Quantitatives Risikomanagement 1
WS 2025

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

1) Es sei

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

der beobachtete Schadendurchschnitt in einem Portfolio bestehend aus Privathaftpflichtversicherungsverträgen. Die Einzelschadenhöhen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien unabhängig und identisch-verteilt mit

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Vko}(Y_i) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_i)}}{\mathbb{E}[Y_i]} = 4.$$

Wie groß muss die Schadenanzahl n sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% der beobachtete Schadendurchschnitt $\overline{Y}$ um weniger als $\delta = 10\%, 5\%, 3\%$ bzw. 1% von seinem Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[\overline{Y}]$ abweicht. Benutzen Sie zur (approximativen) Bestimmung von n den zentralen Grenzwertsatz. Interpretieren Sie das Ergebnis für $\delta = 1\%$.

Zur Erinnerung der zentrale Grenzwertsatz besagt: Sind $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen mit $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_i) \in (0,\infty)$ und ist

$$S_n := \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{1}$$

die standardisierte Summenvariable, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) = \Phi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

2) Weisen Sie die drei folgenden Behauptungen nach (die Existenz der benötigten Momente vorausgesetzt):

   a) Der Variationskoeffizient $\mathrm{Vko}(X) = \frac{\sigma(X)}{\mathbb{E}[X]}$ ist skaleninvariant, d.h. es gilt $\mathrm{Vko}(aX) = \mathrm{Vko}(X)$ für alle $a > 0$.

   b) Die Schiefe $V(X) = \frac{\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^3\right]}{\sigma(X)^3}$ ist bzgl. positiv affin-linearer Transformationen invariant, d.h. es gilt $V(aX+b) = V(X)$ für alle $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

   c) Der Variationskoeffizient ist für positive Zufallsvariablen subadditiv, d.h. es gilt $\mathrm{Vko}(X) + \mathrm{Vko}(Y) \geq \mathrm{Vko}(X+Y)$ für Zufallsvariablen X und Y mit $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ und $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$. Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung

$$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} + \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} \geq \sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}.$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 2

Übungsaufgaben

1) Ermitteln Sie für das Risiko X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(X=c)=\begin{cases} 0{,}80 & \text{für } c=0 \\ 0{,}12 & \text{für } c=50 \\ 0{,}04 & \text{für } c=80 \\ 0{,}02 & \text{für } c=90 \\ 0{,}02 & \text{für } c=100 \end{cases}$$

anhand einer Skizze für die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ den Value-at-Risk zu den Sicherheitsniveaus $q=0{,}95;0{,}96;0{,}98$ und $0{,}99$.

2) Es sei X ein Exponential-verteiltes Risiko mit dem Parameter $\lambda>0$. D.h. X besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie

a) analytisch den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von X zum Sicherheitsniveau $q\in(0,1)$ sowie

b) mittels Excel die Werte des Value-at-Risks und des Expected-Shortfalls für die Parameterwerte $\lambda=\frac{1}{10},\frac{1}{2},1,2,5$ und Sicherheitsniveaus $q=0{,}95;0{,}99;0{,}995$. Was ist zu beobachten?

Hinweis: Es gilt $\int \ln(1-u)\,du=-(1-u)\ln(1-u)+(1-u)+C$ mit $C\in\mathbb{R}$.

3) Betrachtet wird ein Gesamtunternehmen $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$, das aus den drei Geschäftsbereichen X_1, X_2, X_3 besteht. Für den Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ gelte

$$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu} = (10, 5, 5)^T, \ \mathrm{Var}(X_1) = 144, \ \mathrm{Var}(X_2) = 6{,}25, \ \mathrm{Var}(X_3) = 56{,}25$$

und die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bekannt seien.

a) Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ von $\mathbf{X}$.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
c) Ermitteln Sie für die drei einzelnen Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 und das Gesamtunternehmen X jeweils den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 99{,}5\%$.

