicherung ist analog zur Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung definiert. Die Schadenhöhe, welche der Priorität d gegenübergestellt wird, bezieht sich jedoch nun auf die Summe aller Einzelschäden, die aus einem einzelnen wohldefinierten Schadenereignis (Kumulschaden), wie z.B. Sturm, Hagel, Überflutung oder Erdbeben, resultieren.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Eine Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung schützt den Erstversicherer vor einem einzelnen Schadenereignis mit vielen Klein- und Mittelschäden. D.h. sie liefert Schutz gegen das Frequenzrisiko. Sie kann eine sinnvolle Ergänzung zur proportionalen Rückversicherung sein. Zu finden ist sie z.B. in der Feuer-, Sturm-, Kfz- und Transportversicherung. Auch bei dieser Art der Risikoteilung kann ein Jahreslimit oder ein Jahresselbstbehalt vereinbart werden.

- c) **Jahresüberschaden-Rückversicherung (Stop-Loss):** Dies ist die Fortsetzung des Prinzips der Schadenexzedenten-Rückversicherung vom Einzelschaden über den Kumulschaden auf den Jahresschaden. Hier trägt der Erstversicherer den jährlichen Gesamtschaden in einer Branche bis zur Priorität d selbst, während der Rückversicherer den darüber hinausgehenden Teil übernimmt, solange die Haftstrecke h nicht überschritten wird. Ein etwaiger Schadenteil über $d + h$ geht wieder zu Lasten des Erstversicherers. D.h. es gilt

$$\underline{S} = \min \left\{ \sum_{i=1}^N Y_i, d \right\} + \max \left\{ \sum_{i=1}^N Y_i - (d + h), 0 \right\}$$

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

und

$$\underline{\underline{S}} = \min \left\{ \max \left\{ \sum_{i=1}^N Y_i - d, 0 \right\}, h \right\}$$

Im Falle von $h = \infty$ erhält man

$$\underline{\underline{S}} = \min \left\{ \sum_{i=1}^N Y_i, d \right\}.$$

Die Jahresüberschaden-Rückversicherung bietet den umfassendsten Schutz, da sie vor großen Einzelschäden und vor einer Häufung von kleinen und mittleren Schäden schützt. D.h. das versicherungstechnische Risiko geht fast vollständig auf den Rückversicherer über. Sie kommt daher i.A. nur selten zum Einsatz. Stop-Loss-Verträge sind vereinzelt zum Beispiel in der Überschwemmungs-, Hagel- und Sturmversicherung zu finden.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Bemerkungen:

- Prinzipiell können in der Rückversicherung beliebige Formen der Risikoteilung vereinbart werden. Z.B. kommt ab und zu die **Höchstschadenrückversicherung** zur Anwendung, bei welcher der Rückversicherer eine vereinbarte Anzahl der höchsten Einzelschäden eines Jahres (z.B. drei) übernimmt.
- Häufig werden die verschiedenen Rückversicherungsarten zu einem **Rückversicherungsprogramm** kombiniert. Auf diese Weise kann der Schutz gegen
 - das **Frequenzrisiko** (durch Quoten-, Kumulschadenexzedenten- und Jahresüberschaden-Rückversicherung) und
 - das **Großschadenrisiko** (durch Summenexzedenten-, Einzelschadenexzedenten- und Jahresüberschaden-Rückversicherung)optimiert werden.
- Die drei beschriebenen Schadenexzedenten-Rückversicherungen entsprechen nicht exakt den beiden **Grundformen** (1), da das Zweitrisiko $\underline{S}$ meist durch eine Haftstrecke h nach oben limitiert ist. Diese limitierte Formen lassen sich jedoch mit Hilfe der beiden unlimitierten Grundformen (1) darstellen. Denn es gelten die folgenden **Layer-Identitäten**:

Bemerkungen (Fortsetzung):

$$\min \{ \max \{ Y - d, 0 \}, h \} = \max \{ Y - d, 0 \} - \max \{ Y - (d + h), 0 \} \quad (3)$$

$$= \min \{ Y, d + h \} - \min \{ Y, d \} \quad (4)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } Y \leq d \\ Y - d & \text{für } d < Y \leq d + h \\ h & \text{für } Y > d + h \end{cases}$$

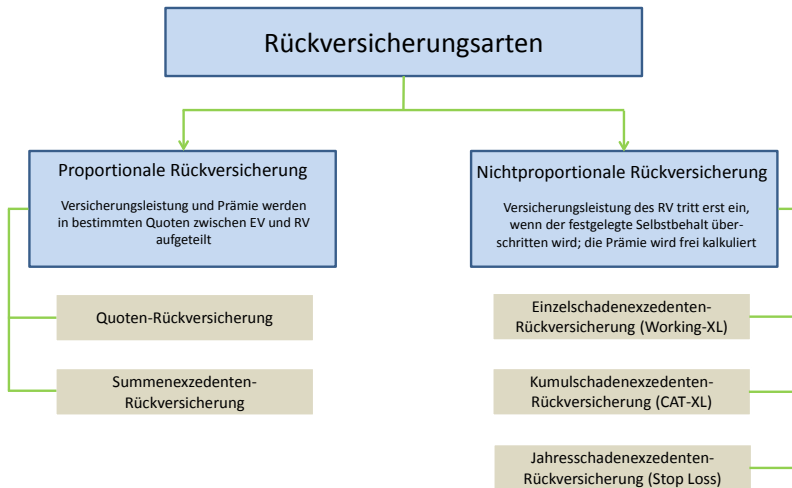
D.h. selbst im Falle des Vorliegens eines durch eine Haftstrecke h nach oben limitierten Risikos genügt es die beiden **unlimitierten Grundformen**

$\min \{ Y, d \}$	und	$\max \{ Y - d, 0 \}$
-------------------	-----	-----------------------

zu untersuchen.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung



6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Rückversicherungsprogramm)

Einem Erstversicherer verbleibt nach Rückversicherung noch ein maximaler Selbstbehalt von 8 Mio. CHF. Zur Verringerung dieses Risikos schließt er zusätzlich die beiden folgenden Rückversicherungen ab:

- Eine Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung (W-XL) mit Priorität $d = 2$ Mio. CHF zum Schutz vor Großschäden.
- Eine Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung (CAT-XL) mit Priorität $d = 4$ Mio. CHF zum Schutz vor Katastrophenschäden aus einem Erdbeben.

Ein Erdbeben hinterlässt nun beim Erstversicherer vor und nach Rückversicherung die folgenden Schäden:

Schadennummer	1	2	3	4	5	Σ
Schaden EV in Mio. CHF	1	1	1	2	4	9
Schaden EV nach (W-XL) in Mio. CHF	1	1	1	2	2	7
Schaden EV nach (CAT-XL) in Mio. CHF						4

Der Rückversicherer übernimmt somit bei diesem Rückversicherungsprogramm von den 9 Mio. CHF Orginalschäden insgesamt 5 Mio. CHF.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Jahresüberschaden-Rückversicherung (Stop-Loss))

Der jährliche Gesamtschaden

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i$$

in einer Branche besitze eine zusammengesetzte geometrische Verteilung mit dem Parameter $p = 0,9$ für die geometrisch-verteilte Schadenanzahl N und einer $\text{Exp}(\mu)$ -Verteilung mit $\mu = 0,000003$ für die unabhängigen Einzelschadenhöhen Y_i . Der Gesamtschaden S besitzt somit eine gemischte Verteilung F_S mit einer Punktmasse p an der Stelle $S = 0$ und einer mit $1 - p$ gewichteten Exponentialverteilung $\text{Exp}(\mu p)$ für $S > 0$. D.h. es gilt

$$F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s < 0 \\ p + (1 - p)(1 - e^{-\mu p s}) & \text{für } s \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

(vgl. zweites Beispiel in Abschnitt 5.3).

