

Quantitatives Risikomanagement 1

WS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg



Kapitel 2

Risikomaße

Abschnitt 2.1

Einleitung

2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Für die **risiko- und wertorientierte Steuerung** sowie die geschäftsfeld-bezogene **Performance-Messung** von Unternehmen ist es notwendig, Risiken zu messen und miteinander zu vergleichen. Zum Beispiel ist das **Messen und Vergleichen** von Risiken zur Beantwortung der folgenden Fragen erforderlich:



- a) In welchen Geschäftsfeldern oder Portfolios sind besonders hohe Risiken vorhanden und wie groß sind diese Risiken?
- b) Welche Geschäftsfelder, Portfolios, Investitionen, Kapitalanlagen usw. sind gemessen an ihrem Risiko besonders profitabel?
- c) Welche Risiken können mit dem zur Verfügung stehenden Risikokapital gezeichnet bzw. welche Investitionen und Kapitalanlagen können mit dem zur Verfügung stehenden Risikokapital getätigt werden?
- d) Wie hoch ist die angemessene Risikoprämie für ein zu versicherndes Risiko oder für eine Investition in eine risikobehaftete Anlage?

2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Da man unter einem Risiko die Unsicherheit bzgl. eines zukünftigen Ereignisses versteht (vgl. Definition in Abschnitt 1.1), wird im Quantitativen Risikomanagement ein Risiko zu seiner Quantifizierung als eine (reellwertige) **Zufallsvariable**

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega)$$

auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

aufgefasst. Im Quantitativen Risikomanagement wird deshalb eine Zufallsvariable X oft auch als Risiko bezeichnet.

Auf diese Weise ist es möglich Methoden und Resultate der **Stochastik** zur Modellierung, Quantifizierung und Aggregation von Risiken einzusetzen.

Zum Beispiel ist das folgende **Gesetz der großen Zahlen** ein solches Resultat:

2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Satz (Gesetz der großen Zahlen)

Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch-verteilten Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0$$

Beweis: Siehe z.B. GEORGII (2002), Seite 117. ■

Dieses Resultat besagt, dass bei einem großen Portfolio aus n unabhängigen und identisch-verteilten Risiken ein **Diversifikationseffekt** eintritt. D.h. es kommt zu einem **Ausgleich** von schlechten und guten Risikoverläufen, so dass durch das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

mit zunehmender Portfoliogröße n die erwartete Einzelschadenhöhe $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ immer besser geschätzt werden kann. Dieser als **Ausgleich im Kollektiv** bezeichnete Diversifikationseffekt ist z.B. die Grundvoraussetzung für das Funktionieren von Versicherungen.

2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Konvention: Im Folgenden steht ein positives Vorzeichen von X stets für einen **Verlust** und ein negatives Vorzeichen für einen **Gewinn**.

Das **Gefahrenpotential (risk exposure)** eines Risikos wird somit durch die **Verteilungsfunktion**

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], x \mapsto F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$$

der mit dem Risiko assoziierten Zufallsvariable X vollständig erfasst.

Eine Verteilungsfunktion F_X besitzt stets die folgenden **Eigenschaften**:

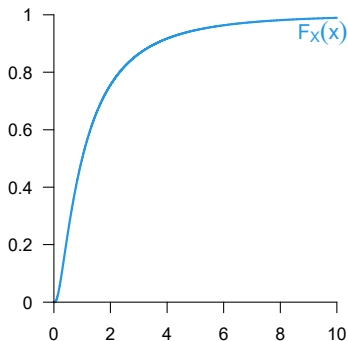
- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
- b) F_X ist **monoton wachsend**, d.h. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$
- c) F_X ist **rechtsstetig**, d.h. $\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

Die untenstehende Abbildung zeigt den **typischen Verlauf einer Verteilungsfunktion** im Falle einer (nichtnegativen) stetigen Zufallsvariable X (links) bzw. (nicht-negativen) diskreten Zufallsvariable X (rechts).

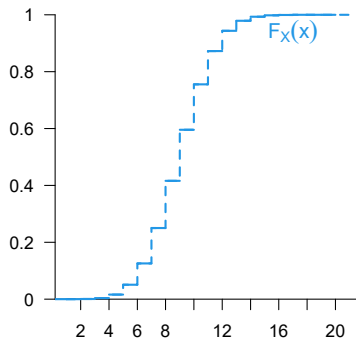
2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Stetige Verteilungsfunktion



Diskrete Verteilungsfunktion



2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Für einen Vergleich zweier Risiken X und Y sind jedoch deren Verteilungsfunktionen F_X und F_Y i.d.R. **ungeeignet**, da der direkte Vergleich von zwei Verteilungsfunktionen i.d.R. nicht so einfach möglich ist.

