

Quantitatives Risikomanagement 1

WS 2025

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg



Lösungen

Lösungen zu Kapitel 1

Aufgabe 1

Lösungen

1. Aufgabe

Es gilt

$$\text{Var}(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{und} \quad \text{Vko}(Y_i) = \frac{\sigma}{\mu} = 4.$$

Daraus folgt zusammen mit dem zentralen Grenzwertsatz:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\bar{Y} - \mu| < \delta\mu) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \frac{\delta\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)} < \frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) - 1 \end{aligned}$$

D.h. es muss

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\text{Vko}(Y_i)}\right) - 1 \geq 0,95$$

bzw.

$$n \geq \left(\frac{\text{Vko}(Y_i)}{\delta} \Phi^{-1}(0,975)\right)^2$$

gelten. Mit $\text{Vko}(Y_i) = 4$ und $\Phi^{-1}(0,975) = 1,959964$ liefert dies für n die folgenden (gerundeten) Werte:

δ	0,1	0,05	0,03	0,01
n	6146	24585	68293	614633

Interpretation: Bei einem Portfolio von $n = 614.633$ oder mehr Versicherungspolicen, weicht der im Portfolio beobachtete Schadendurchschnitt $\bar{Y}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als $\delta = 1\%$ von der erwarteten Einzelschadenhöhe $\mu = \mathbb{E}[Y_i]$ ab.

Aufgabe 2

a) Für $a > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Vko}(aX) &= \frac{\sqrt{\text{Var}(aX)}}{\mathbb{E}[aX]} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \text{Var}(X)}}{a \mathbb{E}[X]} \\ &= \frac{|a| \sqrt{\text{Var}(X)}}{a \mathbb{E}[X]} \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{\mathbb{E}[X]} = \text{Vko}(X) \end{aligned}$$

b) Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ erhält man:

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \frac{\mathbb{E}[(aX + b - \mathbb{E}[aX + b])^3]}{\sigma(aX + b)^3} \\ &= \frac{\mathbb{E}[(aX + b - (a\mathbb{E}[X] + b))^3]}{\sigma(aX)^3} \\ &= \frac{\mathbb{E}[(aX - a\mathbb{E}[X])^3]}{a^3 \sigma(X)^3} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]}{\sigma(X)^3} = V(X) \end{aligned}$$

c) Aus $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ und $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$ folgt $\mathbb{E}[X] > 0$ und $\mathbb{E}[Y] > 0$. Für positive Zufallsvariablen X und Y gilt daher:

$$\begin{aligned} \text{Vko}(X) + \text{Vko}(Y) &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{\mathbb{E}[X]} + \frac{\sqrt{\text{Var}(Y)}}{\mathbb{E}[Y]} \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \frac{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[X]}}{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]} + \frac{\sqrt{\text{Var}(Y)} \cdot \frac{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[Y]}}{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]} \\ &\geq \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]} + \frac{\sqrt{\text{Var}(Y)}}{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]} \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)}}{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]} \\ &\geq \frac{\sqrt{\text{Var}(X + Y)}}{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]} \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}(X + Y)}}{\mathbb{E}[X + Y]} \\ &= \text{Vko}(X + Y) \end{aligned}$$

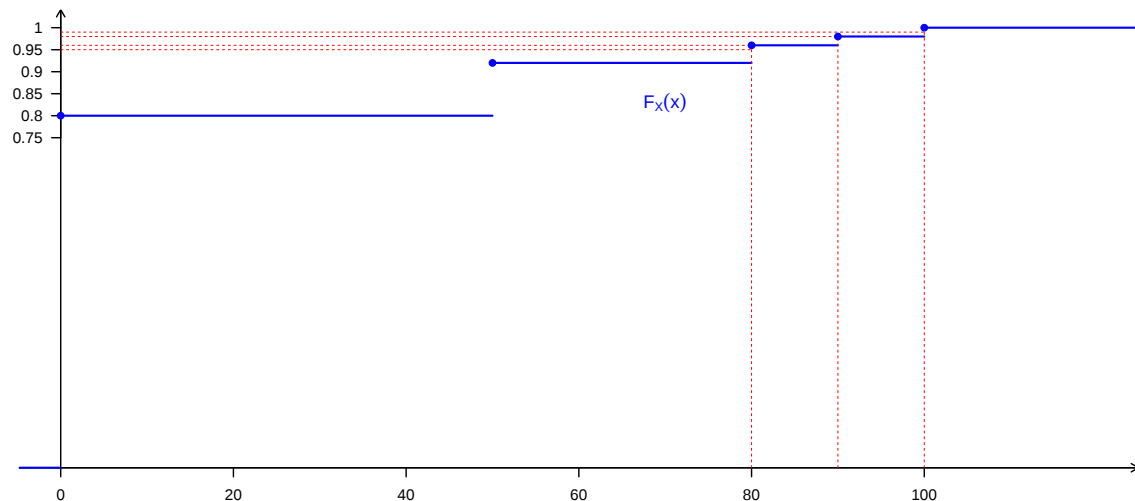
Lösungen zu Kapitel 2

Aufgabe 1

Die folgende Abbildung zeigt die Verteilungsfunktion von X und die (roten gestrichelten) horizontalen Linien entsprechen den Wahrscheinlichkeitsniveaus 0,95; 0,96; 0,98 bzw. 0,99. Aus dieser Abbildung und der Definition

$$\text{VaR}_q(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_X(x) \geq q\}$$

ist zu erkennen, dass $\text{VaR}_{0,95}(X) = 80$, $\text{VaR}_{0,96}(X) = 80$, $\text{VaR}_{0,98}(X) = 90$ und $\text{VaR}_{0,99}(X) = 100$ gilt.



Aufgabe 2

a) Für die Verteilungsfunktion von X gilt

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \left(-e^{-\lambda u} \right) \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0.$$

Man erhält die Inverse von $F_X(x)$ für $x \geq 0$ durch Auflösen von $q = F_X(x)$ nach x . Dies liefert

$$1 - q = e^{-\lambda x} \quad \text{bzw.} \quad x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - q)$$

für alle $q \in (0, 1)$. Die Inverse von F_X ist somit gegeben durch

$$F_X^{-1}(q) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - q) \quad \text{für } q \in (0, 1),$$

und für den Value-at-Risk von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ erhält man folglich

$$\text{VaR}_q(X) = F_X^{-1}(q) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - q).$$

Für den Expected-Shortfall von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ folgt damit

$$\text{ES}_q(X) = \frac{1}{1 - q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du = \frac{-1}{\lambda(1 - q)} \int_q^1 \ln(1 - u) du.$$

Mit dem Hinweis folgt daraus weiter

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \frac{-1}{\lambda(1 - q)} \int_q^1 \ln(1 - u) du \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - q)} \left((1 - u) \ln(1 - u) - (1 - u) \right) \Big|_q^1 \\ &= \lim_{u \uparrow 1} \frac{1}{\lambda(1 - q)} (1 - u) \ln(1 - u) - \frac{1}{\lambda(1 - q)} ((1 - q) \ln(1 - q) - (1 - q)) \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - q)} \lim_{u \uparrow 1} \frac{\ln(1 - u)}{\frac{1}{1 - u}} - \frac{1}{\lambda} \ln(1 - q) + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1)$$

Für den Grenzwert in (1) erhält man mit der Regel von L'Hôpital

$$\lim_{u \uparrow 1} \frac{\ln(1 - u)}{\frac{1}{1 - u}} = \lim_{u \uparrow 1} \frac{-\frac{1}{1 - u}}{\frac{1}{(1 - u)^2}} = \lim_{u \uparrow 1} -(1 - u) = 0.$$

Der Expected-Shortfall ist somit gegeben durch

$$\text{ES}_q(X) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \ln(1 - q) = \frac{1}{\lambda} + \text{VaR}_q(X).$$

- b) Für die verschiedenen Parameterwerte $\lambda = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$ und Sicherheitsniveaus $q = 0,95; 0,99; 0,995$ erhält man:

	$\lambda = \frac{1}{10}$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 5$
$\text{VaR}_{0,95}(X)$	29,9573	5,9915	2,9957	1,4979	0,5991
$\text{VaR}_{0,99}(X)$	46,0517	9,2103	4,6052	2,3026	0,9210
$\text{VaR}_{0,995}(X)$	52,9832	10,5966	5,2983	2,6492	1,0597
$\text{ES}_{0,95}(X)$	39,9573	7,9915	3,9957	1,9979	0,7991
$\text{ES}_{0,99}(X)$	56,0517	11,2103	5,6052	2,8026	1,1210
$\text{ES}_{0,995}(X)$	62,9832	12,5966	6,2983	3,1492	1,2597

Die Differenz

$$\text{ES}_q(X) - \text{VaR}_q(X)$$

ist unabhängig vom Sicherheitsniveau q stets gleich $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$. Dies ist eine spezielle Eigenschaft der Exponential-Verteilung und gilt nicht für andere Verteilungen.

Aufgabe 3

- a) Zwischen der Kovarianz $\text{Cov}(Y, Z)$ und der Korrelation $\rho(Y, Z)$ zweier Zufallsvariablen Y und Z besteht allgemein der Zusammenhang

$$\text{Cov}(Y, Z) = \rho(Y, Z) \sqrt{\text{Var}(Y) \text{Var}(Z)}.$$

Zusammen mit den Angaben liefert dies:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= 0,5 \sqrt{144 \cdot 6,25} \\ &= 0,5 \cdot 12 \cdot 2,5 = 15 = \text{Cov}(X_2, X_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_2, X_3) &= 0 \sqrt{6,25 \cdot 56,25} \\ &= 0 = \text{Cov}(X_3, X_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_3) &= 0 \sqrt{144 \cdot 56,25} \\ &= 0 \cdot 12 \cdot 7,5 = 0 = \text{Cov}(X_3, X_1) \end{aligned}$$

Die Varianz-Kovarianzmatrix lautet somit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 144 & 15 & 0 \\ 15 & 6,25 & 0 \\ 0 & 0 & 56,25 \end{pmatrix}.$$

- b) Der Erwartungswert und die Varianz von X sind gegeben durch:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^3 X_i \right] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}[X_i] = 20$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \text{Var} \left(\sum_{i=1}^3 X_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{Var}(X_i) + 2 \text{Cov}(X_1, X_2) + 2 \text{Cov}(X_1, X_3) + 2 \text{Cov}(X_2, X_3) \\ &= 144 + 6,25 + 56,25 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ &= 236,5 \end{aligned}$$

- c) Bei X_1, X_2, X_3 und X handelt es sich um Normal-verteilte Zufallsvariablen. Genauer gilt:

$$X_1 \sim N(10; 144), \quad X_2 \sim N(5; 6,25), \quad X_3 \sim N(5; 56,25) \quad \text{und} \quad X \sim N(20; 236,5)$$

Der Value-at-Risk und der Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 99,5\%$ einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen Y sind gegeben durch

$$\text{VaR}_{0,995}(Y) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(0,995)$$

bzw.