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Für den jährlichen Gesamtschaden soll im Folgenden ein Stop-Loss-Vertrag mit der Priorität $d = 100.000$ CHF und der Haftstrecke $h = 350.000$ CHF (kurz: 350.000 CHF xs 100.000 CHF) quotiert werden.

Der Gesamtschaden des Rückversicherers (Zweitrisiko) ist gegeben durch

$$\underline{\underline{S}} = \min \{ \max \{ S - 100.000, 0 \}, 350.000 \}$$

und mit (3) erhält man dafür die unlimitierte Darstellung

$$\underline{\underline{S}} = \max \{ S - 100.000, 0 \} - \max \{ S - 450.000, 0 \}.$$

Mit (17) erhält man

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] = \int_{100.000}^{\infty} (1 - F_S(s)) ds - \int_{450.000}^{\infty} (1 - F_S(s)) ds = \int_{100.000}^{450.000} (1 - F_S(s)) ds,$$

und durch Einsetzen von (5) resultiert schließlich:

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{S}] &= \int_{100.000}^{450.000} \left(1 - p - (1 - p)(1 - e^{-\mu ps})\right) ds \\ &= \int_{100.000}^{450.000} (1 - p)e^{-\mu ps} ds \\ &= \frac{p - 1}{\mu p} e^{-\mu ps} \Big|_{100.000}^{450.000} \\ &= \frac{p - 1}{\mu p} e^{-450.000\mu p} - \frac{p - 1}{\mu p} e^{-100.000\mu p} = 17284,05\end{aligned}$$

Die reine Risikoprämie für die Stop-Loss-Rückversicherung beträgt folglich 17284,05 CHF und damit 4,94% der Haftstrecke. Dieser Prozentsatz wird als **Rate-on-line (ROL)** bezeichnet.

6. Risikoteilung

6.2 Proportionale und nichtproportionale Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gesamtschaden S oberhalb des Plafonds $d + h = 450.000$ CHF liegt, beträgt

$$1 - F_S(450.000) = (1 - p)e^{-450.000\mu p} = 0,02967 \approx 3\%.$$

D.h. in ca. 3% aller Jahre übersteigt der Gesamtschaden S den durch die Stop-Loss-Rückversicherung gedeckte Schadenhöhe. Der erwartete Verlust beträgt in diesem Fall jedoch nur

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\max \{S - 450.000, 0\}] &= \int_{450.000}^{\infty} (1 - F_S(s)) \, ds \\ &= \frac{p-1}{\mu p} e^{-\mu p s} \Big|_{450.000}^{\infty} \\ &= \frac{1-p}{\mu p} e^{-450.000\mu p} = 10989,26 \text{ CHF.}\end{aligned}$$

Abschnitt 6.3

Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Prozenttarif und Quoten-Rückversicherung

Die **statistischen Eigenschaften** eines Prozenttarifs und einer Quoten-Rückversicherung lassen sich leicht ermitteln.

Zum einen haben diese beiden Arten der proportionalen Risikoteilung **keinen Einfluss auf die Schadenanzahl N** des Selbstbehalts (Erstrisikos) und des transferierten Risikos (Zweitrisikos). D.h. es gilt:

$$\underline{N} = \underline{\underline{N}} = N$$

Zum anderen sind die Einzelschadenhöhen des Selbstbehalts und des transferierten Risikos

$$\underline{Y} = cY \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{Y}} = (1 - c)Y \quad \text{mit} \quad c \in (0, 1) \quad (6)$$

lediglich proportional kleiner als der Originalschaden Y . Wegen

$$F_{tY}(y) = \mathbb{P}(tY \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y/t) = F_Y(y/t) \quad \text{und} \quad f_{tY}(y) = \frac{1}{t} f_Y(y/t)$$

für $0 < t < 1$ lassen sich die Verteilungsfunktionen von $\underline{Y}$ und $\underline{\underline{Y}}$ sofort angeben, wenn die Verteilungsfunktion F_Y bekannt ist.

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Im Falle einer **skalierungsinvarianten Verteilung** F_Y gehören die Verteilungen von

$$\underline{Y}, \quad \underline{\underline{Y}} \quad \text{und} \quad Y$$

sogar zur **gleichen Verteilungsfamilie**. Zum Beispiel lässt sich leicht zeigen:

- a) $Y \sim \text{Exp}(\lambda) \implies \underline{Y} \sim \text{Exp}(\lambda/c), \underline{\underline{Y}} \sim \text{Exp}(\lambda/(1-c))$
- b) $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta) \implies \underline{Y} \sim \Gamma(\alpha, \beta/c), \underline{\underline{Y}} \sim \Gamma(\alpha, \beta/(1-c))$
- c) $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda) \implies \underline{Y} \sim \text{Par}(\alpha, c\lambda), \underline{\underline{Y}} \sim \text{Par}(\alpha, (1-c)\lambda)$
- d) $Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2) \implies \underline{Y} \sim \text{LN}(\mu + \ln(c), \sigma^2), \underline{\underline{Y}} \sim \text{LN}(\mu + \ln(1-c), \sigma^2)$

Für die **Momente** von $\underline{Y}$ und $\underline{\underline{Y}}$ erhält man unmittelbar:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{Y}] &= c\mathbb{E}[Y] & \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] &= (1-c)\mathbb{E}[Y] \\ \text{Var}(\underline{Y}) &= c^2\text{Var}(Y) & \text{Var}(\underline{\underline{Y}}) &= (1-c)^2\text{Var}(Y) \\ \mathbb{E}[\underline{Y}^k] &= c^k\mathbb{E}[Y^k] & \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}^k] &= (1-c)^k\mathbb{E}[Y^k]\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\text{Cov}(\underline{Y}, \underline{\underline{Y}}) = c(1-c)\text{Var}(Y)$$

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Damit erhält man die wichtigste Eigenschaft des Prozenttarifs und der Quoten-Rückversicherung, nämlich dass sich die Risikomaße **Variationskoeffizient** und **Schiefe** **nicht verändern**:

$$\text{Vko}(\underline{Y}) = \text{Vko}(\underline{\underline{Y}}) = \text{Vko}(Y) = \frac{\sqrt{\text{Var}(Y)}}{\mathbb{E}[Y]}$$

$$V(\underline{Y}) = V(\underline{\underline{Y}}) = V(Y) = \frac{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^3]}{\text{Var}(Y)^{3/2}}$$

D.h. **der Prozenttarif und die Quoten-Rückversicherung haben auf die Gefährlichkeit eines Risikos (gemessen durch den Variationskoeffizienten) keinen Einfluss**. Ist aber u das zur Verfügung stehende Sicherheitskapital und wird als Prämienprinzip das Nettoprämienprinzip $\pi_0(Y) = \mathbb{E}[Y]$ verwendet, erhält man für $c \in (0, 1)$

$$\mathbb{P}(\underline{Y} > \pi_0(\underline{Y}) + u) = \mathbb{P}\left(Y > \pi_0(Y) + \frac{u}{c}\right) < \mathbb{P}(Y > \pi_0(Y) + u).$$

D.h. **die Ruinwahrscheinlichkeit für den Selbstbehalt wird kleiner** bzw. es wird weniger Sicherheitskapital für die gleiche Ruinwahrscheinlichkeit benötigt.

Bezüglich des **Gesamtschadens** des Selbstbehalts und des transferierten Risikos gilt

$$\underline{S} = cS \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{S}} = (1 - c)S.$$

Für die Momente des Gesamtschadens ergeben sich daher analoge Eigenschaften wie für die Einzelschadenhöhen.