4) Es sei S der Jahresschadenaufwand eines Versicherungsunternehmens und Y der Schadenaufwand eines von S stochastisch unabhängigen seltenen Extremszenarios. Es wird angenommen, dass $S \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt mit

$$\mathbb{E}[S] = 2300 \text{ Mio. CHF} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Vko}(S) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbb{E}[S]} = 5\%.$$

Für das seltene Extremszenario wird ferner unterstellt, dass es durchschnittlich nur alle 500 Jahre eintritt und dann einen Schaden von 400 Mio. CHF verursacht.

a) Ermitteln Sie das benötigte Risikokapital zum Sicherheitsniveau $q = 99\%$ für den Jahresschadenaufwand S für die beiden folgenden Fälle:

i) $\mathrm{RK}(S) = \mathrm{VaR}_q(S - \mathbb{E}[S])$ (sog. mean Value-at-Risk)

ii) $\mathrm{RK}(S) = \mathrm{ES}_q(S - \mathbb{E}[S])$ (sog. mean Expected-Shortfall)

b) Berechnen Sie nun für den Fall i) das benötigte Risikokapital für den aggregierten Schadenaufwand $S + Y$.

Hinweis: Für $S \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma^2/2}$, $\mathrm{Var}(S) = (e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[S]^2$, $f_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ für $x > 0$ und $f_S(x) = 0$ für $x \le 0$ sowie $F_S(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$ für $x > 0$ und $F_S(x) = 0$ für $x \le 0$.

5) Das Risiko X besitze die diskrete Verteilung F_X mit dem Träger

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 \dots$$

und den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i > 0$. Ferner sei $q \in (0,1)$ ein vorgegebenes Sicherheitsniveau und i_0 der kleinste Index, für den

$$\sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i \geq q, \quad \text{also} \quad \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i = q + \delta \;\text{ für }\; \delta \geq 0$$

gilt.

a) Zeigen Sie

$$\mathrm{ES}_q(X) = \frac{1}{1-q}\left(\mathbb{E}[X] - \sum_{i=-\infty}^{i_0} p_i x_i + \delta \mathrm{VaR}_q(X)\right).$$

b) Bestimmen Sie $\mathrm{CTE}_q(X) = \mathbb{E}[X | X > \mathrm{VaR}_q(X)]$ und zeigen Sie, dass $\mathrm{ES}_q(X)$ und $\mathrm{CTE}_q(X)$ für $\delta = 0$ übereinstimmen.

c) Betrachtet wird ein Extremszenario Y mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$Y = \begin{cases} 300 \text{ Mio. CHF} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}.$$

Ermitteln Sie $\mathrm{VaR}_q(Y)$ und $\mathrm{ES}_q(Y)$ für $q = 99\%$ und die drei folgenden Wahrscheinlichkeiten: $p = 0{,}5\%$, $p = 1\%$ und $p = 1{,}5\%$.

6) Es sei $\widetilde{X}$ die mittels der Wang-Transformation und der Distortion-Funktion

$$g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \alpha) \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

risikoadjustierte Zufallsvariable, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{X} \sim \mathrm{LN}(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ für $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ und $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Interpretieren Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a) für $\alpha > 0$.

c) Geben Sie das zugehörige Distortion-Risikomaß $\rho_g(X)$ an.

Hinweis: Verwenden Sie $\mathbb{E}[X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$ für $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 3

1) Bei den Marktrisiken einer Versicherungsgesellschaft wurden unter der Normalverteilungsannahme $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für die einzelnen Risikokategorien X_i mittels

$$\mathrm{RK}(X_i) = \mathrm{ES}_q(X_i - \mathbb{E}[X_i])$$

(sog. mean Expected-Shortfall) für das Sicherheitsniveau $q = 99\%$ die folgenden Stand-alone-Risikokapitalien ermittelt:

	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
$\mathrm{RK}(X_i)$	195 Mio. CHF	60 Mio. CHF	210 Mio. CHF	75 Mio. CHF

a) Bestimmen Sie das Risikokapital $\mathrm{RK}(X)$ für das aggregierte Marktrisiko $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ unter der vereinfachenden Annahme, dass die Risiken in den vier Kategorien X_i stochastisch unabhängig sind. Um wieviel Prozent ist dieses Risikokapital kleiner als die Summe der Stand-alone-Risikokapitalien $\mathrm{RK}(X_i)$ (Diversifikationseffekt)?