$$\text{ES}_{0,995}(Y) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(0,995))}{1 - 0,995}$$

(vgl. Abschnitt 2.5) mit

$$\Phi^{-1}(0,995) = 2,575829 \quad \text{und} \quad \frac{\phi(\Phi^{-1}(0,995))}{1 - 0,995} = 2,891951.$$

Damit erhält man

$$\text{VaR}_{0,995}(X_1) = 10 + 12 \cdot 2,575829 \approx 40,91$$

$$\text{VaR}_{0,995}(X_2) = 5 + 2,5 \cdot 2,575829 \approx 11,44$$

$$\text{VaR}_{0,995}(X_3) = 5 + 7,5 \cdot 2,575829 \approx 24,32$$

$$\text{VaR}_{0,995}(X) = 20 + \sqrt{236,5} \cdot 2,575829 \approx 59,61$$

und

$$\text{ES}_{0,995}(X_1) = 10 + 12 \cdot 2,891951 \approx 44,70$$

$$\text{ES}_{0,995}(X_2) = 5 + 2,5 \cdot 2,891951 \approx 12,23$$

$$\text{ES}_{0,995}(X_3) = 5 + 7,5 \cdot 2,891951 \approx 26,69$$

$$\text{ES}_{0,995}(X) = 20 + \sqrt{236,5} \cdot 2,891951 \approx 64,47.$$

Aufgabe 4

Lösungen

4. Aufgabe

a) Aus

$$\mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma^2/2} = 2300$$

$$\text{Vko}(S) = \frac{\sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[S]^2}}{\mathbb{E}[S]} = 0,05$$

folgt nach einer kurzen Umformung:

$$\sigma^2 = \ln(0,05^2 + 1) \approx 0,0025$$

$$\mu = \ln(2300) - \frac{\sigma^2}{2} \approx 7,74$$

Werden diese Werte und $q = 99\%$ in

$$\text{RK}(S) = \text{VaR}_q(S - \mathbb{E}[S]) = \text{VaR}_q(S) - \mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(q)} - e^{\mu + \sigma^2/2}$$

bzw.

$$\text{RK}(S) = \text{ES}_q(S - \mathbb{E}[S]) = \text{ES}_q(S) - \mathbb{E}[S] = \frac{1}{1-q} e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(q)) - e^{\mu + \sigma^2/2}$$

eingesetzt, erhält man für die beiden Fälle die benötigten Risikokapitalien:

$$\text{i) } \text{RK}(S) = \text{VaR}_{0,99}(S - \mathbb{E}[S]) \approx 280 \text{ Mio. CHF}$$

$$\text{ii) } \text{RK}(S) = \text{ES}_{0,99}(S - \mathbb{E}[S]) \approx 325 \text{ Mio. CHF.}$$

b) Es sei $x = \text{VaR}_{0,99}(S + Y)$. Dann ist x die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} 0,99 &= F_{S+Y}(x) = \mathbb{P}(S + Y \leq x) \\ &= \mathbb{P}(Y = 0) \cdot \mathbb{P}(S + Y \leq x | Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 400) \cdot \mathbb{P}(S + Y \leq x | Y = 400) \\ &= 0,998 \cdot \mathbb{P}(S \leq x) + 0,002 \cdot \mathbb{P}(S + 400 \leq x) \\ &= 0,998 \cdot F_S(x) + 0,002 \cdot F_S(x - 400). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann z.B. mittels der Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{0,998 \cdot F_S(x) + 0,002 \cdot F_S(x - 400) - 0,99}{0,998 \cdot f_S(x) + 0,002 \cdot f_S(x - 400)}$$

und einem geeigneten Startwert x_0 numerisch gelöst werden. Dabei sind F_S und f_S die Verteilungs- bzw. Dichtefunktion der $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung. Mit dem Startwert $x_0 = \text{VaR}_{0,99}(S) \approx 2580$ Mio. CHF erhält man bereits nach zwei Iterationen den Näherungswert

$$\text{VaR}_{0,99}(S + Y) \approx 2589 \text{ Mio. CHF.}$$

Zusammen mit

$$\mathbb{E}[S + Y] = \mathbb{E}[S] + \mathbb{E}[Y] = 2300 + 0,002 \cdot 400 \approx 2301 \text{ Mio. CHF}$$

liefert dies das benötigte Risikokapital

$$\text{RK}(S + Y) = \text{VaR}_{0,99}(S + Y) - \mathbb{E}[S + Y] \approx 2589 - 2301 = 288 \text{ Mio. CHF.}$$

Aufgabe 5

a) Es gilt

$$\text{VaR}_q(X) = \inf_{x_k \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=-\infty}^k p_i \geq q \right\} = x_{i_0}$$

und

$$\text{ES}_q(X) = \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \sum_{x_i > \text{VaR}_q(X)} p_i (x_i - \text{VaR}_q(X))$$

(vgl. Abschnitt 2.5). Durch Umformung folgt daraus

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \sum_{x_i > \text{VaR}_q(X)} p_i x_i - \frac{1}{1-q} \sum_{x_i > \text{VaR}_q(X)} p_i \text{VaR}_q(X) \\ &= \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \mathbb{E}[X] - \frac{1}{1-q} \sum_{x_i \leq \text{VaR}_q(X)} p_i x_i - \frac{1}{1-q} \sum_{x_i > \text{VaR}_q(X)} p_i \text{VaR}_q(X) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i x_i \right) + \frac{1}{1-q} \left((1-q) \text{VaR}_q(X) - \text{VaR}_q(X) \sum_{i=i_0+1}^{\infty} p_i \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i x_i \right) + \frac{1}{1-q} \left(\left(\sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i - q \right) \text{VaR}_q(X) \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i x_i + \delta \text{VaR}_q(X) \right). \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{CTE}_q(X) &= \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_q(X)] \\ &= \frac{1}{1 - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i} \sum_{i=i_0+1}^{\infty} p_i x_i. \end{aligned}$$

Aus $\delta = 0$ folgt ferner

$$\sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i = q.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \frac{1}{1-q} \left(\mathbb{E}[X] - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i x_i + \delta \text{VaR}_q(X) \right) \\ &= \frac{1}{1 - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i} \left(\sum_{i=i_0+1}^{\infty} p_i x_i \right) \\ &= \text{CTE}_q(X). \end{aligned}$$

c) Mit

$$\text{VaR}_q(X) = \inf_{x_k \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=-\infty}^k p_i \geq q \right\}$$

und

$$\text{ES}_q(X) = \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \sum_{x_i > \text{VaR}_q(X)} p_i (x_i - \text{VaR}_q(X))$$

erhält man:

p	$1-p$	$\text{VaR}_{99\%}(X)$	$\text{ES}_{99\%}(X)$
0,5%	99,5%	0	150
1%	99%	0	300
1,5%	98,5%	300	300

Aufgabe 6

- a) Für $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

und damit

$$1 - F_X(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F_{\tilde{X}}(x) &= 1 - g(1 - F_X(x)) \\ &= 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)\right) + \alpha\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\left(-\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) + \alpha\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{\ln(x) - (\mu + \alpha\sigma)}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(x) - (\mu + \alpha\sigma)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

D.h. es gilt $\tilde{X} \sim \text{LN}(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$.

- b) Für $\alpha > 0$ gilt

$$F_{\tilde{X}}(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - (\mu + \alpha\sigma)}{\sigma}\right) \leq \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) = F_X(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. $\tilde{X}$ dominiert X stochastisch (vgl. Abschnitt 2.1) und ist damit risikoreicher als X .

- c) Gemäß Aufgabenteil a) gilt $\tilde{X} \sim \text{LN}(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$. Zusammen mit dem Hinweis folgt daraus:

$$\rho_g(X) = \mathbb{E}[\tilde{X}] = e^{\mu + \alpha\sigma + \sigma^2/2}$$

Lösungen zu Kapitel 3



Aufgabe 1



- a) Aufgrund der Normalverteilungsannahme $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ gilt

$$\text{RK}(X_i) = \text{ES}_q(X_i - \mathbb{E}[X_i]) = \text{ES}_q(X_i) - \mathbb{E}[X_i] = \frac{\sigma_i}{1-q} \phi\left(\Phi^{-1}(q)\right) \quad (2)$$

mit $q = 0,99$ (siehe Abschnitt 2.5). D.h. $\text{RK}(X_i)$ ist proportional zur Standardabweichung σ_i . Aus der Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung folgt

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Da die verschiedenen Risikokategorien als stochastisch unabhängig angenommen werden, gilt weiter

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^4 \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sigma_i^2}.$$

Für das Risikokapital von X folgt damit

$$\begin{aligned} \text{RK}(X) &= \frac{\sigma}{1-q} \phi\left(\Phi^{-1}(q)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{1-q} \sigma_i \phi\left(\Phi^{-1}(q)\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 \text{RK}(X_i)^2}. \end{aligned}$$

D.h. bei stochastisch unabhängigen normalverteilten Risiken ist das Risikokapital des aggregierten Risikos durch die Wurzel der Summe der quadrierten Risikokapitalien der Einzelrisiken gegeben. Hier resultiert

$$\text{RK}(X) = \sqrt{195^2 + 60^2 + 210^2 + 75^2} \approx 302 \text{ Mio. CHF.}$$

Dies ergibt den Diversifikationseffekt

$$D(X_1, \dots, X_4) = \sum_{i=1}^4 \text{RK}(X_i) - \text{RK}(X) \approx 238 \text{ Mio. CHF}$$

bzw. in Prozent

$$\frac{D(X_1, \dots, X_4)}{540 \text{ Mio. CHF}} \approx 44\%.$$

- b) Die Risikokategorien werden nun nicht mehr als stochastisch unabhängig angenommen. Mit den angegebenen Korrelationen ρ_{ij} erhält man

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i,j=1}^4 \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i,j=1}^4 \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i,j=1}^4 \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}.$$

Mit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)^T$ und

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0,08 & 0,24 & 0,24 \\ -0,08 & 1 & -0,37 & -0,29 \\ 0,24 & -0,37 & 1 & 0,37 \\ 0,24 & -0,29 & 0,37 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man in Matrixschreibweise

$$\sigma = \sqrt{\sigma^T \mathbf{R} \sigma}.$$

Zusammen mit

$$\mathbf{u} = (\text{RK}(X_1), \text{RK}(X_2), \text{RK}(X_3), \text{RK}(X_4))^T$$

und (2) erhält man damit für das Risikokapital von X

$$\begin{aligned} \text{RK}(X) &= \frac{\sigma}{1-q} \phi(\Phi^{-1}(q)) = \sqrt{\frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q} \sigma^T \mathbf{R} \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q}} \\ &= \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Damit resultiert

$$\text{RK}(X) \approx 340 \text{ Mio. CHF},$$

was einem Diversifikationseffekt von

$$D(X_1, \dots, X_4) = \sum_{i=1}^4 \text{RK}(X_i) - \text{RK}(X) \approx 200 \text{ Mio. CHF}$$

bzw.

$$\frac{D(X_1, \dots, X_4)}{540 \text{ Mio. CHF}} \approx 37\%$$

entspricht.