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Summenexzedenten-Rückversicherung

Bei einer Summenexzedenten-Rückversicherung mit dem globalen Selbstbehalt M beträgt der Selbstbehaltsanteil für das i -te Einzelrisiko

$$c_i := \min \left\{ \frac{M}{v_i}, 1 \right\}.$$

D.h. das Aufteilungsverhältnis $c : (1 - c)$ variiert in Abhängigkeit von der Versicherungssumme v_i des i -ten Einzelrisikos und das Erstrisiko trägt alle Einzelrisiken mit $v_i \leq M$ selbst.

Für das Erst- und Zweitrisiko ist die (deterministische) Risikoanzahl gegeben durch

$$\underline{n} = n \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{n}} = \sum_{i=1}^n 1_{\{v_i > M\}} \leq n.$$

Für die Einzelschadenhöhen des i -ten Einzelrisikos gilt für das Erst- und Zweitrisiko

$$\underline{Y}_i = c_i Y_i \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{Y}}_i = (1 - c_i) Y_i.$$

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Für den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtschadens des Erst- und Zweit-
risikos gilt im Falle von stochastisch unabhängigen Einzelschadenhöhen

$$\mathbb{E}[\underline{S}] = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}[Y_i] \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] = \sum_{i=1}^n (1 - c_i) \mathbb{E}[Y_i]$$

und

$$\text{Var}(\underline{S}) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \text{Var}(Y_i) \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}(\underline{\underline{S}}) = \sum_{i=1}^n (1 - c_i)^2 \text{Var}(Y_i).$$

Ferner gilt:

$$\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) = \sum_{i=1}^n c_i (1 - c_i) \text{Var}(Y_i)$$

Der Variationskoeffizient des Erst- und Zweitrisikos kann größer oder kleiner als der Variationskoeffizient des Ausgangsrisikos sein. D.h. die Summenexzedenten-Rückversicherung beeinflusst die Gefährlichkeit eines Risikos (gemessen durch den Variationskoeffizienten).

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Beispiel (Summenexzedenten-Rückversicherung)

Betrachtet wird ein Versicherungsportfolio aus 1000 unabhängigen Versicherungen gegen Unfalltod mit den folgenden Versicherungssummen (in CHF):

i	Anzahl	Versicherungssumme v_i
1	600	30.000
2	300	50.000
3	100	100.000

Die Eintrittswahrscheinlichkeit für einen Unfalltod sei 0,1% pro Jahr. Der erwartete jährliche Gesamtschaden beträgt somit:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}[Y_i] = 0,1\% \cdot (600 \cdot 30.000 + 300 \cdot 50.000 + 100 \cdot 100.000) = 43.000$$

Für die jährliche Prämieinnahme des Erstversicherers gelte $\pi(S) = \mathbb{E}[S] = 43.000$ (d.h. es kommt das sog. Nettoprämienprinzip zur Anwendung).

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Im Schnitt muss mit genau einem Schadenfall pro Jahr gerechnet werden. Es ergibt sich ein Verlust, wenn dieser Schaden eine der 400 Risiken mit einer Versicherungssumme von 50.000 oder 100.000 betrifft.

Der Erstversicherer schlieÙe nun eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit globaler Selbstbehaltsgrenze $M = 30.000$ ab. Mit $c_i := \min \left\{ \frac{M}{v_i}, 1 \right\}$ erhält man dann für den erwarteten Gesamtschaden des Erst- und Zweitrisikos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \sum_{i=1}^{1000} c_i \mathbb{E}[Y_i] \\ &= 0,1\% \cdot (600 \cdot 1 \cdot 30.000 + 300 \cdot 0,6 \cdot 50.000 + 100 \cdot 0,3 \cdot 100.000) = 30.000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{S}] &= \sum_{i=1}^{1000} (1 - c_i) \mathbb{E}[Y_i] \\ &= 0,1\% \cdot (600 \cdot 0 \cdot 30.000 + 300 \cdot 0,4 \cdot 50.000 + 100 \cdot 0,7 \cdot 100.000) = 13.000\end{aligned}$$

Die im Selbstbehalt des Erstversicherers verbleibende Prämie von 30.000 CHF reicht somit aus, den einen jährlich zu erwartenden Schaden zu begleichen.

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Auch die Policen mit einer höheren Versicherungssumme belasten den Selbstbehalt jetzt nur noch mit 30.000 CHF. Die Summenexzedenten-Rückversicherung hat folglich die Variabilität bzgl. der Schadenhöhe vollständig eliminiert.

Für die Varianzen eines Einzelrisikos mit Versicherungssumme v_i gilt:

$$\text{Var}(Y_i) = \mathbb{E}[Y_i^2] - \mathbb{E}[Y_i]^2 = 0,1\% \cdot v_i^2 - (0,1\% \cdot v_i)^2 = 0,0999\% v_i^2$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\text{Var}(S) &= \sum_{i=1}^{1000} \text{Var}(Y_i) \\ &= 0,0999\% \cdot (600 \cdot 30.000^2 + 300 \cdot 50.000^2 + 100 \cdot 100.000^2) \\ \text{Var}(\underline{S}) &= \sum_{i=1}^{1000} c_i^2 \text{Var}(Y_i) \\ &= 0,0999\% \cdot (600 \cdot 1^2 \cdot 30.000^2 + 300 \cdot 0,6^2 \cdot 50.000^2 + 100 \cdot 0,3^2 \cdot 100.000^2)\end{aligned}$$

6. Risikoteilung

6.3 Auswirkung der proportionalen Risikoteilung

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}\text{Var}(\underline{\underline{S}}) &= \sum_{i=1}^{1000} (1 - c_i)^2 \text{Var}(Y_i) \\ &= 0,0999\% \cdot (600 \cdot 0^2 \cdot 30.000^2 + 300 \cdot 0,4^2 \cdot 50.000^2 + 100 \cdot 0,7^2 \cdot 100.000^2)\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\sigma(S) = 47.830, \quad \sigma(\underline{S}) = 29.985 \quad \text{und} \quad \sigma(\underline{\underline{S}}) = 24.686$$

sowie

$$\text{Vko}(S) = 1,11, \quad \text{Vko}(\underline{S}) = 1,00 \quad \text{und} \quad \text{Vko}(\underline{\underline{S}}) = 1,9.$$

D.h. es gilt:

$$\text{Vko}(\underline{\underline{S}}) < \text{Vko}(S) < \text{Vko}(\underline{S})$$

Abschnitt 6.4

Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Schadenanzahl

6. Risikoteilung

6.4 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Schadenanzahl

In diesem und den beiden folgenden Abschnitten wird eine **(unlimitierte) Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung** mit Haftstrecke $h = \infty$ betrachtet und der Gesamtschaden sei durch ein **kollektives Modell**

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (7)$$

mit der Schadenanzahl N und den Einzelschadenhöhen $Y_i \sim F_Y$ gegeben (vgl. Abschnitt 5.2).

Die folgenden Ergebnisse lassen sich völlig analog auch für die Abzugsfranchise und die Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung zeigen. Für die Jahresfranchise und die Jahresüberschadenexzedentenrückversicherung erhält man ebenfalls analoge Ergebnisse, jedoch bezogen auf die Jahresschäden und Jahresselbstbehalte.