Eine Ausnahme liegt jedoch im Falle von **stochastischer Dominanz (1. Ordnung)** vor:

Definition (Stochastische Dominanz)

Das Risiko X dominiert das Risiko Y stochastisch (kurz: $X \geq_S Y$), falls

$$F_X(x) \leq F_Y(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

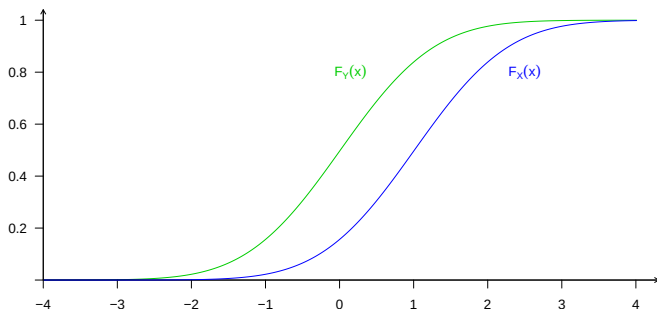
Im Falle von $X \geq_S Y$ ist Risiko X in dem Sinne **risikoreicher** als Risiko Y , dass für die **Tailwahrscheinlichkeiten**

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) \geq 1 - F_Y(x) = \mathbb{P}(Y > x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. D.h. X nimmt Werte größer als $x \in \mathbb{R}$ mit einer höheren Wahrscheinlichkeit als Y an (vgl. folgende Abbildung).

2. Risikomaße

2.1 Einleitung



Zum Beispiel gilt für zwei Zufallsvariablen X und Y mit der Eigenschaft $X \geq Y$ $\mathbb{P}$ -f.s., also mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq Y(\omega)\}) = 1, \quad (1)$$

die **stochastische Dominanz** $X \geq_S Y$. Denn für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(Y \leq x) = F_Y(x)$$

und damit $X \geq_S Y$.

2. Risikomaße

2.1 Einleitung

Die Umkehrung gilt jedoch i.A. nicht. D.h. aus $X \geq_S Y$ folgt nicht $X \geq Y$ $\mathbb{P}$ -f.s. Zum Beispiel gilt für

$$X \sim N(1, 1) \quad \text{und} \quad Y \sim N(0, 1)$$

zwar

$$X \geq_S Y$$

(siehe letzte Abbildung), aber nicht (1) bzw.

$$X \geq Y \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Das Konzept der stochastischen Dominanz besitzt aber den **entscheidenden Nachteil**, dass es auf der Menge $\mathcal{M}$ aller Risiken (Zufallsvariablen) keine **vollständige Ordnungsrelation**, sondern nur eine (gewöhnliche) **Ordnungsrelation** ist. D.h. es gilt:

- a) $X \geq_S X$ für alle $X \in \mathcal{M}$ (Reflexivität)
- b) $X \geq_S Y$ und $Z \geq_S X \implies Z \geq_S Y$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{M}$ (Transitivität)
- c) $X \geq_S Y$ und $Y \geq_S X \implies F_X = F_Y$ für alle $X, Y \in \mathcal{M}$ (Antisymmetrie)

Es gilt aber nicht:

- d) $X \geq_S Y$ oder $Y \geq_S X$ für alle $X, Y \in \mathcal{M}$ (Vollständigkeit)

2. Risikomaße

2.1 Einleitung

D.h. es gibt Risiken, die sich durch das Konzept der stochastischen Dominanz **nicht anordnen/vergleichen** lassen. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich deren Verteilungsfunktionen mindestens einmal schneiden.

Aus diesem Grund ist auch die stochastische Dominanz i.A. kein praktikables Konzept zum Vergleich von Risiken. Zum Vergleich und zur Quantifizierung von Risiken werden deshalb sog. **Risikomaße** verwendet, wie sie in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

Abschnitt 2.2

Kohärente Risikomaße

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Im letzten Abschnitt wurde erläutert, dass für einen Vergleich zweier Risiken X und Y , deren Verteilungsfunktionen F_X bzw. F_Y nicht geeignet sind.