Aufgabe 2

Lösungen

2. Aufgabe

- a) Aufgrund der Translationsinvarianz des Expected Shortfalls (vgl. Abschnitt 2.2) gilt für die Risikokapitalien der drei Geschäftsbereiche

$$\text{RK}(X_i) = \text{ES}_{0,95}(X_i) = \text{ES}_{0,95}(Y_i) - c_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

X_1 : Mit der Formel für den Expected-Shortfall von normalverteilten Risiken (vgl. Abschnitt 2.5) erhält man daher mit (3) und $Y_1 \sim N(100, 20^2)$ für den ersten Geschäftsbereich das Stand-alone-Risikokapital:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_1) &= \text{ES}_{0,95}(Y_1) - 105 = 100 + \frac{20}{1 - 0,95} \phi\left(\Phi^{-1}(0,95)\right) - 105 \\ &\approx 36,3 \end{aligned}$$

Dabei sind ϕ und Φ die Dichte bzw. Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

X_2 : Mit der Formel für den Expected-Shortfall von lognormalverteilten Risiken (vgl. Abschnitt 2.5) erhält man mit (3) und $Y_2 \sim \text{LN}(4, 1)$ für den zweiten Geschäftsbereich das Stand-alone-Risikokapital:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_2) &= \text{ES}_{0,95}(Y_2) - 120 = \frac{1}{1 - 0,95} e^{4+1/2} \Phi(1 - \Phi^{-1}(0,95)) - 120 \\ &\approx 347,2 \end{aligned}$$

X_3 : Mit der Formel für den Expected-Shortfall von Pareto-verteilten Risiken (vgl. Abschnitt 2.5) erhält man mit (3) und $Y_3 \sim \text{Par}(4, 300)$ für den dritten Geschäftsbereich das Stand-alone-Risikokapital:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_3) &= \text{ES}_{0,95}(Y_3) - 130 = 300 \left(\frac{4}{3} (1 - 0,95)^{-\frac{1}{0,95}} \right) - 300 - 130 \\ &\approx 415,9 \end{aligned}$$

- b) Mit $\text{RK}(X) = \text{ES}_{0,95}(X) = 622$ und den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) erhält man den Diversifikationseffekt

$$\begin{aligned} D(X_1, X_2, X_3) &= \sum_{i=1}^3 \text{ES}_{0,95}(X_i) - \text{ES}_{0,95}(X) \\ &= 36,3 + 347,2 + 415,9 - 622 \\ &= 177,4. \end{aligned}$$

- c) Beim proportionalen Allokationsverfahren berechnen sich die Risikokapitalien gemäß

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^3 \rho(X_j)}$$

(vgl. Abschnitt 3.3). Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) und $\text{RK}(X) = \text{ES}_{0,95}(X) = 622$ ergeben sich daher für die drei Geschäftsbereiche die folgenden Risikokapitalien:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_1) &= \frac{36,3}{36,3 + 347,2 + 415,9} \cdot 622 = 28,2 \\ \text{RK}(X_2) &= \frac{347,2}{36,3 + 347,2 + 415,9} \cdot 622 = 270,2 \\ \text{RK}(X_3) &= \frac{415,9}{36,3 + 347,2 + 415,9} \cdot 622 = 323,6 \end{aligned}$$

- d) Beim inkrementellen Allokationsverfahren berechnen sich die Risikokapitalien gemäß $RK(X_1) = ES_{0,95}(X_1)$ und

$$RK(X_i) = ES_{0,95} \left(\sum_{j=1}^i X_j \right) - ES_{0,95} \left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j \right) \quad \text{für } i = 2, 3$$

(vgl. Abschnitt 3.4). Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) sowie $RK(X_1 + X_2) = ES_{0,95}(X_1 + X_2) = 360,6$ und $RK(X) = ES_{0,95}(X) = 622$ ergeben sich daher für die drei Geschäftsbereiche die folgenden Risikokapitalien:

$$RK(X_1) = ES_{0,95}(X_1) = 36,3$$

$$RK(X_2) = ES_{0,95}(X_1 + X_2) - ES_{0,95}(X_1) = 360,6 - 36,3 = 324,3$$

$$RK(X_3) = ES_{0,95}(X_1 + X_2 + X_3) - ES_{0,95}(X_1 + X_2) = 622 - 360,6 = 261,4$$

- e) Bei Shapley-Wert-Allokation berechnen sich die Risikokapitalien gemäß

$$RK(X_i) = \sum_{k=0}^2 \frac{k!(2-k)!}{3!} \sum_{M \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{i\}, |M|=k} \left(\rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_i \right) - \rho \left(\sum_{l \in M} X_l \right) \right)$$

für $i = 1, 2, 3$ und $RK \left(\sum_{l \in M} X_l \right) := 0$ für $|M| = 0$ (vgl. Abschnitt 3.5). Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) sowie

$$RK(X_1 + X_2) = ES_{0,95}(X_1 + X_2) = 360,6$$

$$RK(X_1 + X_3) = ES_{0,95}(X_1 + X_3) = 428,3$$

$$RK(X_2 + X_3) = ES_{0,95}(X_2 + X_3) = 606,7$$

$$RK(X) = ES_{0,95}(X) = 622$$

ergeben sich daher für die drei Geschäftsbereiche die folgenden Risikokapitalien:

$$\begin{aligned}
 \text{RK}(X_1) &= \frac{2}{6} \text{ES}_{0,95}(X_1) + \frac{1}{6} \left(\text{ES}_{0,95}(X_2 + X_1) - \text{ES}_{0,95}(X_2) \right. \\
 &\quad \left. + \text{ES}_{0,95}(X_3 + X_1) - \text{ES}_{0,95}(X_3) \right) \\
 &\quad + \frac{2}{6} \left(\text{ES}_{0,95}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{ES}_{0,95}(X_2 + X_3) \right) \\
 &\approx \frac{2}{6} \cdot 36,3 + \frac{1}{6} (360,6 - 347,2 + 428,3 - 415,9) + \frac{2}{6} (622 - 606,7) = 21,5 \\
 \text{RK}(X_2) &= \frac{2}{6} \text{ES}_{0,95}(X_2) + \frac{1}{6} \left(\text{ES}_{0,95}(X_1 + X_2) - \text{ES}_{0,95}(X_1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{ES}_{0,95}(X_3 + X_2) - \text{ES}_{0,95}(X_3) \right) \\
 &\quad + \frac{2}{6} \left(\text{ES}_{0,95}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{ES}_{0,95}(X_1 + X_3) \right) \\
 &\approx \frac{2}{6} \cdot 347,2 + \frac{1}{6} (360,6 - 36,3 + 606,7 - 415,9) + \frac{2}{6} (622 - 428,3) = 266,15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{RK}(X_3) &= \frac{2}{6} \text{ES}_{0,95}(X_3) + \frac{1}{6} \left(\text{ES}_{0,95}(X_1 + X_3) - \text{ES}_{0,95}(X_1) \right. \\
 &\quad \left. + \text{ES}_{0,95}(X_2 + X_3) - \text{ES}_{0,95}(X_2) \right) \\
 &\quad + \frac{2}{6} \left(\text{ES}_{0,95}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{ES}_{0,95}(X_1 + X_2) \right) \\
 &\approx \frac{2}{6} \cdot 415,9 + \frac{1}{6} (428,3 - 36,3 + 606,7 - 347,2) + \frac{2}{6} (622 - 360,6) = 334,35
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösungen

3. Aufgabe

- a) Mit der Varianz-Kovarianzmatrix aus Übungsaufgabe 3) in Kapitel 2 erhält man:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, X_1) &= \text{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_1) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Cov}(X_2, X_1) + \text{Cov}(X_3, X_1) = 144 + 15 + 0 = 159\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, X_2) &= \text{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_2) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Var}(X_2) + \text{Cov}(X_3, X_2) = 15 + 6,25 + 0 = 21,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, X_3) &= \text{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_3) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_3) + \text{Cov}(X_2, X_3) + \text{Var}(X_3) = 0 + 0 + 56,25 = 56,25\end{aligned}$$

Bei Verwendung des Kovarianzprinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß resultieren folglich die Risikokapitalien:

$$\text{RK}(X_1) = \frac{\text{Cov}(X, X_1)}{\text{Var}(X)} \text{ES}_{0,995}(X) \approx \frac{159}{236,5} 64,47 = 43,35$$

$$\text{RK}(X_2) = \frac{\text{Cov}(X, X_2)}{\text{Var}(X)} \text{ES}_{0,995}(X) \approx \frac{21,25}{236,5} 64,47 = 5,79$$

$$\text{RK}(X_3) = \frac{\text{Cov}(X, X_3)}{\text{Var}(X)} \text{ES}_{0,995}(X) \approx \frac{56,25}{236,5} 64,47 = 15,33$$

Das modifizierte Kovarianzprinzip liefert dagegen:

$$\text{RK}(X_1) = \mathbb{E}[X_1] + \frac{\text{Cov}(X, X_1)}{\text{Var}(X)} (\text{ES}_{0,995}(X) - \mathbb{E}[X])$$

$$\approx 10 + \frac{159}{236,5} (64,47 - 20) = 39,90$$

$$\text{RK}(X_2) = \mathbb{E}[X_2] + \frac{\text{Cov}(X, X_2)}{\text{Var}(X)} (\text{ES}_{0,995}(X) - \mathbb{E}[X])$$

$$\approx 5 + \frac{21,25}{236,5} (64,47 - 20) = 9,00$$

$$\text{RK}(X_3) = \mathbb{E}[X_3] + \frac{\text{Cov}(X, X_3)}{\text{Var}(X)} (\text{ES}_{0,995}(X) - \mathbb{E}[X])$$

$$\approx 5 + \frac{56,25}{236,5} (64,47 - 20) = 15,58$$

- b) Es gilt $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ stimmt daher mit dem modifizierten Kovarianzprinzip überein, wenn dort $\text{CTE}_{0,995}(X)$ als Risikomaß verwendet wird (siehe letzter Satz in Abschnitt 3.7).

Da jedoch im Falle von Risiken mit stetiger Verteilung die Risikomaße $\text{CTE}_{0,995}(X)$ und $\text{ES}_{0,995}(X)$ übereinstimmen (siehe letzter Satz in Abschnitt 2.5), liefert das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip dieselben Ergebnisse wie das modifizierte Kovarianzprinzip mit $\text{ES}_{0,995}(X)$ als Risikomaß (für die Ergebnisse siehe Lösung der Übungsaufgabe 3a) in Kapitel 2).