In der Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung gilt für die **Einzelschadenhöhen des Erst- und Zweitrisikos**

$$\underline{Y}_i = \min \{Y_i, d\} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{Y}}_i = \max \{Y_i - d, 0\} \quad \text{mit} \quad d \geq 0. \quad (8)$$

6. Risikoteilung

6.4 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Schadenanzahl

Für die **Schadenanzahl des Erst- und Zweitrisikos** gilt daher

$$\underline{N} = N \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{N}} = \sum_{i=1}^N 1_{(d,\infty)}(Y_i) \leq N. \quad (9)$$

D.h. bei der Verteilung von $\underline{\underline{N}}$ handelt es sich um eine **zusammengesetzte Verteilung**, wobei die Summanden $1_{(d,\infty)}(Y_i)$ **Bernoulli-verteilt** sind mit dem Parameter

$$\alpha := \mathbb{P}(1_{(d,\infty)}(Y_i) = 1) = \mathbb{P}(Y_i > d).$$

Mit den beiden Formeln von Wald (vgl. Satz in Abschnitt 5.3) erhält man für den **Erwartungswert** und die **Varianz** von $\underline{\underline{N}}$

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{N}}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[1_{(d,\infty)}(Y_i)] = \alpha \mathbb{E}[N]$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{\underline{N}}) &= \mathbb{E}[1_{(d,\infty)}(Y_i)]^2 \cdot \text{Var}(N) + \text{Var}(1_{(d,\infty)}(Y_i)) \cdot \mathbb{E}[N] \\ &= \alpha^2 \text{Var}(N) + \alpha(1 - \alpha) \mathbb{E}[N]. \end{aligned}$$

6. Risikoteilung

6.4 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Schadenanzahl

Für die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** von $\underline{N}$ erhält man für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\underline{N} = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{N} = k, N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(\underline{N} = k | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^N 1_{(d,\infty)}(Y_i) = k \middle| N = n \right) \mathbb{P}(N = n)\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^N 1_{(d,\infty)}(Y_i) \middle| N = n \sim \text{NBin}(n, \alpha)$$

folgt weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\underline{N} = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^N 1_{(d,\infty)}(Y_i) = k \middle| N = n \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k}.\end{aligned}\tag{10}$$

Falls N eine **Poisson-**, **Binomial-** oder **negative Binomialverteilung** besitzt, gilt dies auch für die Schadenanzahl $\underline{N}$ (vgl. nächstes Beispiel und Übungsaufgaben). Dies gilt jedoch nicht, falls N z.B. eine **logarithmische Verteilung** besitzt.

6. Risikoteilung

6.4 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Schadenanzahl

Beispiel (Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\underline{N}$)

Für $N \sim \Pi(\lambda)$ folgt mit (10):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\underline{N} = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{n!}{(n-k)!k!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} ((1-\alpha)\lambda)^{n-k} \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} e^{(1-\alpha)\lambda} \\ &= \frac{(\alpha\lambda)^k}{k!} e^{-\alpha\lambda}\end{aligned}\tag{11}$$

D.h. es gilt $\underline{N} \sim \Pi(\alpha\lambda)$.

Abschnitt 6.5

Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Es wird wieder eine (unlimitierte) Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftstrecke $h = \infty$ im Rahmen des kollektiven Modells (7) betrachtet.

Die Einzelschadenhöhen des Erstrisikos

$$\underline{Y} = \min \{Y, d\}$$

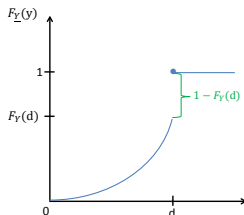
besitzen die Verteilungsfunktion

$$F_{\underline{Y}}(y) = \mathbb{P}(\underline{Y} \leq y) = \begin{cases} F_Y(y) & \text{für } y < d \\ 1 & \text{für } y \geq d \end{cases} \quad (12)$$

D.h. die Einzelschadenhöhen des Erstrisikos $\underline{Y}$ weisen im Falle eines echten Risikotransfers, d.h. für $F_Y(d) < 1$, an der Stelle d die Punktmasse

$$\mathbb{P}(Y > d) = 1 - F_Y(d) > 0$$

auf.



Für die Momente der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$ erhält man den folgenden Satz:

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Satz (Momente der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$)

Es sei $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$. Dann gelten für die Momente der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$ des Erstrisikos im Falle einer (unlimitierten) Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftstrecke $h = \infty$ im Rahmen des kollektiven Modells folgende Aussagen (die Existenz der Momente vorausgesetzt):

- a) $\mathbb{E}[\underline{Y}^k] = \int_0^d y^k dF_Y(y) + d^k (1 - F_Y(d)) = \int_0^d ky^{k-1} (1 - F_Y(y)) dy \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$
- b) $\mathbb{E}[\underline{Y}^k] < \mathbb{E}[Y^k]$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $0 < F_Y(d) < 1$
- c) $Vko(\underline{Y}) < Vko(Y)$, falls $0 < F_Y(d) < 1$
- d) $V(\underline{Y}) < V(Y)$, falls $0 < F_Y(d) < 1$

Beweis: Zu a): Mit partieller Integration erhält man für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{Y}^k] &= \int_0^\infty \min\{y, d\}^k dF_Y(y) = \int_0^d y^k dF_Y(y) + d^k \int_d^\infty dF_Y(y) = \int_0^d y^k dF_Y(y) + d^k (1 - F_Y(d)) \\ &= y^k F_Y(y) \Big|_0^d - \int_0^d ky^{k-1} F_Y(y) dy + d^k (1 - F_Y(d)) \\ &= - \int_0^d ky^{k-1} F_Y(y) dy + d^k \\ &= \int_0^d ky^{k-1} (1 - F_Y(y)) dy\end{aligned}$$

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Beweis (Fortsetzung): Zu b): Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^k] &= \int_0^\infty y^k dF_Y(y) \\ &= \int_0^d y^k dF_Y(y) + \int_d^\infty y^k dF_Y(y) \\ &> \int_0^d y^k dF_Y(y) + d^k \int_d^\infty dF_Y(y) \\ &= \int_0^d y^k dF_Y(y) + d^k (1 - F_Y(d))\end{aligned}$$

Zusammen mit Aussage a) folgt daraus:

$$\mathbb{E}[Y^k] = \int_0^d y^k dF_Y(y) + d^k (1 - F_Y(d)) = \mathbb{E}[\underline{Y}^k]$$

Zu c): Folgt für $N = 1$ f.s. als Spezialfall von Aussage e) des ersten Satzes in Abschnitt 6.6.

Zu d): Die Schiefe $V(\underline{Y})$ wird als Funktion $f(d) := V(\underline{Y})$ des Selbstbehalts $d \geq 0$ betrachtet. Wie man zeigen kann, gilt $f'(d) > 0$ für $d \geq 0$. D.h. f ist streng monoton wachsend und wegen

$$V(Y) = \lim_{d \rightarrow \infty} f(d)$$

folgt daraus die Behauptung $V(Y) > f(d) = V(\underline{Y})$ für alle $d \geq 0$. ■

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Bei der Betrachtung der **Einzelschadenhöhen des Zweitrisikos**

$$\underline{\underline{Y}} = \max \{Y - d, 0\}$$

muss beachtet werden, dass Einzelschadenhöhen $Y \leq d$ bei der Schadenanzahl $\underline{\underline{N}}$ des Zweitrisikos nicht mitgezählt werden (vgl. (9)). Für die Bestimmung des Gesamtschadens des Zweitrisikos $\underline{\underline{S}}$ ist man somit für $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ an dem **Excess**

$$U := Y - d | Y > d$$

von Y über d , bedingt gegeben $Y > d$, und seiner Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_U(y) &= \mathbb{P}(Y - d \leq y | Y > d) \\ &= \frac{\mathbb{P}(d < Y \leq y + d)}{\mathbb{P}(Y > d)} \\ &= \frac{F_Y(d + y) - F_Y(d)}{1 - F_Y(d)} \quad \text{für } y > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

interessiert. Diese Verteilungsfunktion wird als **Excess-Verteilung von Y über d** bezeichnet (siehe hierzu auch Abschnitt 7.6).

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[U]$ heißt **mittlerer Überschaden über d** .