b) Führen Sie nun die gleiche Berechnung unter der realistischeren Annahme durch, dass zwischen den Risiken in den vier Kategorien die folgenden Korrelationen ρ_{ij} bestehen:

Korrelationsmatrix				
	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
Zinsänderungsrisiko	1	$-0{,}08$	0,24	0,24
Spreadrisiko	$-0{,}08$	1	$-0{,}37$	$-0{,}29$
Aktienpreisrisiko	0,24	$-0{,}37$	1	0,37
Währungsrisiko	0,24	$-0{,}29$	0,37	1

2) Es wird ein Unternehmen mit drei unterschiedlichen Geschäftsbereichen betrachtet. Das Gesamtrisiko des Unternehmens sei durch $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$ gegeben, wobei X_1, X_2 und X_3 die Risiken der drei einzelnen Geschäftsbereiche repräsentieren. Für diese gelte:

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 - 105 \quad \text{mit} \quad Y_1 \sim \mathrm{N}(100, 20^2) \\ X_2 &= Y_2 - 120 \quad \text{mit} \quad Y_2 \sim \mathrm{LN}(4, 1) \\ X_3 &= Y_3 - 130 \quad \text{mit} \quad Y_3 \sim \mathrm{Par}(4, 300) \end{aligned}$$

Diese drei Geschäftsbreiche sind stochastisch abhängig und ihre stochastische Abhängigkeit wird durch eine sog. 3-dimensionale Gumbel-Copula mit Para-meter $\theta = 1{,}2$, d.h.

$$C(u,v,w) = \exp\left(-\left((-\ln(u))^{1,2} + (-\ln(v))^{1,2} + (-\ln(w))^{1,2}\right)^{\frac{1}{1,2}}\right),$$

beschrieben (siehe hierzu Vorlesung „Quantitatives Risikomanagement 2“). Das Unternehmen verwendet als Risikomaß den Expected Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 95\%$ und mittels Monte-Carlo-Simulation wurde für das Unternehmen unter Berücksichtigung der stochastischen Abhängigkeit der drei Geschäftsbereiche ein Gesamtrisikokapital i.H.v. $\mathrm{RK}(X) = \mathrm{ES}_{0,95}(X) = 622$ berechnet.

Übungsaufgaben

a) Bestimmen Sie für die drei Geschäftsbereiche die Stand-alone-Risikokapitalien $\mathrm{RK}(X_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Berechnen Sie den Diversifikationseffekt.

c) Berechnen Sie die Risikokapitalien für die drei Geschäftsbereiche, die sich bei Verwendung des proportionalen Allokationsverfahrens ergeben würden.

d) Ermitteln Sie die Risikokapitalien für die drei Geschäftsbereiche bei Verwendung des inkrementellen Allokationsverfahrens. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Risiken der drei Geschäftsbereiche in der Reihenfolge X_1, X_2, X_3 hinzukommen und eine Monte-Carlo-Simulation $\mathrm{RK}(X_1 + X_2) = \mathrm{ES}_{0,95}(X_1 + X_2) = 360{,}6$ ergeben hat.

e) Bestimmen Sie die Risikokapitalien für die drei Geschäftsbereiche, die sich bei Verwendung der Shapley-Wert-Allokation ergeben würde. Verwenden Sie hierbei, dass eine Monte-Carlo-Simulation $\mathrm{RK}(X_1 + X_3) = \mathrm{ES}_{0,95}(X_1 + X_3) = 428{,}3$ und $\mathrm{RK}(X_2 + X_3) = \mathrm{ES}_{0,95}(X_2 + X_3) = 606{,}7$ ergeben hat.

3) Es sei wieder die Situation der Übungsaufgabe 3) in Kapitel 2 gegeben. Berechnen Sie für die drei Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 das jeweils resultierende Risikokapital

   a) bei Verwendung des (modifizierten) Kovarianzprinzips mit Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß,
   b) bei Verwendung des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ und
   c) bei Verwendung des Euler-Prinzips mit Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß.