- c) Das Euler-Prinzip stimmt bei Verwendung eines Risikomaßes der Form

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha \sigma(X)$$

mit dem modifizierten Kovarianzprinzip überein, wenn dort ebenfalls das Risikomaß $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha \sigma(X)$ verwendet wird (siehe Satz in Abschnitt 3.8). Da jedoch wegen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ die Risiken X_1, X_2, X_3 und X Normal-verteilt sind, ist der Expected-Shortfall von der Form

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha \sigma(X) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q}$$

(vgl. Abschnitt 2.5). Das Euler-Prinzip stimmt somit bei Verwendung des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß mit dem modifizierten Kovarianzprinzip überein, wenn dort ebenfalls der Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß verwendet wird (für die Ergebnisse siehe Lösung der Übungsaufgabe 3a) in Kapitel 2).

Lösungen zu Kapitel 4

Aufgabe 1

a) Für $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ gilt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^\alpha & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.12). Damit erhält man für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{ty} (1 - F_Y(y)) &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{ty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^\alpha \\ &= \lambda^\alpha \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{ty}}{(\lambda+y)^\alpha} = \infty \end{aligned}$$

Somit ist der rechte Tail nicht exponentiell beschränkt. D.h. bei einer $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung handelt es sich um eine subexponentielle Verteilung (vgl. Abschnitt 4.1).

b) Für $Y \sim \text{Weibull}(a, b)$ gilt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-(y/b)^a} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.11). Damit erhält man für alle $t > 0$ und $a < 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{ty} (1 - F_Y(y)) &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{ty} e^{-(y/b)^a} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{ty - y^a/b^a} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{y(t - y^{a-1}/b^a)} = \infty \end{aligned}$$

D.h. bei einer $\text{Weibull}(a, b)$ -Verteilung mit $a < 1$ handelt es sich ebenfalls um eine subexponentielle Verteilung (vgl. Abschnitt 4.1).

Aufgabe 2

Lösungen

2. Aufgabe

- a) Aus $N \sim \text{Bin}(n, p)$ folgt $\mathbb{E}[N] = np$ (vgl. Abschnitt 4.2) und damit

$$\mathbb{E}[\hat{X}] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[N] = p.$$

D.h. $\hat{X}$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für p .

- b) Aus $N \sim \text{Bin}(n, p)$ folgt $\text{Var}(N) = np(1-p)$ (vgl. Abschnitt 4.2). Aus

$$\mathbb{E}[N] = np \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[N^2] = \text{Var}(N) + \mathbb{E}[N]^2 = np(1-p) + n^2 p^2$$

folgt ferner:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{Y}] &= \mathbb{E}[n\hat{X}(1-\hat{X})] = n\mathbb{E}\left[\frac{N(n-N)}{n^2}\right] \\ &= \frac{1}{n} \left(n\mathbb{E}[N] - \mathbb{E}[N^2] \right) \\ &= np - p(1-p) - np^2 \\ &= np(1-p) - p(1-p) \\ &\neq np(1-p) = \text{Var}(N) \end{aligned}$$

D.h. $\hat{Y}$ ist ein nicht erwartungstreuer (d.h. verzerrter) Schätzer für $\text{Var}(N)$.

Aufgabe 3

Lösungen

3. Aufgabe

- a) Die Zufallsvariablen Y_i für $i = 1, \dots, n$ besitzen die momenterzeugende Funktion

$$M_{Y_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{für } t < \lambda$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Damit erhält man für $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ die momenterzeugende Funktion

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^n Y_i}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tY_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tY_i}] \\ &= \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(t) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \end{aligned}$$

für $t < \lambda$. Dies ist jedoch die momenterzeugende Funktion einer $\Gamma(n, \lambda)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.7). D.h. Y ist $\Gamma(n, \lambda)$ -verteilt.

b) Für $y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_{\lambda Y}(y) &= \mathbb{P}(\lambda Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq y/\lambda) = F_Y(y/\lambda) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} f_{\lambda Y}(y) &= F'_{\lambda Y}(y) \\ &= \frac{1}{\lambda} F'_Y(y/\lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda} f_Y(y/\lambda). \end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) und der Dichtefunktion einer $\Gamma(n, \lambda)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.7) für $y > 0$:

$$\begin{aligned} f_{\lambda Y}(y) &= \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} (y/\lambda)^{n-1} e^{-\lambda y/\lambda} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-y} \end{aligned}$$

Dies ist jedoch die Dichtefunktion der $\Gamma(n, 1)$ -Verteilung.

c) Im Folgenden seien $x(\alpha/2)$ und $x(1 - \alpha/2)$ das $\alpha/2$ - bzw. $(1 - \alpha/2)$ -Quantil einer $\Gamma(n, 1)$ -Verteilung. Mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a) und b) folgt dann:

$Y_1, \dots, Y_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ und stochastisch unabhängig

$$\begin{aligned} \implies Y &= \sum_{i=1}^n Y_i \sim \Gamma(n, \lambda) \\ \implies \lambda Y &\sim \Gamma(n, 1) \\ \implies \mathbb{P}(x(\alpha/2) < \lambda Y < x(1 - \alpha/2)) &= 1 - \alpha \\ \implies \mathbb{P}\left(\frac{x(\alpha/2)}{Y} < \lambda < \frac{x(1 - \alpha/2)}{Y}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

D.h. das $100(1 - \alpha)\%$ -Konfidenzintervall für den Parameter λ einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung ist gegeben durch

$$\left(\frac{x(\alpha/2)}{\sum_{i=1}^n Y_i}, \frac{x(1 - \alpha/2)}{\sum_{i=1}^n Y_i} \right).$$

Aufgabe 4

Lösungen

4. Aufgabe

Die Likelihood- und Log-Likelihoodfunktion einer $IG(\mu, \lambda)$ -Verteilung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\mu, \lambda; Y_1, \dots, Y_n) &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi Y_i^3}} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 Y_i} (Y_i - \mu)^2} \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{Y_i^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{n\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}\right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\ln(L(\mu, \lambda; Y_1, \dots, Y_n)) = \frac{n}{2} (\ln(\lambda) - \ln(2\pi)) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) + \frac{n\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}.$$

Durch partielles Ableiten der Log-Likelihoodfunktion nach dem Parameter μ und anschließendes Nullsetzen der partiellen Ableitung erhält man

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, \lambda; Y_1, \dots, Y_n))}{\partial \mu} = -\frac{n\lambda}{\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu^3} \sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Auflösen dieser Gleichung nach μ liefert für μ den ML-Schätzer

$$\hat{\mu}^{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Durch partielles Ableiten der Log-Likelihoodfunktion nach dem Parameter λ und anschließendes Nullsetzen der partiellen Ableitung erhält man

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, \lambda; Y_1, \dots, Y_n))}{\partial \lambda} = \frac{n}{2\lambda} + \frac{n}{\mu} - \frac{1}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i} \stackrel{!}{=} 0.$$

Einsetzen des ML-Schätzers (4) für μ liefert

$$\frac{n}{2\lambda} + \frac{n}{\hat{\mu}^{ML}} - \frac{n}{2\hat{\mu}^{ML}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i} \stackrel{!}{=} 0$$

und somit

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{Y_i} - \frac{1}{\hat{\mu}^{ML}} \right).$$

Auflösen dieser Gleichung nach λ liefert für λ den ML-Schätzer

$$\hat{\lambda}^{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{Y_i} - \frac{1}{\hat{\mu}^{ML}} \right)}.$$

Aufgabe 5

- a) Aus $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ folgt, dass Y die Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt (vgl. Abschnitt 4.7). Da es sich bei X um eine Potenztransformation von Y mit $c = -1$ handelt, ist die Dichtefunktion von X gegeben durch

$$f_X(x) = |c|x^{c-1}f_Y(x^c) \quad \text{für } x > 0$$

mit $c = -1$ (vgl. Abschnitt 4.14). D.h. es gilt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} \frac{f_Y(1/x)}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

- b) Für

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^u f_X(x) dx = \int_0^u \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} dx$$

erhält man mit der Substitution $z = \frac{1}{x}$, $dz = -\frac{1}{x^2} dx$, $x = 0 \rightarrow z = \infty$ und $x = u \rightarrow z = \frac{1}{u}$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= - \int_{\infty}^{\frac{1}{u}} \lambda e^{-\lambda z} dz \\ &= \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda z} dz \\ &= \left(-e^{-\lambda z} \right) \Big|_{\frac{1}{u}}^{\infty} \\ &= 0 - \left(-e^{-\frac{\lambda}{u}} \right) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{u}} \end{aligned}$$

c) Aus

$$F_X(u) = e^{-\frac{\lambda}{u}} = \frac{1}{2}$$

folgt durch eine kurze Umformung

$$u_{\text{median}} = \frac{\lambda}{\ln(2)}.$$

Ferner gilt

$$f'_X(x) = -\frac{2\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^3} + \frac{\lambda^2 e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} \frac{1}{x^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

und eine kurze Umformung liefert weiter

$$-2x\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}} + \lambda^2 e^{-\frac{\lambda}{x}} = \lambda e^{-\frac{\lambda}{x}} (\lambda - 2x) = 0.$$

D.h. der Modalwert ist gegeben durch

$$x_{\text{mode}} = \frac{\lambda}{2}.$$

Aufgabe 6

Die Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Bei der Funktion

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto y = a \exp\left(\frac{\lambda x}{b}\right) - a$$

mit $a, b, \lambda > 0$ handelt es sich um eine stetig differenzierbare sowie streng monoton wachsende Funktion mit der ersten Ableitung

$$g'(x) = \frac{\lambda a}{b} \exp\left(\frac{\lambda x}{b}\right) > 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+.$$

Durch Auflösen der Gleichung

$$y = a \exp\left(\frac{\lambda x}{b}\right) - a$$

nach der Variablen x resultiert

$$x = \frac{b}{\lambda} \ln\left(\frac{y+a}{a}\right).$$

D.h. die Funktion g besitzt die Inverse

$$g^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, y \mapsto x = \frac{b}{\lambda} \ln\left(\frac{y+a}{a}\right).$$

Zusammen mit dem Transformationssatz für Dichtefunktionen (vgl. Abschnitt 4.14) erhält man daher, dass die Zufallsvariable $Y = g(X)$ für $y > 0$ die Dichtefunktion

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} \\ &= \frac{\lambda \exp\left(-\lambda \frac{b}{\lambda} \ln\left(\frac{y+a}{a}\right)\right)}{\left|\frac{\lambda a}{b} \exp\left(\frac{\lambda \frac{b}{\lambda} \ln\left(\frac{y+a}{a}\right)}{b}\right)\right|} \\ &= \frac{\lambda \left(\frac{a}{y+a}\right)^b}{\left|\lambda \frac{y+a}{b}\right|} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{y+a}\right)^b}{\frac{y+a}{b}} = \frac{ba^b}{(y+a)^{b+1}} \end{aligned}$$

besitzt. D.h. es gilt $Y \sim \text{Par}(b, a)$ (vgl. Abschnitt 4.12).