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Bemerkungen:

- Offensichtlich gilt:

$$U \stackrel{(d)}{=} \underline{\underline{Y}} | \underline{\underline{Y}} > 0$$

- Die Exponentialverteilung ist die einzige stetige Verteilung, für die aufgrund ihrer **Gedächtnislosigkeit** $F_U(y) = F_Y(y)$ für alle $y > 0$ und $d \geq 0$ gilt (siehe hierzu auch Abschnitte 4.7 und 7.7).
- Für $Y \sim \text{Par}^*(\alpha, d)$ gilt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d}{y}\right)^\alpha & \text{für } y > d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$

(vgl. Abschnitt 4.12). Wird (14) in (13) eingesetzt, erhält man

$$F_U(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d}{d+y}\right)^\alpha & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

D.h. bei F_U handelt es sich um die $\text{Par}(\alpha, d)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.12).

Für die **Momente der Einzelschadenhöhen** Y erhält man den folgenden Satz:

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Satz (Momente der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$)

Es sei $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$. Dann gilt für die Momente der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$ des Zweitrisikos im Falle einer (unlimitierten) Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftstrecke $h = \infty$ im Rahmen des kollektiven Modells folgende Aussage (die Existenz der Momente vorausgesetzt)

$$\mathbb{E}[\underline{Y}^k] = \int_d^\infty (y-d)^k dF_Y(y) = (1 - F_Y(d)) \mathbb{E}[U^k] \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Beweis: Die erste Gleichung in (15) folgt unmittelbar aus der Definition des Erwartungswertes:

$$\mathbb{E}[\underline{Y}^k] = \int_0^\infty \max\{y-d, 0\}^k dF_Y(y) = \int_d^\infty (y-d)^k dF_Y(y)$$

Mit (13) erhält man

$$dF_U(y) = \frac{1}{1 - F_Y(d)} dF_Y(d+y).$$

Daraus folgt weiter

$$\mathbb{E}[U^k] = \int_0^\infty y^k dF_U(y) = \frac{1}{1 - F_Y(d)} \int_0^\infty y^k dF_Y(d+y)$$

und mit der Substitution $u = d + y$ schließlich

$$\mathbb{E}[U^k] = \frac{1}{1 - F_Y(d)} \int_d^\infty (u-d)^k dF_Y(u) = \frac{1}{1 - F_Y(d)} \int_0^\infty \max\{u-d, 0\}^k dF_Y(u) = \frac{\mathbb{E}[\underline{Y}^k]}{1 - F_Y(d)}$$

und damit die zweite Gleichung in (15).

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Bemerkungen:

- Es gilt

$$\mathbb{E}[U] = e_Y(d), \quad (16)$$

wobei

$$e_Y(d) := \mathbb{E}[Y - d | Y > d] = \frac{1}{1 - F_Y(d)} \int_d^{\infty} (1 - F_Y(y)) dy$$

die **Mean-excess-Funktion** ist. Eingesetzt in (15) liefert dies für $k = 1$:

$$\mathbb{E}[\underline{Y}] = (1 - F_Y(d)) e_Y(d) = \int_d^{\infty} (1 - F_Y(y)) dy < \mathbb{E}[Y] \quad (17)$$

- Wegen (16) ist die **empirische Mean-excess-Funktion**

$$\hat{e}_n(d) = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - d) 1_{(d, \infty)}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n 1_{(d, \infty)}(Y_i)} \quad (18)$$

ein sinnvoller Schätzer für den mittleren Überschaden $\mathbb{E}[U]$.

- In der Praxis ist $\hat{e}_n(d)$ häufig monoton wachsend. Dies deutet dann daraufhin, dass Y eine **Heavy-Tail-Verteilung** besitzt (vgl. hierzu auch Abschnitt 7.8).

6. Risikoteilung

6.5 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Einzelschadenhöhe

Beispiel (Erwartungswert von $\underline{Y}$ für $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$)

- a) Für $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ gilt $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ für $y > 0$ und $F_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponential-Verteilung gilt ferner $e_Y(d) = \mathbb{E}[Y - d | Y > d] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}$ (vgl. Abschnitt 4.7). Zusammen mit (17) liefert dies:

$$\mathbb{E}[\underline{Y}] = (1 - F_Y(d))e_Y(d) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda d}$$

- b) Für $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ gilt $F_Y(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + y}\right)^\alpha$ für $y > 0$ und $F_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$. Aufgrund der Conditional-Tail-Eigenschaft der Pareto-Verteilung gilt ferner $Y - d | Y > d \sim \text{Par}(\alpha, \lambda + d)$ und damit $e_Y(d) = \mathbb{E}[Y - d | Y > d] = \frac{\lambda + d}{\alpha - 1}$ für $\alpha > 1$ (vgl. Abschnitt 4.12). Zusammen mit (17) liefert dies:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{Y}] &= (1 - F_Y(d))e_Y(d) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^\alpha \frac{\lambda + d}{\alpha - 1} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^{\alpha - 1} \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^{\alpha - 1} \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

Abschnitt 6.6

Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Es wird wieder eine (unlimitierte) Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftstrecke $h = \infty$ im Rahmen des kollektiven Modells (7) betrachtet. Mit den Ergebnissen aus den Abschnitten 6.4 und 6.5 erhält man dann, dass der Gesamtschaden des Erstrisikos und Zweitriskos gegeben ist durch

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{Y}}_i = \sum_{i=1}^N U_i$$

Für die ersten beiden Momente folgt mit den Formeln von Wald (vgl. Abschnitt 5.3)

$$\mathbb{E}[\underline{S}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}] \quad (19)$$

$$\text{Var}(\underline{S}) = \mathbb{E}[\underline{Y}]^2 \cdot \text{Var}(N) + \text{Var}(\underline{Y}) \cdot \mathbb{E}[N] \quad (20)$$

bzw.

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] = \mathbb{E}[\underline{N}] \cdot \mathbb{E}[U] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{\underline{S}}) &= \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}]^2 \cdot \text{Var}(N) + \text{Var}(\underline{\underline{Y}}) \cdot \mathbb{E}[N] \\ &= \mathbb{E}[U]^2 \cdot \text{Var}(\underline{N}) + \text{Var}(U) \cdot \mathbb{E}[\underline{N}]. \end{aligned} \quad (22)$$

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beispiel (Erwartungswert von $\underline{S}$ und $\underline{\underline{S}}$ für $N \sim \Pi(\lambda)$ und $Y \sim \text{Par}(\alpha, \beta)$)

Der jährliche Gesamtschaden

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i$$

eines Portfolios von Einzelrisiken sei zusammengesetzt Poisson-verteilt mit $N \sim \Pi(\lambda)$ und $Y_i \sim \text{Par}(\alpha, \beta)$ mit $\alpha > 1$. Für die Einzelschadenhöhen des Erst- und Zweitrisikos einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Priorität $d > 0$ und Haftstrecke $h = \infty$ (kurz: ∞ xs d) erhält man dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{Y}] &= \int_0^d (1 - F_Y(y)) dy = \int_0^d \left(\frac{\beta}{\beta + y} \right)^\alpha dy \\ &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \left(\frac{\beta + y}{\beta} \right)^{-\alpha+1} \Big|_0^d \\ &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \left(\left(\frac{\beta}{\beta + d} \right)^{\alpha-1} - 1 \right) = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta + d} \right)^{\alpha-1} \right) \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beispiel (Fortsetzung)

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{Y}] &= \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha} \frac{\beta+d}{\alpha-1} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha-1} \frac{\beta}{\alpha-1} = \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha-1} \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

(vgl. letztes Beispiel). Damit folgt für den Gesamtschaden des Erst- und Zweitrisikos

$$\mathbb{E}[\underline{S}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}] = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha-1}\right) \mathbb{E}[S]$$

bzw.

$$\mathbb{E}[\underline{S}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}] = \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha-1} \mathbb{E}[S].$$

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Satz (Momente des Gesamtschadens $\underline{S}$ und $\underline{\underline{S}}$)