Man ist daher an einer **reellwertigen Abbildung**

$$\boxed{\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X)} \quad (2)$$

interessiert, die den betrachteten Risiken $X \in \mathcal{M}$ jeweils eine Zahl

$$\rho(X) \in \mathbb{R}$$

zuordnet, welche als **Maß für das Gefahrenpotential von X** interpretiert werden kann. Dies ermöglicht einen einfachen Vergleich der betrachteten Risiken $X \in \mathcal{M}$ anhand der Werte $\rho(X) \in \mathbb{R}$. Solche Abbildungen (2) werden als **Risikomaße** bezeichnet.

Da hierbei jedoch viele Informationen über ein Risiko X verloren gehen, sollten nur Abbildungen ρ verwendet werden, die **sinnvolle mathematische und ökonomische Eigenschaften** aufweisen und die für die jeweilige Anwendung relevanten Informationen aus F_X extrahieren.

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Bekannte Beispiele für einfache Risikomaße $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \rho(X)$ sind die **Varianz**

$$\rho(X) := \text{Var}(X) = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right] \quad (3)$$

und die **Standardabweichung**

$$\rho(X) := \sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (4)$$

Seit den bahnbrechenden Arbeiten des US-amerikanischen Wirtschafts-Nobelpreisträgers H. MARKOWITZ (*1927) zur Portfoliotheorie sind dies die traditionellen Risikokennziffern in der Ökonomie.



Sie besitzen jedoch den **großen Nachteil**, dass sie bei den Ausprägungen von X nicht zwischen positiven und negativen Abweichungen von $\mathbb{E}[X]$ unterscheiden. D.h. große Werte von (3) und (4) können nicht als höheres Gefahrenpotential interpretiert werden, sondern können auch auf einer höheren Gewinnchance basieren.

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Folglich quantifizieren $\text{Var}(X)$ und $\sigma(X)$ nicht das für Risikomanager, Investoren, Aufsichtsämter und Ratingagenturen zentrale **Downside-** oder **Shortfall-Risiko**, sondern lediglich das Schwankungsverhalten von X um $\mathbb{E}[X]$.

Ferner werden durch $\text{Var}(X)$ und $\sigma(X)$ seltene negative Ereignisse, die erhebliche Auswirkungen auf das Ergebnis haben könnten, möglicherweise bei der Quantifizierung des Risikos nicht ausreichend berücksichtigt.

Von großer Bedeutung ist daher das 1999 von ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. & HEATH, D. in ihrer gemeinsamen Arbeit „*Coherent Measures of Risk*“ mit den Worten

„... these axioms should hold for any risk measure that is to be used to effectively regulate or manage risks.“

eingeführte Konzept der **kohärenten Risikomaße**.



2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Definition (Kohärentes Risikomaß)

Ein Risikomaß $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \rho(X)$ heißt kohärent, falls es den folgenden vier Axiomen genügt:

(A1) Monotonie, d.h. es gilt

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{M} \text{ mit } \mathbb{P}(X \leq Y) = 1.$$

(A2) Translationsinvarianz, d.h. es gilt

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c \quad \text{für alle } X \in \mathcal{M} \text{ und } c \in \mathbb{R}.$$

(A3) Positive Homogenität, d.h. es gilt

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \text{für alle } X \in \mathcal{M} \text{ und } \lambda > 0.$$

(A4) Subadditivität, d.h. es gilt

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{M}.$$

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Interpretation der Kohärenz-Axiome:

Monotonie: Führt Y stets zu einem höheren Verlust als X , dann ist Y risikoreicher als X und es wird folglich für Y ein höheres Risikokapital benötigt. Dieses Axiom ist weitgehend unstrittig.

Translationsinvarianz: Erhöht sich das Risiko X um einen deterministischen Wert c , dann erhöht sich auch das benötigte Risikokapital um den Wert c . Dieses Axiom ist ebenfalls weitgehend unstrittig. Insbesondere gilt

$$\rho(X - \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0.$$

Subadditivität: Das für $X + Y$ benötigte Risikokapital ist höchstens so hoch wie die Summe der Risikokapitalien für die Einzelrisiken X und Y . Dieses Axiom ist weitgehend unstrittig. Es soll zum einen Diversifikation belohnen und zum anderen verhindern, dass Unternehmen durch Aufsplittung ihrer Geschäftstätigkeit das benötigte Risikokapital reduzieren können.