Aufgabe 7

Lösungen

7. Aufgabe

- a) Die Zufallsvariable $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ mit $\alpha > 1$ und $\beta > 0$ besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Die Zufallsvariable $Y = Z^{-1}$ besitzt somit eine inverse Gamma-Verteilung, deren Dichtefunktion für $y > 0$ durch

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= y^{-2} f_Z(y^{-1}) \\ &= y^{-2} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha-1)} e^{-\beta y^{-1}} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} \end{aligned} \quad (5)$$

gegeben ist (vgl. Abschnitt 4.14). Damit erhält man für den Erwartungswert von Y die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty y f_Y(y) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-\alpha} e^{-\frac{\beta}{y}} dy. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$y = \frac{1}{x}, \quad dy = -\frac{1}{x^2} dx, \quad y = 0 \longrightarrow x = \infty \quad \text{und} \quad y = \infty \longrightarrow x = 0$$

folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= - \int_{\infty}^0 \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\beta x} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-2} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta}{\alpha-1} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} x^{\alpha-2} e^{-\beta x} dx}_{=1} \\ &= \frac{\beta}{\alpha-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei ist das Integral in der vorletzten Zeile gleich 1, da es sich beim Integranden um die Dichte der $\Gamma(\alpha-1, \beta)$ -Verteilung handelt.

b) Es gilt

$$f_{(X,Y=y)}(x,y) = \begin{cases} f_{X|Y=y}(x)f_Y(y) & \text{für } x,y > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusammen mit (5) liefert dies für die unbedingte Dichte von X für $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{(X,Y=y)}(x,y) dy \\ &= \int_0^{\infty} f_{X|Y=y}(x)f_Y(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+2)} e^{-\frac{\beta+x}{y}} dy \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} y \frac{(\beta+x)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} y^{-(\alpha+3)} e^{-\frac{\beta+x}{y}} dy}_{(*)} \times \beta^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\beta+x)^{\alpha+2}} \end{aligned} \tag{7}$$

Ein Vergleich von (*) mit (5) zeigt, dass es sich bei (*) um die Dichte einer Inversen Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha + 2$ und $\beta + x$ handelt. D.h. bei dem Integral

$$\int_0^\infty y \frac{(\beta + x)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 2)} y^{-(\alpha+3)} e^{-\frac{\beta+x}{y}} dy$$

handelt es sich um den Erwartungswert einer Zufallsvariablen, die eine mit den Parametern $\alpha + 2$ und $\beta + x$ Inverse Gamma-Verteilung besitzt. Aus (7) und (6) folgt daher für $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\beta + x}{\alpha + 1} \times \beta^\alpha \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\beta + x)^{\alpha+2}} \\ &= \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Dies ist jedoch die Dichte der $\text{Par}(\alpha, \beta)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.12).

Lösungen zu Kapitel 5

Aufgabe 1

Lösungen

1. Aufgabe

Mit der Faltungsformel (vgl. Abschnitt 5.2) erhält man für die bedingte zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung

$$\begin{aligned} F_S(s|S > 0) &= \mathbb{P}(S \leq s|S > 0) = \frac{\mathbb{P}(0 < S \leq s)}{\mathbb{P}(S > 0)} \\ &= \frac{F_S(s) - F_S(0)}{1 - F_S(0)} \\ &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}(N = 0)} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} F_Y^{*n}(s) \cdot \mathbb{P}(N = n) - \mathbb{P}(N = 0) \right) \end{aligned}$$

für $s > 0$. Durch Ableiten erhält man daraus für die bedingte Dichte

$$\begin{aligned} f_S(s|S > 0) &= \frac{dF_S(s|S > 0)}{ds} \\ &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}(N = 0)} \sum_{n \in \mathcal{N}} f_Y^{*n}(s) \cdot \mathbb{P}(N = n) \end{aligned}$$

für $s > 0$.

Aufgabe 2

Lösungen

2. Aufgabe

Aus $N \sim \text{Geo}(p)$ und $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ folgt

$$p_k = \mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

(vgl. Abschnitt 4.4) bzw.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Ferner besitzt die Summe $\sum_{i=1}^n Y_i$ von n stochastisch unabhängigen $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen Y_i eine $\Gamma(n, \lambda)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.7). D.h. für die Dichte f_Y^{*n} von $\sum_{i=1}^n Y_i$ gilt

$$f_Y^{*n}(s) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} & \text{für } s > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8)$$

(vgl. Abschnitt 4.7).

Zusammen mit $f_Y^{*0}(s) = 0$ für $s > 0$, (8) und dem Ergebnis aus der letzten Übungsaufgabe liefert dies für $s > 0$:

$$\begin{aligned} f_S(s|S > 0) &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}(N = 0)} \sum_{n=0}^{\infty} f_Y^{*n}(s) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\ &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}(N = 0)} \sum_{n=1}^{\infty} f_Y^{*n}(s) \cdot \mathbb{P}(N = n) \\ &= \frac{1}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} p (1-p)^n \\ &= e^{-\lambda s} \lambda p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda s (1-p))^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-\lambda s} \lambda p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s (1-p))^n}{n!} = e^{-\lambda s} \lambda p e^{\lambda s (1-p)} = \lambda p e^{-\lambda p s} \end{aligned}$$

Dabei wurde in der vorletzten Gleichung $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für $x \in \mathbb{R}$ verwendet.

D.h. S ist, bedingt gegeben $S > 0$, $\text{Exp}(\lambda p)$ -verteilt und die Verteilungsfunktion von S , bedingt gegeben $S > 0$, lautet somit

$$F_S(s|S > 0) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda p s} & \text{für } s > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die unbedingte Verteilung von S , d.h. die zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung $F_S(s)$, ist daher für $s \geq 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \mathbb{P}(S = 0) \cdot F_S(s|S = 0) + \mathbb{P}(S > 0) \cdot F_S(s|S > 0) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) \cdot \mathbb{P}(S \leq 0|S = 0) + \mathbb{P}(N > 0) \cdot F_S(s|S > 0) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) \left(1 - e^{-\lambda p s} \right). \end{aligned}$$

D.h es gilt insgesamt

$$F_S(s) = \begin{cases} p + (1-p) \left(1 - e^{-\lambda p s} \right) & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung $F_S(s)$ besitzt folglich an der Stelle $S = 0$ die Punktmasse $\mathbb{P}(N = 0) = p$.

Aufgabe 3

Lösungen

3. Aufgabe

Im Folgenden sei:

A := Schadenaufwand übersteigt 500 CHF, aber nicht 2.000 CHF

B := Schadenaufwand übersteigt 2.000 CHF

N_A := Jährliche Schadenanzahl für A

N_B := Jährliche Schadenanzahl für B

μ_A := 1.000 CHF durchschnittlicher Schadenaufwand für A

μ_B := 5.000 CHF durchschnittlicher Schadenaufwand für B

d_a := 500 CHF Selbstbehalt bei Deckungsart a)

d_b := 2.000 CHF Selbstbehalt bei Deckungsart b)

R_a := $\mathbb{E}[S_a]$:= Risikoprämie bei Deckungsart a)

R_b := $\mathbb{E}[S_b]$:= Risikoprämie bei Deckungsart b)

P_a := Prämie bei Deckungsart a)

P_b := Prämie bei Deckungsart b)

Ferner gilt

$$N_A \sim \Pi(8) \quad \text{und} \quad N_B \sim \Pi(2)$$

und somit insbesondere $\mathbb{E}[N_A] = 8$ bzw. $\mathbb{E}[N_B] = 2$ (vgl. Abschnitt 4.3).

Mit der ersten Formel von Wald (vgl. Abschnitt 5.3) erhält man für die reinen Risikoprämien die Werte

$$\begin{aligned} R_a &= \mathbb{E}[S_a] = \mathbb{E}[N_A](\mu_A - d_a) + \mathbb{E}[N_B](\mu_B - d_a) \\ &= 8 \cdot (1.000 - 500) + 2 \cdot (5.000 - 500) = 13.000 \text{ CHF} \end{aligned}$$

und mit $\mathbb{P}(N_B = n) = \frac{2^n e^{-2}}{n!}$ (vgl. Abschnitt 4.3) weiter

$$\begin{aligned} R_b &= \mathbb{E}[S_b] = \mathbb{E}[N_B]\mu_B - \mathbb{P}(N_B = 1) \cdot d_b - \mathbb{P}(N_B = 2) \cdot 2 \cdot d_b - \mathbb{P}(N_B \geq 3) \cdot 2 \cdot d_b \\ &= \mathbb{E}[N_B]\mu_B - \mathbb{P}(N_B = 1) \cdot d_b - \mathbb{P}(N_B \geq 2) \cdot 2 \cdot d_b \\ &= 2 \cdot 5.000 - 2e^{-2} \cdot 2.000 - \left(1 - e^{-2} - 2e^{-2}\right) \cdot 2 \cdot 2.000 = 7.082,68 \text{ CHF.} \end{aligned}$$

Mit einem Loading von 30% führt dies zu den Prämien

$$P_a = 1,3 \cdot R_a = 16.900 \text{ CHF}$$

und

$$P_b = 1,3 \cdot R_b = 9.207,49 \text{ CHF.}$$

Aufgabe 4

- a) Es sei $N_i \sim \Pi(\lambda_i)$ die Schadenanzahl und Y_i die Einzelschadenhöhe in der i -ten Fahrzeugart. Dann gilt:

$$S = \sum_{i=1}^3 S_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{N_i} Y_i$$

Mit der ersten Formel von Wald (vgl. Abschnitt 5.3) und $\mathbb{E}[N_i] = \lambda_i$ (vgl. Abschnitt 4.3) folgt somit

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}[S_i] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{N_i} Y_i \right] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbb{E}[Y_i]$$

und mit der zweiten Formel von Wald (vgl. Abschnitt 5.3) und $\text{Var}(N_i) = \lambda_i$ (vgl. Abschnitt 4.3) erhält man aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \sum_{i=1}^3 \text{Var}(S_i) = \sum_{i=1}^3 \text{Var} \left(\sum_{j=1}^{N_i} Y_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (\mathbb{E}[Y_i]^2 \text{Var}(N_i) + \text{Var}(Y_i) \mathbb{E}[N_i]) \\ &= \sum_{i=1}^3 (\mathbb{E}[Y_i]^2 \lambda_i + \text{Var}(Y_i) \lambda_i) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbb{E}[Y_i^2]. \end{aligned}$$

Man erhält daher:

i	Fahrzeugart	Anzahl	Freq. in %	λ_i	$\mathbb{E}[Y_i]$	$\text{Vko}(Y_i)$	$\text{Var}(Y_i)$	$\mathbb{E}[Y_i^2]$	$\mathbb{E}[S_i]$	$\text{Var}(S_i)$	$\sigma(S_i)$
1	Personenwagen	40	250	10,0	2000	2,5	25.000.000	29.000.000	20.000	290.000.000	17.029
2	Lieferwagen	30	230	6,9	1700	2,0	11.560.000	14.450.000	11.730	99.705.000	9.985
3	Lastwagen	10	190	1,9	4000	3,0	144.000.000	160.000.000	7.600	304.000.000	17.346
	Gesamt	80	235	18,8	2.092				39.330	693.705.000	26.338