Es sei $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$. Dann gelten für die Momente des Gesamtschadens des Erstrisikos $\underline{S}$ und des Gesamtschadens des Zweitriskos $\underline{\underline{S}}$ im Falle einer (unlimitierten) Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftstrecke $h = \infty$ im Rahmen des kollektiven Modells folgende Aussagen (Existenz der Momente vorausgesetzt):

- a) $\mathbb{E}[\underline{S}] < \mathbb{E}[S]$ und $\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] < \mathbb{E}[S]$
- b) $\text{Var}(\underline{S}) < \text{Var}(S)$ und $\text{Var}(\underline{\underline{S}}) < \text{Var}(S)$
- c) $\text{Var}(\underline{S}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}) < \text{Var}(S)$
- d) $\sigma(\underline{S}) + \sigma(\underline{\underline{S}}) > \sigma(S)$
- e) $\text{Vko}(\underline{S})$ und $\text{Vko}(\underline{\underline{S}})$ sind streng monoton wachsende Funktionen der Priorität $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ und es gilt
$$\text{Vko}(N) < \text{Vko}(\underline{S}) < \text{Vko}(S) < \text{Vko}(\underline{\underline{S}}). \quad (23)$$

Beweis: Zu a): Aus $\mathbb{E}[\underline{Y}] < \mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] < \mathbb{E}[Y]$ sowie (19) und (21) folgt:

$$\mathbb{E}[\underline{S}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}] < \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[S]$$

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] < \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[S]$$

Zu b): Folgt unmittelbar aus c).

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beweis (Fortsetzung): Zu c): Es gilt

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(\underline{S} + \underline{\underline{S}}) = \text{Var}(\underline{S}) + 2\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}). \quad (24)$$

Ferner erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{Y} \cdot \underline{\underline{Y}}] &= \int_0^\infty \min\{y, d\} \cdot \max\{y - d, 0\} dF_Y(y) \\ &= \int_0^d 0 dF_Y(y) + \int_d^\infty d \max\{y - d, 0\} dF_Y(y) \\ &= d \int_0^\infty \max\{y - d, 0\} dF_Y(y) = d \mathbb{E}[\max\{Y - d, 0\}] = d \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] \end{aligned}$$

Zusammen mit $\mathbb{E}[\underline{Y}] = \mathbb{E}[\min\{y, d\}] < d$ und $\mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] = \mathbb{E}[\max\{Y - d, 0\}] > 0$ liefert dies

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{\underline{Y}}) &= \mathbb{E}[\underline{Y} \cdot \underline{\underline{Y}}] - \mathbb{E}[\underline{Y}] \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] \\ &= d \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] - \mathbb{E}[\underline{Y}] \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] \\ &= (d - \mathbb{E}[\underline{Y}]) \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] > 0. \end{aligned}$$

D.h. $\underline{Y}$ und $\underline{\underline{Y}}$ sind positiv korreliert. Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^N \underline{Y}_i, \sum_{i=1}^N \underline{\underline{Y}}_i\right) = \text{Cov}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \underline{Y}_i \middle| N\right], \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \underline{\underline{Y}}_i \middle| N\right]\right) + \mathbb{E}\left[\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^N \underline{Y}_i, \sum_{i=1}^N \underline{\underline{Y}}_i \middle| N\right)\right] \\ &\quad \vdots \\ &= \text{Cov}(N \mathbb{E}[\underline{Y}], N \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}]) + \mathbb{E}[N \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{\underline{Y}})] \\ &= \text{Var}(N) \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}] \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] + \mathbb{E}[N] \cdot \text{Cov}(\underline{Y}, \underline{\underline{Y}}) > 0 \end{aligned}$$

(für die ausgelassenen Umformungsschritte siehe Beweis der Aussagen a) und b) des ersten Satzes in Abschnitt 5.3).

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beweis (Fortsetzung): D.h. $\underline{S}$ und $\underline{\underline{S}}$ sind ebenfalls positiv korreliert. Zusammen mit (24) impliziert dies die Behauptung

$$\text{Var}(S) > \text{Var}(\underline{S}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}).$$

Zu d): Zwischen $\underline{S}$ und $\underline{\underline{S}}$ besteht offensichtlich kein perfekter linear Zusammenhang. Es gilt daher

$$|\text{Corr}(\underline{S}, \underline{\underline{S}})| = \left| \frac{\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}})}{\sigma(\underline{S})\sigma(\underline{\underline{S}})} \right| < 1$$

und somit

$$\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) < |\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}})| < \sigma(\underline{S})\sigma(\underline{\underline{S}})$$

Zusammen mit (24) impliziert dies

$$\begin{aligned} (\sigma(\underline{S}) + \sigma(\underline{\underline{S}}))^2 &= \text{Var}(\underline{S}) + 2\sigma(\underline{S})\sigma(\underline{\underline{S}}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}) \\ &> \text{Var}(\underline{S}) + 2\text{Cov}(\underline{S}, \underline{\underline{S}}) + \text{Var}(\underline{\underline{S}}) = \text{Var}(S) = \sigma(S)^2 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Zu e): Aus (19)–(20) folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{S}) &= \mathbb{E}[Y]^2 \cdot \text{Var}(N) + \text{Var}(Y) \cdot \mathbb{E}[N] \\ &= \mathbb{E}[Y]^2 \cdot \text{Var}(N) + (\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2) \cdot \mathbb{E}[N] \\ &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y^2] + (\text{Var}(N) - \mathbb{E}[N])\mathbb{E}[Y]^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\text{Vko}(\underline{S})^2 = \frac{\text{Var}(\underline{S})}{\mathbb{E}[\underline{S}]^2} = \frac{\mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y^2] + (\text{Var}(N) - \mathbb{E}[N])\mathbb{E}[Y]^2}{\mathbb{E}[N]^2 \cdot \mathbb{E}[Y]^2} = \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{\mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y]^2} + \frac{\text{Var}(N) - \mathbb{E}[N]}{\mathbb{E}[N]^2}. \quad (25)$$

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beweis (Fortsetzung): Für den Nachweis eines streng monotonen Wachstums von $Vko(\underline{S})$ bzgl. der Priorität $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ genügt es daher zu zeigen, dass der von d abhängende Teil

$$f(d) := \frac{\mathbb{E}[\underline{Y}^2]}{\mathbb{E}[\underline{Y}]^2} = \frac{m_2(d)}{m_1(d)^2} \quad \text{mit} \quad m_k(d) := \mathbb{E}[\underline{Y}^k] = \int_0^d ky^{k-1}(1 - F_Y(y)) dy \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

(vgl. Aussage a) des ersten Satzes in Abschnitt 6.5) eine positive Ableitung $f'(d) > 0$ für $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ besitzt. Mit

$$m'_k(d) = kd^{k-1}(1 - F_Y(d))$$

erhält man für die erste Ableitung von f bzgl. $d \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(d) &= \frac{m'_2(d)m_1(d)^2 - 2m_2(d)m_1(d)m'_1(d)}{m_1(d)^4} \\ &= \frac{2d(1 - F_Y(d))m_1(d)^2 - 2m_2(d)m_1(d)(1 - F_Y(d))}{m_1(d)^4} \\ &= \frac{2m_1(d)(1 - F_Y(d))(dm_1(d) - m_2(d))}{m_1(d)^4} \end{aligned} \quad (26)$$

Aus $F_Y(d) < 1$ folgt ferner $1 - F_Y(d) > 0$ und es gilt

$$m_2(d) = \mathbb{E}[\underline{Y}^2] = \mathbb{E}[\min\{y, d\}^2] < d\mathbb{E}[\min\{y, d\}] = d\mathbb{E}[\underline{Y}] = dm_1(d).$$

Zusammen mit (26) liefert dies $f'(d) > 0$ für $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$. Folglich ist $Vko(\underline{S})$ bzgl. der Priorität $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ streng monoton wachsend.