Übungsaufgaben zu Kapitel 4

Übungsaufgaben

1) Weisen Sie für die beiden folgenden Verteilungen nach, dass es sich um subexponentielle Verteilungen handelt:

   a) $\mathrm{Par}(\alpha, \lambda)$ mit $\alpha, \lambda > 0$
   b) $\mathrm{Weibull}(a, b)$ mit $a < 1$ und $b > 0$

2) Es gelte $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$.

   a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X} = \frac{N}{n}$ ein erwartungstreuer Schätzer für p ist, d.h. $\mathbb{E}[\widehat{X}] = p$ gilt.
   b) Untersuchen Sie, ob $\widehat{Y} = n\widehat{X}(1 - \widehat{X})$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathrm{Var}(N)$ ist.

3) Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ (vgl. Abschnitt 4.7) seien stochastisch unabhängig.

   a) Weisen Sie nach, dass gilt:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

   b) Zeigen Sie, dass $\lambda Y \sim \Gamma(n, 1)$ für $\lambda > 0$ gilt.
   c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) das $100(1 - \alpha)\%$-Konfidenzintervall für den Parameter $\lambda > 0$.

Übungsaufgaben

4) Eine inverse Gauss-Verteilung mit Mittelwert $\mu > 0$ und Shapeparameter $\lambda > 0$ (kurz: $Y \sim \mathrm{IG}(\mu, \lambda)$) besitzt die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}}\, e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 y}(y-\mu)^2} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.10). Ermitteln Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für die Parameter μ und λ.

5) Es gelte $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ (vgl. Abschnitt 4.7).

   a) Zeigen Sie die Zufallsvariable $X = Y^{-1}$ besitzt eine sogenannte Inverse-Exp(λ)-Verteilung mit der Dichtefunktion

   $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Hinweis: Verwenden Sie den geeigneten Spezialfall des Transformationssatzes für Dichtefunktionen (siehe Abschnitt 4.14).

   b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

   c) Ermitteln Sie den Median und den Modalwert (d.h. die Maximalstelle der Dichte) von X.

6) Es gelte $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ (vgl. Abschnitt 4.7) und

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \mapsto g(x) := a \exp\left(\frac{\lambda x}{b}\right) - a$$

mit $a, b > 0$. Bestimmen Sie die Dichte und die Verteilung der transformierten Zufallsvariablen

$$Y := g(X).$$

7) Für die Einzelschadenhöhe gelte

$$Y := Z^{-1} \qquad \text{mit} \quad Z \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

und $\alpha > 1, \beta > 0$ sowie

$$X|Y = y \sim \text{Exp}(1/y), \qquad \text{d.h.} \quad f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7).

a) Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von Y.
b) Bestimmen Sie die (unbedingte) Verteilung von X.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a).

Übungsaufgaben zu Kapitel 5

1) Zeigen Sie mit Hilfe der Faltungsformel (vgl. Abschnitt 5.2), dass im kollektiven Modell mit $0 \in \mathcal{N}$ für die bedingte zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung $F_S(s|S>0)$ und deren Dichte $f_S(s|S>0)$ für $s>0$

$$F_S(s|S>0) = \frac{1}{1-\mathbb{P}(N=0)} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} F_Y^{\star n}(s) \cdot \mathbb{P}(N=n) - \mathbb{P}(N=0) \right)$$

bzw.

$$f_S(s|S>0) = \frac{1}{1-\mathbb{P}(N=0)} \sum_{n \in \mathcal{N}} f_Y^{\star n}(s) \cdot \mathbb{P}(N=n)$$

gilt.

2) Es seien die Annahmen des kollektiven Modells (vgl. Abschnitt 5.2) erfüllt mit $N \sim \mathrm{Geo}(p)$ (vgl. Abschnitt 4.4) und $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ (vgl. Abschnitt 4.7). Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus der letzten Übungsaufgabe für diese spezielle Situation $f_S(s|S>0)$ sowie $F_S(s|S>0)$ und damit schließlich die (unbedingte) zusammengesetzte Gesamtschadenverteilung $F_S(s)$.