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Positive Homogenität: Vervielfacht sich das Risiko X um den Faktor $\lambda > 0$ (z.B. durch Währungsumrechnung), dann vervielfacht sich auch das benötigte Risikokapital um den Faktor λ . Dieses Axiom wird in manchen Anwendungen kritisch gesehen, da Situationen existieren, in denen das benötigte Risikokapital nicht linear mit X ansteigt. Z.B. wird oft argumentiert, dass eine zu hohe Risikokonzentration oftmals zu Liquiditätsproblemen führt und deshalb für große $\lambda > 0$

$$\rho(\lambda X) > \lambda \rho(X)$$

gelten sollte.

Bemerkungen:

- Ist ρ das durch die **Aufsichtsbehörde** vorgegebene Risikomaß, dann stellt $\rho(X) \in \mathbb{R}$ das benötigte **Risikokapital** dar, welches das Unternehmen zum Halten des Risikos X nachweisen muss. D.h. das minimale Kapital, welches zum Ausgleichen von möglichen Verlusten im Risiko X benötigt wird.
- In der Literatur hat sich weitgehend die Auffassung durchgesetzt, dass ein Risikomaß das Downside-Risiko messen und kohärent sein sollte. Dabei besitzt die **Subadditivität** eine zentrale Bedeutung, da sie im Hinblick auf Eigenkapital- und Solvenzanforderungen als „*a natural and essential requirement*“ verstanden wird.

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Ein kohärentes Risikomaß besitzt plausible Eigenschaften für die Quantifizierung von Risiken. Daraus **folgt jedoch nicht**, dass umgekehrt ein kohärentes Risikomaß auch sinnvoll sein muss, wie z.B. das kohärente „Risikomaß“ $\rho(X) := \mathbb{E}[X]$ zeigt.
- In manchen Literaturquellen wird positive Homogenität als $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für $\lambda \geq 0$ definiert. Dies ist jedoch **äquivalent** zu $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ für $\lambda > 0$. Denn es gilt

$$\rho(0) = \rho(2 \cdot 0) = 2\rho(0)$$

und damit

$$\rho(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \text{für } \lambda \geq 0.$$

D.h. ein positiv homogenes Risikomaß ist stets auch **normalisiert**. Zusammen mit der Translationsinvarianz impliziert dies

$$\rho(c) = c \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Im folgenden Beispiel wird untersucht, welchen Axiomen das sog. **Standardabweichungsprinzip** genügt:

Beispiel (Eigenschaften des Standardabweichungsprinzips)

Das Standardabweichungsprinzip

$$\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha \sigma(X) \quad \text{mit } \alpha > 0$$

ist translationsinvariant, positiv homogen und subadditiv, aber nicht monoton.

Translationsinvarianz: Es seien $X \in \mathcal{M}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \rho(X + c) &= \mathbb{E}[X + c] + \alpha \sigma(X + c) \\ &= \mathbb{E}[X + c] + \alpha \sqrt{\text{Var}(X + c)} \\ &= \mathbb{E}[X] + \alpha \sqrt{\text{Var}(X)} + c = \rho(X) + c \end{aligned}$$

D.h. ρ ist translationsinvariant.

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

Positive Homogenität: Es seien $X \in \mathcal{M}$ und $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X) &= \mathbb{E}[\lambda X] + \alpha \sigma(\lambda X) \\ &= \lambda \mathbb{E}[X] + \lambda \alpha \sqrt{\text{Var}(X)} \\ &= \lambda (\mathbb{E}[X] + \alpha \sqrt{\text{Var}(X)}) = \lambda \rho(X)\end{aligned}$$

D.h. ρ ist positiv homogen.

Subadditivität: Für $X, Y \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Corr}(X, Y) \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} \\ &\leq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} \\ &= \left(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)} \right)^2\end{aligned}\tag{5}$$

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\rho(X + Y) &= \mathbb{E}[X + Y] + \alpha \sigma(X + Y) \\ &= \mathbb{E}[X + Y] + \alpha \sqrt{\text{Var}(X + Y)} \\ &\leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \alpha \left(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)} \right) = \rho(X) + \rho(Y)\end{aligned}$$

D.h. ρ ist auch subadditiv.