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beweis (Fortsetzung): Das streng monotone Wachstum von $Vko(\underline{S})$ bzgl. der Priorität $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ zeigt man völlig analog. Analog zu (25) zeigt man zuerst mit (21)–(22), dass

$$Vko(\underline{S})^2 = \frac{\text{Var}(\underline{S})}{\mathbb{E}[\underline{S}]^2} = \frac{\mathbb{E}[\underline{Y}^2]}{\mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}]^2} + \frac{\text{Var}(N) - \mathbb{E}[N]}{\mathbb{E}[N]^2}$$

gilt. Es genügt daher wieder zu zeigen, dass der von d abhängende Teil

$$g(d) := \frac{\mathbb{E}[\underline{Y}^2]}{\mathbb{E}[\underline{Y}]^2} = \frac{n_2(d)}{n_1(d)^2} \quad \text{mit} \quad n_k(d) := \mathbb{E}[\underline{Y}^k] = \int_d^\infty (y-d)^k dF_Y(y) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

(vgl. (15)) eine positive Ableitung $g'(d) > 0$ für $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ besitzt. Mit

$$n'_k(d) = -k \int_d^\infty (y-d)^{k-1} dF_Y(y) = -kn_{k-1}(d) \quad \text{für } k \geq 2$$

und

$$n'_1(d) = - \int_d^\infty dF_Y(y) = -\mathbb{P}(Y > d) = -(1 - F_Y(d))$$

erhält man für die erste Ableitung von g bzgl. $d \geq 0$:

$$\begin{aligned} g'(d) &= \frac{n'_2(d)n_1(d)^2 - 2n_2(d)n_1(d)n'_1(d)}{n_1(d)^4} \\ &= \frac{-2n_1(d)n_1(d)^2 + 2n_2(d)n_1(d)(1 - F_Y(d))}{n_1(d)^4} \\ &= \frac{2n_1(d)(n_2(d)(1 - F_Y(d)) - n_1(d)^2)}{n_1(d)^4} \end{aligned}$$

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Beweis (Fortsetzung): Zusammen mit (15) folgt daraus weiter für $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$:

$$\begin{aligned} g'(d) &= \frac{2n_1(d) \left(\mathbb{E}[U^2] (1 - F_Y(d))^2 - \mathbb{E}[U]^2 (1 - F_Y(d))^2 \right)}{n_1(d)^4} \\ &= \frac{2n_1(d) \text{Var}(U) (1 - F_Y(d))^2}{n_1(d)^4} > 0 \end{aligned}$$

Folglich ist auch $\text{Vko}(\underline{S})$ bzgl. der Priorität $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ streng monoton wachsend.

Aus dem streng monotonen Wachstum von $\text{Vko}(\underline{S})$ bzgl. $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ und $\lim_{d \rightarrow \infty} \underline{S} = S$ f.s. folgt für $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$:

$$\text{Vko}(\underline{S}) < \text{Vko}(S) \quad (27)$$

Wegen (19)-(20) gilt ferner

$$\begin{aligned} \text{Vko}(\underline{S})^2 &= \frac{\text{Var}(\underline{S})}{\mathbb{E}[\underline{S}]^2} = \frac{\mathbb{E}[\underline{Y}]^2 \cdot \text{Var}(N) + \text{Var}(\underline{Y}) \cdot \mathbb{E}[N]}{\mathbb{E}[N]^2 \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}]^2} \\ &= \frac{\text{Var}(N)}{\mathbb{E}[N]^2} + \frac{\text{Var}(\underline{Y})}{\mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}]^2} \\ &= \text{Vko}(N)^2 + \frac{\text{Vko}(\underline{Y})^2}{\mathbb{E}[N]}, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar

$$\text{Vko}(\underline{S}) > \text{Vko}(N) \quad (28)$$

folgt. Aus dem streng monotonen Wachstum von $\text{Vko}(\underline{S})$ bzgl. $d \geq 0$ mit $F_Y(d) < 1$ und $\lim_{d \rightarrow 0^+} \underline{S} = S$ f.s. folgt

$$\text{Vko}(S) < \text{Vko}(\underline{S}). \quad (29)$$

Zusammengenommen liefern (27)-(29) schließlich die Behauptung (23).

6. Risikoteilung

6.6 Auswirkung der nichtproportionalen Risikoteilung: Gesamtschadenhöhe

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Bei Erhöhung der Priorität d erhöht sich das durch den **Variationskoeffizienten** ausgedrückte Risiko sowohl für den Erst- als auch für den Rückversicherer.
- Bei einer **Quoten-Rückversicherung** gilt:

$$\begin{aligned}\sigma(S) &= c\sigma(S) + (1-c)\sigma(S) \\ &= c\sqrt{\text{Var}(S)} + (1-c)\sqrt{\text{Var}(S)} \\ &= \sqrt{\text{Var}(cS)} + \sqrt{\text{Var}((1-c)S)} \\ &= \sqrt{\text{Var}(\underline{S})} + \sqrt{\text{Var}(\underline{S})} \\ &= \sigma(\underline{S}) + \sigma(\underline{S})\end{aligned}$$

- Aus (23) ist ersichtlich, dass bei einer **Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung** das Zweitrisiko stets gefährlicher ist als das Erstrisiko. Entsprechendes gilt häufig auch im Falle einer **Summenexzedenten-Rückversicherung** (vgl. Beispiel in Abschnitt 6.3). Dieser Sachverhalt macht diese beiden Rückversicherungsformen für den Träger des Erstrisikos sehr attraktiv, solange der Rückversicherer sein höheres Risiko nicht durch einen entsprechenden hohen Risikozuschlag wieder auszugleichen versucht.

Abschnitt 6.7

Entlastungseffekt

6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Im Folgenden bezeichne S wieder den Gesamtschaden, $\underline{S}$ den Schaden des Erstrisikos und $\underline{\underline{S}}$ den Schaden des Zweitriskos. Für die nichtproportionale Risikoteilung mit Selbstbehaltsgrenze $d \geq 0$ wurde der sog. **Entlastungseffekt**

$$r(d) := \frac{\mathbb{E}[\underline{S}]}{\mathbb{E}[S]} \quad (30)$$

eingeführt. Dieser Quotient gibt den Teil des erwarteten Gesamtschadens $\mathbb{E}[S]$ an, der unter die Selbstbehaltsgrenze $d \geq 0$ des Erstrisikos fällt. Also den Anteil, um den der Träger des Zweitriskos aufgrund der Existenz eines Selbstbehalts der Höhe d im Durchschnitt entlastet wird.

Der Wert

$$1 - \frac{\mathbb{E}[\underline{S}]}{\mathbb{E}[S]} = \frac{\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}]}{\mathbb{E}[S]} \quad (31)$$

wird als **Risikokoeffizient** bezeichnet. Er gibt den Anteil des erwarteten Gesamtschadens $\mathbb{E}[S]$ an, der auf den Träger des Zweitriskos entfällt.