3) Eine Firma wünscht ein Angebot für eine Sachversicherung, wobei die beiden verschiedenen Deckungsarten angeboten werden sollen:

   a) 500 CHF Selbstbehalt pro Schaden
   b) 2.000 CHF Selbstbehalt pro Schaden plus ein zusätzlicher Kumulschutz, bei dem dieser Selbstbehalt nur für die ersten beiden Schäden bezahlt werden muss und ab dem dritten Schaden, welcher die Limite von 2.000 CHF übertrifft, auch vom Versicherer übernommen wird

   Aus der Schadenstatistik ist Folgendes bekannt:

   - Im Durchschnitt ist jährlich mit 10 Schäden oberhalb von 500 CHF zu rechnen
   - Von diesen Schäden sind durchschnittlich 80% kleiner oder gleich 2.000 CHF mit einem durchschnittlichen Schadenaufwand (vor Abzug des Selbstbehalts) von 1.000 CHF und 20% der Schäden liegen oberhalb von 2.000 CHF mit einem durchschnittlichen Schadenaufwand von 5.000 CHF

   Das Versicherungsunternehmen benötigt für die Verwaltungskosten und den Risikozuschlag zusammen ein Loading von 30% auf die reine Risikoprämie $\mathbb{E}[S]$. Berechnen Sie die Prämien für die beiden Deckungsarten unter der Annahme, dass die Schadenanzahl Poisson-verteilt ist.

4) Ein Betrieb besitzt den folgenden Fahrzeugpark:

Fahrzeugart	Anzahl
Personenwagen	40
Lieferwagen	30
Lastwagen	10
Gesamt	80

Über die Schäden sind folgende Kennzahlen bekannt:

i	Fahrzeugart	Schadenfrequenz in ‰	Durchschnittliche Schadenhöhe in CHF	Vko der Schadenhöhe
1	Personenwagen	250	2000	2,5
2	Lieferwagen	230	1700	2,0
3	Lastwagen	190	4000	3,0

Die Schadenanzahlen N_i seien $\Pi(\lambda_i)$-verteilt und von den Schadenhöhen Y_i stochastisch unabhängig. Ferner seien die Schadenanzahlen und die Einzelschadenhöhen in unterschiedlichen Fahrzeugarten stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung des Gesamtschadens $S = \sum_{i=1}^{3} S_i$.

b) Ermitteln Sie die Prämie für das Gesamtrisiko S gemäß dem Varianzprinzip $\pi(S) = \mathbb{E}[S] + \alpha \mathrm{Var}(S)$ mit einem Loading-Faktor $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}$. Wie groß ist das Loading auf der reinen Risikoprämie $\mathbb{E}[S]$ in %.

5) Durch die unabhängigen und zusammengesetzt Poisson-verteilten Zufallsvariablen

$$S_1 := \sum_{i=1}^{N_1} U_i, \;\; S_2 := \sum_{i=1}^{N_2} V_i \quad \text{und} \quad S_3 := \sum_{i=1}^{N_3} W_i$$

sei jeweils der Gesamtschaden von drei Versicherungsportfolios gegeben. Für die Parameter λ_i der Poisson-Verteilungen der Schadenanzahlen N_i mit $i = 1,2,3$ gelte $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 6$. Die Verteilungsfunktionen F_i der Einzelschadenhöhen U, V und W seien durch die folgende Tabelle gegeben:

s	$\mathbb{P}(U = s)$	$\mathbb{P}(V = s)$	$\mathbb{P}(W = s)$
200	0,5	0,0	0,2
300	0,3	0,3	0,3
400	0,2	0,4	0,3
500	0,0	0,3	0,1
600	0,0	0,0	0,1

Berechnen Sie die Mischverteilung F der Einzelschadenhöhen, die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S \leq 400)$ sowie die Momente $\mathbb{E}[S]$ und $\mathrm{Var}(S)$ für den aggregierten Gesamtschaden

$$S := S_1 + S_2 + S_3.$$

6) Betrachtet wird eine Motorfahrzeughaftpflichtversicherung mit einer Schadenfrequenz von 80‰. Von den gemeldeten Schadenfällen sind für den Versicherer 25% folgenlos, d.h. haben eine Schadenhöhe von Null (z.B. kein Verschulden, Bonushunger). Von den nicht folgenlosen Schadenfällen weisen 99% eine Schadenhöhe von höchstens 50.000 Euro auf. Diese Schadenfälle kosten im Mittel 3.000 Euro und der Variationskoeffizient beträgt 3. Die Schadenfälle mit einer Schadenhöhe von mehr als 50.000 Euro kosten im Durchschnitt 300.000 Euro und der Variationskoeffizient ist 1,5. Ferner kann angenommen werden, dass Schadenanzahl und Einzelschadenhöhen stochastisch unabhängig sind.