Monotonie: Um Nachzuweisen, dass ρ kein monotones Risikomaß ist, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben. Hierzu werden die beiden Risiken $X \sim \text{Ber}(p)$ und $Y = 1$ $\mathbb{P}$ -f.s. betrachtet. Für diese beiden Risiken gilt offensichtlich

$$Y \geq X \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{und} \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

2. Risikomaße

2.2 Kohärente Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

Daraus folgt

$$\rho(X) = p + \alpha\sqrt{p(1-p)} \quad \text{und} \quad \rho(Y) = 1.$$

Es sei nun $\alpha = 1$ gewählt. Dann gilt:

$$\rho(X) \begin{cases} = 1 = \rho(Y) & \text{für } p = 0,5 \\ > 1 = \rho(Y) & \text{für } p \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Da $\rho(X) = 1 = \rho(Y)$ für $p = 0,5$ klar ist, bleibt nur $\rho(X) > 1 = \rho(Y)$ für $p \in (1/2, 1)$ zu zeigen. Hierzu sei $p = \frac{1}{2} + \varepsilon$ für ein geeignetes $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Dann folgt:

$$\rho(X) = p + \sqrt{p(1-p)} = \frac{1}{2} + \varepsilon + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)} > \frac{1}{2} + \varepsilon + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2} = 1.$$

D.h. ρ ist nicht monoton und damit insbesondere auch kein kohärentes Risikomaß.

Abschnitt 2.3

Konvexe Risikomaße

2. Risikomaße

2.3 Konvexe Risikomaße

Wie im letzten Abschnitt bereits erwähnt, wird häufiger vorgeschlagen das Axiom der **positiven Homogenität** für große $\lambda > 0$ zugunsten der Eigenschaft

$$\boxed{\rho(\lambda X) > \lambda \rho(X)} \quad (6)$$

zu ersetzen, um so hohe Risikokonzentration zu bestrafen. Da jedoch für ein kohärentes Risikomaß aufgrund der **Subadditivität** stets

$$\begin{aligned} \rho(nX) &= \rho(X + (n-1)X) \leq \rho(X) + \rho((n-1)X) \\ &\leq \rho(X) + \rho(X) + \rho((n-2)X) \\ &\vdots \\ &\leq n\rho(X) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gilt, ist die Eigenschaft (6) innerhalb der Klasse der kohärenten Risikomaße nicht umzusetzen.

Dieser Sachverhalt hat zur Betrachtung der allgemeineren Klasse der **konvexen Risikomaße** geführt. Bei dieser größeren Klasse von Risikomaßen werden die beiden Axiome „Positive Homogenität“ und „Subadditivität“ durch das Axiom „**Konvexität**“ ersetzt:

2. Risikomaße

2.3 Konvexe Risikomaße

Definition (Konvexes Risikomaß)

Ein monotonen und translationsinvariantes Risikomaß $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, das zusätzlich noch die Konvexitätseigenschaft

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{M} \text{ und } \lambda \in [0, 1] \quad (7)$$

besitzt, heißt konvex.

Zwischen kohärenten und konvexen Risikomaßen gilt die folgende **Implikation**:

Satz (Kohärenz impliziert Konvexität)

Ein kohärentes Risikomaß $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch ein konvexes Risikomaß.

Beweis: Ein kohärentes Risikomaß ρ ist monoton und translationsinvariant. Aus der Subadditivität und positiven Homogenität eines kohärenten Risikomaßes ρ folgt ferner für alle $X, Y \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in [0, 1]$:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) = \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$$

D.h. ρ besitzt auch die Konvexitätseigenschaft (7) und ist damit ein konvexes Risikomaß. ■

2. Risikomaße

2.3 Konvexe Risikomaße

Bemerkungen:

- Innerhalb der Klasse der konvexen Risikomaße gibt es Risikomaße, die eine **hohe Risikokonzentration** durch $\rho(\lambda X) > \lambda \rho(X)$ für alle $\lambda > 1$ bestrafen, also nicht kohärent sind (siehe folgendes Beispiel).
- Da der **Erwartungswert** $\mathbb{E}[X]$ alle vier Kohärenzaxiome erfüllt, ist er auch ein konvexes „Risikomaß“.
- Aufgrund der fehlenden Monotonieeigenschaft ist das **Standardabweichungsprinzip** auch kein konvexes Risikomaß.