6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Im Folgenden wird der **Entlastungseffekt** speziell für den Fall einer **Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung** mit Haftstrecke $h = \infty$ betrachtet (vgl. Abschnitt 6.2) und der Gesamtschaden sei durch ein **kollektives Modell**

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i$$

mit der Schadenanzahl N und den Einzelschadenhöhen $Y_i \sim F_Y$ gegeben (vgl. Abschnitt 5.2). Mit der ersten Formel von Wald (vgl. Abschnitt 5.3) und (2) erhält man für den Entlastungseffekt und den Risikokoeffizienten

$$\frac{\mathbb{E}[\underline{S}]}{\mathbb{E}[S]} = \frac{\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[\underline{Y}]}{\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y]} = \frac{\mathbb{E}[\min\{Y, d\}]}{\mathbb{E}[Y]} \quad (32)$$

bzw.

$$\frac{\mathbb{E}[\underline{S}]}{\mathbb{E}[S]} = \frac{\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[\underline{Y}]}{\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y]} = \frac{\mathbb{E}[\max\{Y - d, 0\}]}{\mathbb{E}[Y]} \quad (33)$$

D.h. der Entlastungseffekt ist von der Schadenanzahl N unabhängig. Dies führt zur folgenden Definition:

6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Die Funktion

$$r : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1], \quad d \mapsto r(d) = \frac{\mathbb{E}[\min\{Y, d\}]}{\mathbb{E}[Y]} \quad (34)$$

heißt **Entlastungseffektfunktion**. Sie ist von Inflationseffekten und Währungsschwankungen unabhängig und spielt z.B. eine wichtige Rolle bei der Quotierung von Rückversicherungen. Im Falle einer **stetigen Verteilungsfunktion** F_Y gilt ferner:

$$\begin{aligned} r(d) &= \frac{\mathbb{E}[\min\{Y, d\}]}{\mathbb{E}[Y]} = \frac{\int_0^\infty (1 - F_{\min\{Y, d\}}(y)) dy}{\mathbb{E}[Y]} \\ &= \frac{\int_0^d (1 - F_{\min\{Y, d\}}(y)) dy + \int_d^\infty (1 - F_{\min\{Y, d\}}(y)) dy}{\mathbb{E}[Y]} \\ &= \frac{\int_0^d (1 - F_Y(y)) dy + \int_d^\infty (1 - F_d(y)) dy}{\mathbb{E}[Y]} \\ &= \frac{\int_0^d (1 - F_Y(y)) dy}{\mathbb{E}[Y]} \end{aligned} \quad (35)$$

Beispiel (Entlastungseffekt für $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$)

a) Für $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ erhält man

$$\begin{aligned} r(d) &= \frac{\int_0^d (1 - F_Y(y)) dy}{\mathbb{E}[Y]} = \frac{\int_0^d e^{-\lambda y} dy}{\frac{1}{\lambda}} \\ &= -e^{-\lambda y} \Big|_0^d = 1 - e^{-\lambda d}. \end{aligned}$$

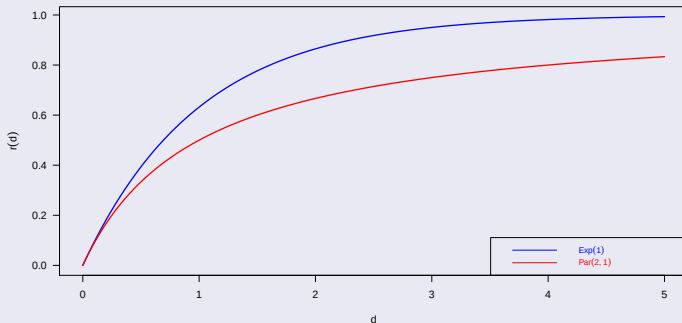
b) Für $Y \sim \text{Par}(\alpha, \beta)$ mit $\alpha > 1$ erhält man (vgl. Beispiel in Abschnitt 7.5)

$$r(d) = \frac{\left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha-1}\right) \mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[Y]} = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+d}\right)^{\alpha-1}.$$

6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Beispiel (Fortsetzung)



Je höher die Entlastungseffektfunktion $r(d)$ verläuft, desto größer ist die Entlastung des Rückversicherers durch die Existenz einer Selbstbehaltsgrenze der Höhe d .

Der Entlastungseffektfunktion besitzt im Falle einer stetigen Verteilungsfunktion F_Y darüber hinaus die folgenden **Eigenschaften**:

6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Satz (Eigenschaften der Entlastungseffektfunktion $r(d)$)

Die Verteilungsfunktion F_Y sei stetig. Dann besitzt die Entlastungseffektfunktion $r(d)$ im Falle einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit Haftstrecke $h = \infty$ im kollektiven Modell die folgenden Eigenschaften:

- a) r ist differenzierbar.
- b) $r(0) = 0$ und $r(y_{\max}) = 1$, wobei $y_{\max} := \sup_{y \in \mathbb{R}} \{F_Y(y) < 1\}$ die maximale Einzelschadenhöhe ist.
- c) Die erste Ableitung von r ist gegeben durch

$$r'(d) = \begin{cases} \frac{1-F_Y(d)}{\mathbb{E}[Y]} > 0 & \text{für } 0 \leq d < y_{\max} \\ 0 & \text{für } d \geq y_{\max} \end{cases}. \quad (36)$$

Insbesondere gilt $r'(0) = \frac{1}{\mathbb{E}[Y]}$ und $r'(y_{\max}) = 0$.

- d) r' ist differenzierbar mit $r''(d) = -\frac{f_Y(d)}{\mathbb{E}[Y]} \leq 0$ für $d \geq 0$, falls Y eine stetige Zufallsvariable ist.

6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Beweis: Zu a): Folgt unmittelbar aus (35) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Zu b): Aus (35) folgt unmittelbar $r(0) = 0$ und wegen

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty (1 - F_Y(y)) dy = \int_0^{y_{\max}} (1 - F_Y(y)) dy \quad (37)$$

auch $r(y_{\max}) = 1$.

Zu c): Wegen (37) gilt:

$$r(d) = \begin{cases} \frac{\int_0^d (1 - F_Y(y)) dy}{\mathbb{E}[Y]} & \text{für } 0 \leq d < y_{\max} \\ 1 & \text{für } d \geq y_{\max} \end{cases}$$

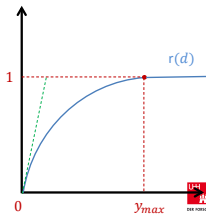
Zusammen mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daraus (36).

Zu d): Folgt unmittelbar aus (36). ■

Die Aussagen b) und d) besagen, dass r **konkav** ist und von $(0,0)$ nach $(y_{\max}, 1)$ verläuft. Aufgrund der Konkavität von r gilt die Abschätzung

$$r(d) \leq r(0) + r'(0)(d - 0) = r'(0)d = \frac{d}{\mathbb{E}[Y]},$$

welche für kleine Selbstbehaltsgrenzen d relativ gut ist.



6. Risikoteilung

6.7 Entlastungseffekt

Bemerkungen:

- Mit Aussage c) des letzten Satzes folgt

$$1 - F_Y(d) = \mathbb{E}[Y]r'(d) = \frac{r'(d)}{r'(0)}$$

und damit

$$F_Y(d) = 1 - \frac{r'(d)}{r'(0)}.$$

D.h. die Schadenhöhenverteilung F_Y ist durch die Entlastungseffktfunktion r festgelegt und lässt sich aus ihr berechnen.

- Aus der Konkavität von r und der Aussage b) folgt weiter

$$r(cy_{\max}) = r(cy_{\max} + (1-c)0) \geq cr(y_{\max}) + (1-c)r(0) = c$$

für $0 < c < 1$. Eine Selbstbehaltsgrenze d von $100c\%$ der maximalen Einzelschadenhöhe $y_{\max}$ hat somit einen (meist deutlich) **höheren Entlastungseffekt** als $100c\%$. D.h. insbesondere, dass der Rückversicherer mehr entlastet wird als durch eine proportionale $100c\%$ -Selbstbeteiligung des Erstversicherers.

- Der Graph von r wird als **Exposurekurve** bezeichnet.

Abschnitt 6.8

Literatur

6. Risikoteilung

6.8 Literatur



AM BEST REPORT (2021). *AM Best's annual ranking of the Top 50 Global Reinsurance groups in 2021*. August 2021.



DIENST, H.-R. (1988). *Mathematische Verfahren der Rückversicherung*. Verlag Versicherungswirtschaft.



GORGE, G. (2013). *Insurance Risk Management and Reinsurance*. Iulu.



LIEBWEIN, P. (2009). *Klassische und moderne Formen der Rückversicherung*. Verlag Versicherungswirtschaft.