In der betrachteten Region weist das Portfolio des Versicherungsunternehmens 90.000 Versicherte (Jahresrisiken) auf. Ermitteln Sie für

- den Gesamtschaden S,
- den Schadenaufwand S_1 für Schadenfälle von höchstens 50.000 Euro und
- den Schadenaufwand S_2 für Schadenfälle über 50.000 Euro

jeweils den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten unter der Annahme, dass die Gesamtschadenanzahl in der betrachteten Region Poisson-verteilt ist.

7) Betrachtet wird ein kollektives Modell mit $\Pi(2)$-verteilter Schadenanzahl N und für die Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhen Y gelte

$$f_Y(l) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot 0{,}4^{l-1} & \text{für } l = 1,2,3,\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Panjer-Algorithmus $f_S(l)$ für $l = 0,1,2,3$.

8) Der Gesamtschaden S_1 sei zusammengesetzt Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 2$ und der Gesamtschaden S_2 sei zusammengesetzt negativ Binomial-verteilt mit den Parametern $r = 2$ und $p = 0{,}5$. Für die Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhen Y gelte in beiden Fällen

$$f_Y(1) = 0{,}4,\ \ f_Y(2) = 0{,}35 \quad \text{und} \quad f_Y(3) = 0{,}25.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(S_1 + S_2 = l) \qquad \text{für} \quad l = 0,1,2,3$$

unter der Annahme, dass die beiden Gesamtschäden S_1 und S_2 stochastisch unabhängig sind.

Übungsaufgaben zu Kapitel 6

Übungsaufgaben

1) Für einen Bestand an Einzelrisiken wird eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit globalem Selbstbehalt $M = 100.000$ Euro vereinbart. Bestimmen Sie für ein Risiko aus dem Bestand mit Versicherungssumme $v_i = 500.000$ Euro den Selbstbehaltsanteil c_i.

2) Betrachtet wird ein Versicherungsbestand mit $n = 2$ Einzelrisiken und den Versicherungssummen $v_1 = 50$ und $v_2 = 100$ (in Tsd. Euro). Die beiden Einzelrisiken Y_1 und Y_2 seien stochastisch unabhängig und besitzen die Momente

$$\mathbb{E}[Y_1] = 5 \quad \text{und} \quad \sigma(Y_1) = 10 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbb{E}[Y_2] = 20 \quad \text{und} \quad \sigma(Y_2) = 22.$$

   a) Ermitteln Sie den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens $S = Y_1 + Y_2$.

   b) Für den Versicherungsbestand wird nun eine Summenexzedenten-Rückversicherung mit globalem Selbstbehalt M abgeschlossen. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten für den Selbstbehalt und das transferierte Risiko

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{2} c_i Y_i \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{\underline{S}} = \sum_{i=1}^{2} (1 - c_i) Y_i.$$

   c) Interpretieren Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil b).

3) Die Schadenanzahl N und die Einzelschadenhöhen Y_i erfüllen die Annahmen des kollektiven Modells (vgl. Abschnitt 5.2). Betrachtet wird eine nichtproportionale Rückversicherung mit Priorität $d > 0$ und

$$\underline{\underline{N}} = \sum_{i=1}^{N} 1_{(d,\infty)}(Y_i)$$

sei die Schadenanzahl des Zweitrisikos. Ferner sei

$$\alpha := \mathbb{P}(Y_i > d).$$

Zeigen Sie mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion von $\underline{\underline{N}}$:

   a) Für $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ gilt $\underline{\underline{N}} \sim \mathrm{Bin}(n,p\alpha)$.
   b) Für $N \sim \mathrm{NBin}(r,p)$ folgt $\underline{\underline{N}} \sim \mathrm{NBin}\left(r, \frac{p}{p+(1-p)\alpha}\right)$.