Es gilt damit insbesondere

$$\mathbb{E}[S] = 39.330 \quad \text{und} \quad \sigma(S) = 26.338.$$

- b) Die reine Risikoprämie beträgt $\mathbb{E}[S] = 39.330$, und die Prämie gemäß des Varianzprinzips mit Loading-Faktor $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}$ ist damit

$$\pi(S) = \mathbb{E}[S] + \alpha \text{Var}(S) = 39.330 + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 693.705.000 = 41.411 \text{ CHF.}$$

Das Loading auf der reinen Risikoprämie beträgt somit

$$41.411 - 39.330 = 2.081 \text{ CHF} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2.081}{39.330} \approx 5,29\%.$$

Aufgabe 5

Lösungen

5. Aufgabe

Aufgrund der Aggregationseigenschaft der zusammengesetzten Poisson-Verteilung ist der aggregierte Gesamtschaden S ebenfalls zusammengesetzt Poisson-verteilt, und zwar mit dem Poisson-Parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12$ und der Mischverteilung

$$F_Y(s) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_1(s) + \frac{\lambda_2}{\lambda} F_2(s) + \frac{\lambda_3}{\lambda} F_3(s) = \frac{1}{3} F_1(s) + \frac{1}{6} F_2(s) + \frac{1}{2} F_3(s)$$

als Einzelschadenhöhenverteilung (vgl. Abschnitt 5.4). Diese besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_Y(s) = \frac{\lambda_1}{\lambda} f_1(s) + \frac{\lambda_2}{\lambda} f_2(s) + \frac{\lambda_3}{\lambda} f_3(s) = \frac{1}{3} f_1(s) + \frac{1}{6} f_2(s) + \frac{1}{2} f_3(s).$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{P}(Y = 200) = f_Y(200) = \frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{6} \cdot 0,0 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 = \frac{16}{60}$. Man erhält insgesamt:

s	$\mathbb{P}(U = s)$	$\mathbb{P}(V = s)$	$\mathbb{P}(W = s)$	$\mathbb{P}(Y = s)$
200	0,5	0,0	0,2	16/60
300	0,3	0,3	0,3	18/60
400	0,2	0,4	0,3	17/60
500	0,0	0,3	0,1	6/60
600	0,0	0,0	0,1	3/60

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \leq 400) &= \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(Y_1 \leq 400) \cdot \mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq 400) \cdot \mathbb{P}(N = 2) \\ &= \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(Y_1 \leq 400) \cdot \mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(Y_1 \leq 200)^2 \cdot \mathbb{P}(N = 2)\end{aligned}$$

Mit $\mathbb{P}(N = n) = \frac{12^n e^{-12}}{n!}$ (vgl. Abschnitt 4.3) folgt daraus weiter

$$P(S \leq 400) = e^{-12} + \frac{51}{60} \cdot 12e^{-12} + \left(\frac{16}{60}\right)^2 \cdot \frac{12^2 e^{-12}}{2} = 0,0001002735.$$

Ferner gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 336,67 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y^2] = 126000.$$

Zusammen mit der ersten und zweiten Formel von Wald (vgl. Abschnitt 5.3) liefert dies für die ersten beiden Momente von S die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \lambda \cdot \mathbb{E}[Y] = 12 \cdot 336,67 = 4.040 \\ \text{Var}(S) &= \lambda \cdot \mathbb{E}[Y^2] = 12 \cdot 126000 = 1.512.000\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Es wird folgende Notation verwendet:

Schadenkategorie	folgenlos	nicht folgenlos		Gesamt
		≤ 50.000	> 50.000	
Schadenanzahl	N_0	N_1	N_2	N
Einzelschadenhöhen				
- Erwartungswert	0	μ_{Y_1}	μ_{Y_2}	μ_Y
- Varianz	0	$\sigma_{Y_1}^2$	$\sigma_{Y_2}^2$	σ_Y^2
Schadenaufwand				
- Erwartungswert	0	μ_{S_1}	μ_{S_2}	μ_S
- Varianz	0	$\sigma_{S_1}^2$	$\sigma_{S_2}^2$	σ_S^2

Die Schadenanzahl in der Region ist Poisson-verteilt und zwar mit dem Parameter $\lambda = \mathbb{E}[N] = 90.000 \cdot 0,08 = 7.200$. Aufgrund der Zerlegungseigenschaft der Poisson-Verteilung (vgl. Abschnitt 4.3) sind damit auch die Schadenanzahl N_0, N_1 und N_2 in den verschiedenen Schadenkategorien stochastisch unabhängig und ebenfalls Poisson-verteilt und zwar mit den folgenden Parametern:

$$\lambda_0 = \mathbb{E}[N_0] = \lambda \cdot 0,25 = 1.800$$

$$\lambda_1 = \mathbb{E}[N_1] = \lambda \cdot 0,75 \cdot 0,99 = 5.346$$

$$\lambda_2 = \mathbb{E}[N_2] = \lambda \cdot 0,75 \cdot 0,01 = 54$$

Ferner gilt:

$$\mu_{Y_1} = 3.000$$

$$\mu_{Y_2} = 300.000$$

$$\sigma_{Y_1}^2 = 3^2 \cdot 3.000^2$$

$$\sigma_{Y_2}^2 = (1,5)^2 \cdot 300.000^2$$

Damit erhält man:

$$\mu_{S_1} = \lambda_1 \cdot \mu_{Y_1} = 16.038.000 \text{ Euro}$$

$$\mu_{S_2} = \lambda_2 \cdot \mu_{Y_2} = 16.200.000 \text{ Euro}$$

$$\mu_S = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} = 32.238.000 \text{ Euro}$$

Die Poisson-verteilten Schadenanzahlen N_1, N_2 und die Einzelschadenhöhen sind stochastisch unabhängig. Daraus folgt, dass auch die Schadenaufwendungen S_1 und S_2 stochastisch unabhängig sind.

Es gilt daher

$$\sigma_{S_1}^2 = \lambda_1 \cdot (\mu_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) = 481.140 \text{ Mio. Euro}$$

$$\sigma_{S_2}^2 = \lambda_2 \cdot (\mu_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2) = 15.795.000 \text{ Mio. Euro}$$

$$\sigma_S^2 = \sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2 = 16.276.140 \text{ Mio. Euro}$$

und somit

$$\text{Vko}(S_1) = \frac{\sigma_{S_1}}{\mu_{S_1}} = 4,32\%$$

$$\text{Vko}(S_2) = \frac{\sigma_{S_2}}{\mu_{S_2}} = 24,53\%$$

$$\text{Vko}(S) = \frac{\sigma_S}{\mu_S} = 12,51\%$$

Aufgabe 7

Wegen $N \sim \Pi(2)$ gilt $\mathbb{P}(N = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Abschnitt 4.3). Für die Parameter im Panjer-Algorithmus gilt ferner $f_Y(0) = 0$, $u = 1$, $a = 0$ und $b = \lambda = 2$. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S erhält man somit

$$\begin{aligned} f_S(l) &= \frac{1}{1 - af_Y(0)} \sum_{k=1}^l \left(a + \frac{bk}{l} \right) f_Y(k) f_S(l-k) \\ &= \frac{2}{l} \sum_{k=1}^l k f_Y(k) f_S(l-k) \end{aligned}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ und

$$f_S(0) = p_0 = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-2}$$

(vgl. Abschnitt 5.5). D.h. es gilt

$$f_S(0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-2} = 0,1353$$

$$f_S(1) = 2f_Y(1)f_S(0) = 0,1624$$

$$f_S(2) = f_Y(1)f_S(1) + 2f_Y(2)f_S(0) = 0,1624$$

$$f_S(3) = \frac{2}{3} \left(f_Y(1)f_S(2) + 2f_Y(2)f_S(1) + 3f_Y(3)f_S(0) \right) = 0,1429.$$

Aufgabe 8

Aus der stochastischen Unabhängigkeit von S_1 und S_2 folgt

$$\mathbb{P}(S_1 + S_2 = l) = \sum_{k=0}^l \mathbb{P}(S_1 = k) \cdot \mathbb{P}(S_2 = l - k) \quad \text{für } l \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Die Wahrscheinlichkeiten

$$f_{S_1}(l) := \mathbb{P}(S_1 = l) \quad \text{und} \quad f_{S_2}(l) := \mathbb{P}(S_2 = l) \quad \text{für } l \in \mathbb{N}_0$$

können mit Hilfe des Panjer-Algorithmus berechnet werden.

Zu $f_{S_1}(l)$: Wegen $N \sim \Pi(2)$ gilt $\mathbb{P}(N = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Abschnitt 4.3). Für die Parameter im Panjer-Algorithmus gilt $f_Y(0) = 0$, $u = 1$, $a = 0$ und $b = \lambda = 2$. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_1 erhält man somit

$$\begin{aligned} f_{S_1}(l) &= \frac{1}{1 - af_Y(0)} \sum_{k=1}^l \left(a + \frac{bk}{l} \right) f_Y(k) f_{S_1}(l - k) \\ &= \frac{2}{l} \sum_{k=1}^l k f_Y(k) f_{S_1}(l - k) \end{aligned}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ und $f_{S_1}(0) = p_0 = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-2}$ (vgl. Abschnitt 5.5).

Zu $f_{S_2}(l)$: Wegen $N \sim \text{NBin}(2, 1/2)$ gilt $\mathbb{P}(N = k) = \binom{k+1}{k} 0,5^2 0,5^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Abschnitt 4.4). Für die Parameter im Panjer-Algorithmus gilt $f_Y(0) = 0$, $u = 1$, $a = 1 - p = \frac{1}{2}$ und $b = (1 - p)(r - 1) = \frac{1}{2}$. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_2 erhält man somit

$$\begin{aligned} f_{S_2}(l) &= \frac{1}{1 - af_Y(0)} \sum_{k=1}^l \left(a + \frac{bk}{l} \right) f_Y(k) f_{S_2}(l - k) \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k}{l} \right) f_Y(k) f_{S_2}(l - k) \end{aligned}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$ und $f_{S_2}(0) = p_0 = \mathbb{P}(N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (vgl. Abschnitt 5.5).

