2) i)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -12 \\ 1 & -5 & 21 \\ 1 & -2 & -29 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 108 \\ 92 \\ 61 \\ 198 \\ 21 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 600 \\ -\ 255 \\ 5049 \end{pmatrix}$$

und

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 68 & 0 \\ 0 & 0 & 1584 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{68} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1584} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{68} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1584} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ -\ 255 \\ 5049 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -3{,}75 \\ 3{,}1875 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe von $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ erhält man für die Residuen

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_1 \\ \widehat{\varepsilon}_2 \\ \widehat{\varepsilon}_3 \\ \widehat{\varepsilon}_4 \\ \widehat{\varepsilon}_5 \\ \widehat{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} = \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 120 \\ 108 \\ 92 \\ 61 \\ 198 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -12 \\ 1 & -5 & 21 \\ 1 & -2 & -29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ -3{,}75 \\ 3{,}1875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 108 \\ 92 \\ 61 \\ 198 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 120{,}625 \\ 103{,}5625 \\ 117{,}0625 \\ 58 \\ 185{,}6875 \\ 15{,}0625 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 4{,}4375 \\ -25{,}0625 \\ 3 \\ 12{,}3125 \\ 5{,}9375 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{6-(2+1)} \sum_{i=1}^{6} (y_i - \widehat{y}_i)^2 = \frac{1}{6-(2+1)} \sum_{i=1}^{6} \widehat{\varepsilon}_i^2 \approx 281{,}3542.$$

4)a)/b)

a) Es gilt

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 37 \\ 37 & 279 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 80 \\ 630 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{305} \begin{pmatrix} 279 & -37 \\ -37 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 630 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3{,}2459 \\ 2{,}6885 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Für die standardisierten Residuen gilt

$$r_i = \frac{\widehat{\varepsilon}_i}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}}}.$$

Mit

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \widehat{\varepsilon}_1 \\ \widehat{\varepsilon}_2 \\ \widehat{\varepsilon}_3 \\ \widehat{\varepsilon}_4 \\ \widehat{\varepsilon}_5 \\ \widehat{\varepsilon}_6 \end{pmatrix} = \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3{,}2459 \\ 2{,}6885 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10{,}1966 \\ 15{,}5736 \\ 12{,}8851 \\ 4{,}8196 \\ 29{,}0161 \\ 7{,}5081 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1966 \\ -2{,}5736 \\ 0{,}1149 \\ 0{,}1804 \\ 0{,}9839 \\ 1{,}4919 \end{pmatrix}.$$

erhält man für den Schätzer von σ^2

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{6-(1+1)} \sum_{i=1}^{6} (y_i - \widehat{y}_i)^2 = \frac{1}{6-(1+1)} \sum_{i=1}^{6} \widehat{\varepsilon}_i^2 = 2{,}4754.$$

Des Weiteren ergibt sich für die Hat-Matrix H:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)\mathbf{X}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{305} \begin{pmatrix} 279 & -37 \\ -37 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{305} \begin{pmatrix} 94 & -7 \\ 20 & 5 \\ 57 & -1 \\ 168 & -19 \\ -165 & 35 \\ 131 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 12 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{305} \begin{pmatrix} 59 & 45 & 52 & 73 & 10 & 66 \\ 45 & 55 & 50 & 35 & 80 & 40 \\ 52 & 50 & 51 & 54 & 45 & 53 \\ 73 & 35 & 54 & 111 & -60 & 92 \\ 10 & 80 & 45 & -60 & 255 & -25 \\ 66 & 40 & 53 & 92 & -25 & 79 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit resultiert für die standardisierten Residuen:

$$r_1 = \frac{\widehat{\varepsilon}_1}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{11}}} = \frac{-0{,}1966}{\sqrt{2{,}4754}\sqrt{1-\frac{59}{305}}} \approx -0{,}1391$$

$$r_2 = \frac{\widehat{\varepsilon}_2}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{22}}} = \frac{-2{,}5736}{\sqrt{2{,}4754}\sqrt{1-\frac{55}{305}}} \approx -1{,}8067$$

$$r_3 = \frac{\widehat{\varepsilon}_3}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{33}}} = \frac{0{,}1149}{\sqrt{2{,}4754}\sqrt{1-\frac{51}{305}}} \approx 0{,}0800$$

$$r_4 = \frac{\widehat{\varepsilon}_4}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{44}}} = \frac{0{,}1804}{\sqrt{2{,}4754}\sqrt{1-\frac{111}{305}}} \approx 0{,}1438$$

$$r_5 = \frac{\widehat{\varepsilon}_5}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{55}}} = \frac{0{,}9839}{\sqrt{2{,}4754}\sqrt{1-\frac{255}{305}}} \approx 1{,}5445$$

$$r_6 = \frac{\widehat{\varepsilon}_6}{\widehat{\sigma}\sqrt{1-h_{66}}} = \frac{1{,}4919}{\sqrt{2{,}4754}\sqrt{1-\frac{79}{305}}} \approx 1{,}1016$$