4) Betrachtet wird eine Versicherung, bei der eine Abzugsfranchise mit Selbstbehaltsgrenze d vereinbart wurde. Bestimmen Sie für die folgenden drei Schadenhöhenverteilungen F_Y die Verteilung des Zweitrisikos $\underline{\underline{Y}} = \max\{Y-d, 0\}$, gegeben, dass die Schadenhöhe Y die Selbstbehaltsgrenze d übersteigt:

   a) $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
   b) $Y \sim \mathrm{Weibull}(a,b)$
   c) $Y \sim \mathrm{Par}(\alpha,\lambda)$

5) Betrachtet wird ein Portfolio von Einzelrisiken. Sein jährlicher Gesamtschaden

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

sei zusammengesetzt Poisson-verteilt mit

$$N \sim \Pi(\lambda) \qquad \text{und} \qquad Y_i \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2).$$

Für den jährlichen Gesamtschaden soll eine Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung mit der Priorität $d > 0$ und der Haftstrecke $h = \infty$ quotiert werden.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Schadenanzahl $\underline{N}$ und $\underline{\underline{N}}$ des Erst- bzw. Zweitrisikos.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Einzelschadenhöhen $\underline{Y}$ und $\underline{\underline{Y}}$ des Erst- bzw. Zweitrisikos.

   Hinweis: Für $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ und $d > 0$ gilt:

$$e_Y(d) = \mathbb{E}[Y] \, \frac{1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu}{\sigma}\right)} - d$$

c) Ermitteln Sie den Erwartungswert der Gesamtschäden $\underline{S}$ und $\underline{\underline{S}}$ des Erst- bzw. Zweitrisikos.

Übungsaufgaben

6) Ein Aktuar in einer Rückversicherungsgesellschaft muss für einen Erstversicherer einen Einzelschadenexzedentenvertrag mit Priorität $d = 2$ Mio. Euro und Haftstrecke $h = \infty$ quotieren. Dies bedeutet, dass der Rückversicherer von jedem Schaden Y_i den Betrag

$$\underline{\underline{Y_i}} := \max\{Y_i - 2.000.000, 0\}$$

zu übernehmen hat. Für seine Berechnungen lässt sich der Aktuar vom Erstversicherer alle Schäden aus den letzten drei Jahren geben, die größer als 1 Mio. Euro waren. Er kommt zum Schluss, dass pro Jahr im Mittel mit 5 solcher Schäden zu rechnen ist, und dass sich deren Einzelschadenhöhe durch eine europäische Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}^*(\alpha, \lambda)$ mit Scaleparameter $\lambda = 1.000.000$ und Shapeparameter $\alpha = 2{,}5$ beschreiben lässt.

a) Es sei $\underline{\underline{N}}$ die jährliche Schadenanzahl, welche die Priorität von 2 Mio. Euro übersteigt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\underline{\underline{N}}]$ und den erwarteten jährlichen Gesamtschaden $\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}]$ des Rückversicherers (Hinweis: Aufgrund der Abgeschlossenheit der europäischen Pareto-Verteilung bzgl. einer Erhöhung des Thresholds gilt $Y_i | Y_i > 2.000.000 \sim \mathrm{Par}^*(2{,}5; 2.000.000)$).

b) Zwischen Beobachtungsperiode und der zu tarifierenden Periode muss mit einer Inflation der Einzelschadenhöhen von 10% gerechnet werden. Berechnen Sie die Größen $\mathbb{E}[\underline{\underline{N}}]$ und $\mathbb{E}[\underline{\underline{S}}]$ nach Berückichtigung von Inflation und interpretieren Sie das Ergebnis.

7) Betrachtet wird ein kollektives Modell

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

mit der Schadenanzahl N und den Einzelschadenhöhen $Y_i \sim F_Y$ (vgl. Abschnitt 5.2). Bestimmen Sie für die beiden folgenden Entlastungseffektfunktionen $r(d)$ (vgl. Abschnitt 6.7) die zugehörige Einzelschadenhöhenverteilung F_Y:

a) $r(d) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1}$ mit $\alpha > 1, \lambda > 0$

b) $r(d) = \dfrac{\int_0^{\alpha(a+d)^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1}\, dt - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1}\, dt}{1 - \int_0^{\alpha a^\beta} e^{-t} t^{1/\beta-1}\, dt}$ mit $a, \alpha, \beta > 0$