Zusammen mit (9) liefert dies für S_1, S_2 und S die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

l	$\mathbb{P}(S_1 = l)$	$\mathbb{P}(S_2 = l)$	$\mathbb{P}(S = l)$
0	0,1353	0,2500	0,0338
1	0,1083	0,1000	0,0406
2	0,1380	0,1175	0,0612
3	0,1550	0,1230	0,0819

Lösungen zu Kapitel 6

Aufgabe 1

Bei einer Summenexzedenten-Rückversicherung mit dem globalen Selbstbehalt M sind der Selbstbehaltsanteil eines Einzelrisikos mit Versicherungssumme v_i und die zugehörige Quote des Rückversicherers gegeben durch

$$c_i = \min \left\{ \frac{M}{v_i}, 1 \right\} \quad \text{bzw.} \quad 1 - c_i = 1 - \min \left\{ \frac{M}{v_i}, 1 \right\}$$

(vgl. Abschnitt 6.2). Der Selbstbehaltsanteil des betrachteten Einzelrisikos und die zugehörige Quote des Rückversicherers beträgt somit

$$c_i = \min \left\{ \frac{100.000}{500.000}, 1 \right\} = 0,2 \quad \text{bzw.} \quad 1 - c_i = 0,8.$$

Aufgabe 2

a) Vor Rückversicherung ergeben sich die folgenden Werte:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = 5 + 20 = 25$$

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) = 10^2 + 22^2 = 584$$

$$\text{Vko}(S) = \frac{\sqrt{\text{Var}(S)}}{\mathbb{E}[S]} = \frac{\sqrt{584}}{25} \approx 0,9666$$

b) Die beiden Selbstbehaltsanteile betragen (vgl. Abschnitt 6.2)

$$c_1 = \min \left\{ \frac{M}{50}, 1 \right\} = \begin{cases} 0,02M & \text{für } M \leq 50 \\ 1 & \text{für } M > 50 \end{cases}$$

und

$$c_2 = \min \left\{ \frac{M}{100}, 1 \right\} = \begin{cases} 0,01M & \text{für } M \leq 100 \\ 1 & \text{für } M > 100 \end{cases}.$$

Damit erhält man für den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten des Selbstbehaltsanteils $\underline{S}$ die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{S}] &= \sum_{i=1}^2 c_i \mathbb{E}[Y_i] \\ &= \begin{cases} 0,3M & \text{für } 0 \leq M \leq 50 \\ 5 + 0,2M & \text{für } 50 < M \leq 100 \\ 25 & \text{für } M > 100 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{S}) &= \sum_{i=1}^2 c_i^2 \text{Var}(Y_i) \\ &= \begin{cases} 0,0884M^2 & \text{für } 0 \leq M \leq 50 \\ 100 + 0,0484M^2 & \text{für } 50 < M \leq 100 \\ 584 & \text{für } M > 100 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vko}(\underline{S}) &= \frac{\sqrt{\text{Var}(\underline{S})}}{\mathbb{E}[\underline{S}]} \\ &\approx \begin{cases} 0,9911 & \text{für } 0 \leq M \leq 50 \\ \frac{\sqrt{100+0,0484M^2}}{5+0,2M} & \text{für } 50 < M \leq 100 \\ 0,9666 & \text{für } M > 100 \end{cases} \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten des transferierten Risikos $\underline{\underline{S}}$ resultieren die folgenden Werte:

$$\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] = \mathbb{E}[S] - \mathbb{E}[\underline{S}] = \begin{cases} 25 - 0,3M & \text{für } 0 \leq M \leq 50 \\ 20 - 0,2M & \text{für } 50 < M \leq 100 \\ 0 & \text{für } M > 100 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{\underline{S}}) &= \sum_{i=1}^2 (1 - c_i)^2 \text{Var}(Y_i) \\ &= \begin{cases} 584 - 13,68M + 0,0884M^2 & \text{für } 0 \leq M \leq 50 \\ 484 - 9,68M + 0,0484M^2 & \text{für } 50 < M \leq 100 \\ 0 & \text{für } M > 100 \end{cases} \end{aligned}$$

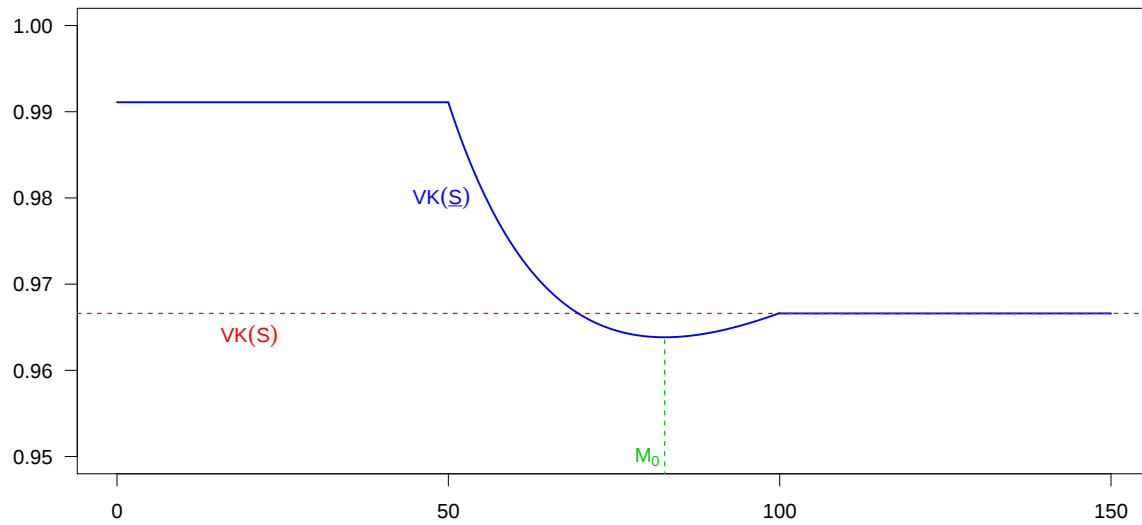
$$\begin{aligned} \text{Vko}(\underline{\underline{S}}) &= \frac{\sqrt{\text{Var}(\underline{\underline{S}})}}{\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}]} \\ &\approx \begin{cases} \frac{\sqrt{584 - 13,68M + 0,0884M^2}}{25 - 0,3M} & \text{für } 0 \leq M \leq 50 \\ \frac{\sqrt{484 - 9,68M + 0,0484M^2}}{20 - 0,2M} & \text{für } 50 < M \leq 100 \end{cases} \end{aligned}$$

- c) Der Variationskoeffizient $\text{Vko}(\underline{\underline{S}})$ des transferierten Risikos $\underline{\underline{S}}$ wächst als Funktion des globalen Selbstbehalts M auf dem Intervall $[0, 50]$ von $\text{Vko}(S) = \frac{\sqrt{584}}{25}$ zu 1,1 streng monoton an. D.h. für alle globalen Selbstbehalte $M > 0$ ergeben sich beim transferierten Risiko $\underline{\underline{S}}$ höhere relative Gefährlichkeiten (gemessen am Variationskoeffizienten) als beim Ausgangsrisiko S .

Der Variationskoeffizient $\text{Vko}(\underline{S})$ des Selbstbehalts $\underline{S}$ besitzt an der Stelle

$$M_0 = \frac{200}{2,4} \approx 82,64$$

ein globales Minimum (siehe folgende Abbildung). D.h. der Variationskoeffizient von $\underline{S}$ verläuft als Funktion des globalen Selbstbehalts M im Intervall $[50, 100]$ nicht monoton. Dabei ist zu beachten, dass der Selbstbehalt $\underline{S}$ trotz des Abschlusses der Summenexzedenten-Rückversicherung für sehr viele globale Selbstbehalte M eine größere relative Gefährlichkeit aufweist als S . Nur in einer kleinen Umgebung der globalen Minimalstelle M_0 werden Werte echt unterhalb von $\text{Vko}(S) = \frac{\sqrt{584}}{25} \approx 0,9666$ erreicht.



Aufgabe 3

a) Bei der Verteilung von

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^N 1_{(d,\infty)}(Y_i)$$

handelt es sich um eine zusammengesetzte Verteilung (vgl. Abschnitt 5.1), wobei die Summanden $1_{(d,\infty)}(Y_i)$ Bernoulli-verteilt sind mit dem Parameter

$$\alpha = \mathbb{P}(Y_i > d) = \mathbb{P}\left(1_{(d,\infty)}(Y_i) = 1\right)$$

und der momenterzeugenden Funktion

$$M_{1_{(d,\infty)}(Y_i)}(t) = \mathbb{E}[e^{1_{(d,\infty)}(Y_i)t}] = (1 - \alpha)e^{0 \cdot t} + \alpha e^{1 \cdot t} = (1 - \alpha) + \alpha e^t.$$

Die Schadenanzahl $N \sim \text{Bin}(n, p)$ besitzt die momenterzeugende Funktion

$$M_N(t) = (pe^t + (1 - p))^n \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

(vgl. Abschnitt 4.2). Für die momenterzeugende Funktion von $\underline{N}$ erhält man daher

$$\begin{aligned} M_{\underline{N}}(t) &= M_N\left(\ln(M_{1_{(d,\infty)}(Y_i)}(t))\right) = \left(p((1 - \alpha) + \alpha e^t) + (1 - p)\right)^n \\ &= \left(p\alpha e^t + (1 - p\alpha)\right)^n \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 5.3).

Dies ist jedoch die momenterzeugende Funktion einer $\text{Bin}(n, p\alpha)$ -Verteilung. D.h. es gilt $\underline{N} \sim \text{Bin}(n, p\alpha)$.

b) Die Schadenanzahl $N \sim \text{NBin}(r, p)$ besitzt die momenterzeugende Funktion

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1 - (1 - p)e^t}\right)^r \quad \text{für } t < -\ln(1 - p)$$

(vgl. Abschnitt 4.4). Für die momenterzeugende Funktion von $\underline{N}$ erhält man

$$\begin{aligned} M_{\underline{N}}(t) &= M_N\left(\ln(M_{1_{(d,\infty)}(Y_i)}(t))\right) = \left(\frac{p}{1 - (1 - p)((1 - \alpha) + \alpha e^t)}\right)^r \\ &= \left(\frac{\frac{p}{p + (1 - p)\alpha}}{\frac{1 - (1 - p) + (1 - p)\alpha - (1 - p)\alpha e^t}{p + (1 - p)\alpha}}\right)^r \\ &= \left(\frac{\frac{p}{p + (1 - p)\alpha}}{\frac{p + (1 - p)\alpha - (p + (1 - p)\alpha)e^t + pe^t}{p + (1 - p)\alpha}}\right)^r \\ &= \left(\frac{\frac{p}{p + (1 - p)\alpha}}{1 - \left(1 - \frac{p}{p + (1 - p)\alpha}\right)e^t}\right)^r. \end{aligned}$$

Dies ist jedoch die momenterzeugende Funktion einer $\text{NBin}\left(r, \frac{p}{p+(1-p)\alpha}\right)$ -Verteilung. D.h. es gilt $\underline{\underline{N}} \sim \text{NBin}\left(r, \frac{p}{p+(1-p)\alpha}\right)$.

Aufgabe 4

- a) Gesucht ist die Verteilung des Zweitrisikos $\underline{Y} = \max\{Y - d, 0\}$, bedingt gegeben $\underline{Y} > 0$. Wegen

$$\underline{Y}|\underline{Y} > 0 = Y - d|Y > d$$

gilt für diese bedingte Verteilung für $y > 0$:

$$\begin{aligned} F_{\underline{Y}|\underline{Y} > 0}(y) &= \mathbb{P}(\underline{Y} \leq y|\underline{Y} > 0) = \mathbb{P}(Y - d \leq y|Y > d) \\ &= \frac{\mathbb{P}(d < Y \leq y + d)}{\mathbb{P}(Y > d)} \\ &= \frac{F_Y(d + y) - F_Y(d)}{1 - F_Y(d)} \end{aligned} \quad (10)$$

Wegen $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ für $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $y > 0$ (vgl. Abschnitt 4.7) folgt daraus weiter

$$\begin{aligned} F_{\underline{Y}|\underline{Y} > 0}(y) &= \frac{1 - e^{-\lambda(d+y)} - (1 - e^{-\lambda d})}{1 - (1 - e^{-\lambda d})} \\ &= \frac{e^{-\lambda d} - e^{-\lambda(d+y)}}{e^{-\lambda d}} = 1 - e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

D.h. es gilt $\underline{Y}|\underline{Y} > 0 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

- b) Wegen $F_Y(y) = 1 - e^{-(y/b)^a}$ für $Y \sim \text{Weibull}(a, b)$ und $y > 0$ (vgl. Abschnitt 4.11) folgt analog zu Aufgabenteil a)

$$\begin{aligned} F_{\underline{Y}|\underline{Y} > 0}(y) &= \frac{F_Y(d + y) - F_Y(d)}{1 - F_Y(d)} \\ &= \frac{1 - e^{-((d+y)/b)^a} - (1 - e^{-(d/b)^a})}{1 - (1 - e^{-(d/b)^a})} \\ &= \frac{e^{-(d/b)^a} - e^{-((d+y)/b)^a}}{e^{-(d/b)^a}} \\ &= 1 - e^{-((d+y)^a - d^a)/b^a}. \end{aligned}$$

D.h. bei der Verteilung von $\underline{Y}|\underline{Y} > 0$ handelt es sich um eine verallgemeinerte Weibull-Verteilung. Daraus resultiert für $d = 0$ die herkömmliche Weibull-Verteilung und für $a = 1$ die $\text{Exp}(1/b)$ -Verteilung.

- c) Wegen $F_Y(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^\alpha$ für $Y \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ und $y > 0$ (vgl. Abschnitt 4.12) folgt analog zu den Aufgabenteilen a) und b)

$$\begin{aligned} F_{\underline{\underline{Y}}|\underline{\underline{Y}}>0}(y) &= \frac{F_Y(d+y) - F_Y(d)}{1 - F_Y(d)} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+(d+y)}\right)^\alpha - \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha\right)}{1 - \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha - \left(\frac{\lambda}{\lambda+(d+y)}\right)^\alpha}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha} \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+d+y}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

D.h. es gilt $\underline{\underline{Y}}|\underline{\underline{Y}}>0 \sim \text{Par}(\alpha, \lambda+d)$.

Aufgabe 5

- a) Die Einzelschadenhöhen $\underline{Y}_i$ und $\underline{\underline{Y}}_i$ des Erst- bzw. Zweitriskos sind gegeben durch

$$\underline{Y}_i = \min\{Y_i, d\} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{Y}}_i = \max\{Y_i - d, 0\}$$

(vgl. Abschnitt 6.5). Folglich stimmt die Schadenanzahl des Erstriskos $\underline{N}$ mit der Original-Schadenanzahl N ohne Risikoteilung überein. D.h. es gilt ebenfalls

$$\underline{N} \sim \Pi(\lambda) \quad \text{und damit} \quad \mathbb{E}[\underline{N}] = \lambda.$$

Für die Schadenanzahl des Zweitriskos gilt dagegen

$$\underline{\underline{N}} = \sum_{i=1}^N 1_{(d, \infty)}(Y_i) \sim \Pi(\alpha\lambda) \quad \text{und damit} \quad \mathbb{E}[\underline{\underline{N}}] = \alpha\lambda$$

mit

$$\alpha = \mathbb{P}(Y > d) = 1 - F_Y(d) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)$$

(vgl. Abschnitt 6.4). Dabei wurde für die letzte Gleichung verwendet, dass $F_Y(y) = \Phi\left(\frac{\ln(y) - \mu}{\sigma}\right)$ für $Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ und $y > 0$ gilt (vgl. Abschnitt 4.8).

- b) Mit dem Hinweis

$$e_Y(d) = \mathbb{E}[Y] \frac{1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)} - d$$

für $d > 0$ und $F_Y(y) = \Phi\left(\frac{\ln(y) - \mu}{\sigma}\right)$ für $Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ und $y > 0$ (vgl. Abschnitt 4.8) erhält man für den Erwartungswert der Einzelschadenhöhen $\underline{\underline{Y}}$ des Zweitriskos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] &= \mathbb{E}[\max\{Y - d, 0\}] \\ &= (1 - F_Y(d))e_Y(d) \\ &= \mathbb{E}[Y] \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\right) - d \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)\right) \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 6.5). Wegen $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\underline{Y}] + \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}]$ folgt daraus für den Erwartungswert der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$ des Erstriskos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{Y}] &= \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] \\ &= \mathbb{E}[Y] \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right) + d \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)\right). \end{aligned}$$

- c) Mit den Ergebnissen aus den Aufgabenteilen a) und b) erhält man für den Gesamtschaden $\underline{S}$ und $\underline{\underline{S}}$ des Erst- bzw. Zweitrisikos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{S}] &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{Y}] \\ &= \lambda \mathbb{E}[Y] \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right) + \lambda d \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}[S] \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right) + \lambda d \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)\right)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}] &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[\underline{\underline{Y}}] \\ &= \lambda \mathbb{E}[Y] \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\right) - \lambda d \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}[S] \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\right) - \lambda d \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)\right)\end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 6.6).

Aufgabe 6

- a) Die erwartete jährliche Schadenanzahl über 2 Mio. Euro ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[\underline{N}] = 5 \cdot \mathbb{P}(Y_i > 2.000.000 | Y_i > 1.000.000).$$

Wegen der Annahme

$$Y_i | Y_i > 1.000.000 \sim \text{Par}^*(2,5; 1.000.000)$$

folgt daraus weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{N}] &= 5 \cdot \mathbb{P}(Y_i > 2.000.000 | Y_i > 1.000.000) \\ &= 5 \cdot (1 - \mathbb{P}(Y_i \leq 2.000.000 | Y_i > 1.000.000)) \\ &= 5 \cdot \left(1 - \left(1 - \left(\frac{1.000.000}{2.000.000} \right)^{2,5} \right) \right) \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1.000.000}{2.000.000} \right)^{2,5} \approx 0,8839 \end{aligned} \quad (11)$$

(vgl. Abschnitt 4.12). Gemäß des Hinweises gilt weiter

$$Y_i | Y_i > 2.000.000 \sim \text{Par}^*(2,5; 2.000.000). \quad (12)$$

Wegen $X - \lambda \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ für $X \sim \text{Par}^*(\alpha, \lambda)$ folgt

$$\mathbb{E}[Y_i - 2.000.000 | Y_i > 2.000.000] = \frac{2.000.000}{2,5 - 1} = 1.333.333 \text{ Euro}$$

(vgl. Abschnitt 4.12). Damit erhält man für den erwarteten jährlichen Gesamtschaden des Rückversicherers

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{S}] &= \mathbb{E}[\underline{N}] \cdot \mathbb{E}[Y_i - 2.000.000 | Y_i > 2.000.000] \\ &= 0,88 \cdot 1.333.333 \approx 1.178.533 \text{ Euro} \end{aligned}$$

- b) Wie in Aufgabenteil a) gilt (12). Im Gegensatz zum Aufgabenteil a) sind nun jedoch im Mittel 5 Schäden größer als 1,1 Mio. Euro. Für die erwartete jährliche Schadenanzahl über 2 Mio. Euro erhält man daher

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\underline{N}] &= 5 \cdot \mathbb{P}(Y_i > 2.000.000 | Y_i > 1.100.000) \\ &\quad \vdots \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1.100.000}{2.000.000} \right)^{2,5} \approx 1,1217 \end{aligned}$$

(vgl. (11)).

D.h. der erwartete jährliche Gesamtschaden des Rückversicherers beträgt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{S}] &= \mathbb{E}[\underline{N}] \cdot \mathbb{E}[Y_i - 2.000.000 | Y_i > 2.000.000] \\ &= 1,1217 \cdot 1.333.333 \approx 1.495.600 \text{ Euro.}\end{aligned}$$

Interpretation: Eine Teuerung von 10% bewirkt eine Erhöhung des erwarteten jährlichen Gesamtschadens des Rückversicherers um

$$\frac{1.495.600 - 1.178.533}{1.178.533} \approx 26,9\%$$

(Leverage-Effekt). Dabei ist zu beachten, dass der erwartete Schadenaufwand

$$\mathbb{E}[Y_i - 2.000.000 | Y_i > 2.000.000]$$

für Schäden, welche die Priorität von 2 Mio. Euro übersteigen, durch die Teuerung nicht beeinflusst wird. Die Erhöhung des erwarteten jährlichen Gesamtschadens des Rückversicherers resultiert einzig und allein daraus, dass nach der Teuerung mehr Schäden die Priorität von 2 Mio. Euro übersteigen und damit beim Rückversicherer landen.

Aufgabe 7

a) Für die Einzelschadenhöhenverteilung F_Y erhält man (vgl. Abschnitt 6.7):

$$F_Y(d) = 1 - \frac{r'(d)}{r'(0)} = 1 - \frac{\frac{\alpha-1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+d} \right)^\alpha}{\frac{\alpha-1}{\lambda}} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+d} \right)^\alpha$$

D.h. bei der Einzelschadenhöhenverteilung F_Y handelt es sich um eine $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.12).

b) Für die erste Ableitung von $r(d)$ erhält man

$$r'(d) = \left(\frac{\int_0^{\alpha(a+d)^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt}{1 - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt} \right)' = \frac{\left(\int_0^{\alpha(a+d)^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt \right)'}{1 - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt}$$

$$= \frac{e^{-\alpha(a+d)^\beta} \left(\alpha(a+d)^\beta \right)^{1/\beta-1} \alpha \beta (a+d)^{\beta-1}}{1 - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt} = \frac{e^{-\alpha(a+d)^\beta} \alpha^{1/\beta} \beta}{1 - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt}$$

und somit insbesondere

$$r'(0) = \frac{e^{-\alpha a^\beta} \alpha^{1/\beta} \beta}{1 - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1} dt}.$$

Für die Einzelschadenhöhenverteilung F_Y folgt somit (vgl. Abschnitt 6.7):

$$F_Y(d) = 1 - \frac{r'(d)}{r'(0)} = 1 - \frac{e^{-\alpha(a+d)^\beta}}{e^{-\alpha a^\beta}} = 1 - e^{-\alpha((a+d)^\beta - a^\beta)}$$

D.h. bei der Einzelschadenhöhenverteilung F_Y handelt es sich um eine verallgemeinerte Weibull-Verteilung. Daraus resultiert für $a = 0$ die herkömmliche Weibull-Verteilung (vgl. Abschnitt 4.11) und für $\beta = 1$ die $\text{Exp}(\alpha)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 4.7).