Das folgende Risikomaß ist **konvex**, aber nicht kohärent:

Beispiel (Konvexes Risikomaß)

Das folgende Risikomaß ist für alle $\alpha > 0$ ein konvexes Risikomaß:

$$\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha X}] \right)$$

2. Risikomaße

2.3 Konvexe Risikomaße

Beispiel (Konvexes Risikomaß)

Monotonie: Es seien $X, Y \in \mathcal{M}$ mit $X \leq Y$ $\mathbb{P}$ -f.s. Da die beiden Funktionen $\ln$ und $\exp$ streng monoton wachsend sind, folgt daraus

$$\rho(X) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha X}] \right) \leq \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha Y}] \right) = \rho(Y).$$

D.h. ρ ist monoton.

Translationsinvarianz: Es seien $X \in \mathcal{M}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \rho(X+c) &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha(X+c)}] \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha X}] e^{\alpha c} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha X}] \right) + c = \rho(X) + c \end{aligned}$$

D.h. ρ ist translationsinvariant.

Konvexität: Zum Nachweis der Konvexität wird die folgende nach dem deutschen Mathematiker OTTO L. HÖLDER (1859–1937) benannte Höldersche Ungleichung benötigt (vgl. BAUER (1998), Seite 85):

2. Risikomaße

2.3 Konvexe Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q} \quad \text{für alle } p, q \in [1, \infty] \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Damit erhält man für $\lambda \in [0, 1]$ mit $p = \frac{1}{\lambda}$ und $q = \frac{1}{1-\lambda}$:

$$\begin{aligned} \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E} \left[e^{\alpha(\lambda X + (1-\lambda)Y)} \right] \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E} \left[(e^{\alpha \lambda X}) (e^{\alpha(1-\lambda)Y}) \right] \right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E} [e^{\alpha \lambda X}]^{1/p} \mathbb{E} [e^{\alpha(1-\lambda)Y}]^{1/q} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E} [e^{\alpha X}]^\lambda \mathbb{E} [e^{\alpha Y}]^{1-\lambda} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E} [e^{\alpha X}] \right) + \frac{1-\lambda}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E} [e^{\alpha Y}] \right) \\ &= \lambda \rho(X) + (1-\lambda) \rho(Y) \end{aligned}$$

2. Risikomaße

2.3 Konvexe Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

D.h. das Risikomaß ρ besitzt auch die Konvexitätseigenschaft und ist damit insgesamt ein konvexes Risikomaß. Es ist jedoch nicht positiv homogen und damit insbesondere nicht kohärent. Denn wegen

$$\rho(\lambda X) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[e^{\alpha \lambda X}] \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[(e^{\alpha X})^\lambda] \right)$$

und der Tatsache, dass $f(x) = x^\lambda$ für $\lambda < 1$ streng konkav und für $\lambda > 1$ streng konvex ist, folgt mit der Jensenschen Ungleichung (vgl. z.B. IRLE (2001), Seiten 132–133)

$$\rho(\lambda X) \begin{cases} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[(e^{\alpha X})^\lambda] \right) = \lambda \rho(X) & \text{für } \lambda \in (0, 1) \\ > \frac{1}{\alpha} \ln \left(\mathbb{E}[(e^{\alpha X})^\lambda] \right) = \lambda \rho(X) & \text{für } \lambda > 1 \end{cases}.$$

D.h. bei diesem Risikomaß wächst das Risiko $\rho(\lambda X)$ für $\lambda > 1$ stärker als linear. Es wird deshalb häufig im Bankensektor zur Quantifizierung von Konzentrations- und Liquiditätsrisiken eingesetzt.

Abschnitt 2.4

Value-at-Risk

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Anfang der 90er Jahre schlugen eine Reihe von Finanzinstitutionen (J.P. Morgan, Bankers Trust, ...) mit dem **Value-at-Risk (VaR)** ein Risikomaß vor, das im Bankensektor schnell zum **Standard-Risikomaß** wurde. Seine Beliebtheit ist vor allem dadurch begründet, dass es bankenaufsichtsrechtlich (Basel II & III) anerkannt ist. Darüber hinaus ist der Value-at-Risk auch das Standard-Risikomaß im Rahmen von Solvency II.



Der **Value-at-Risk** zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ beantwortet die Frage:

„Wie groß ist der Verlust, der mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\varepsilon := 1 - q$ überschritten wird?“

Beim Value-at-Risk eines Risikos X zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ handelt es sich um das **q -Quantil** der Verteilungsfunktion F_X :

2. Risikomaße

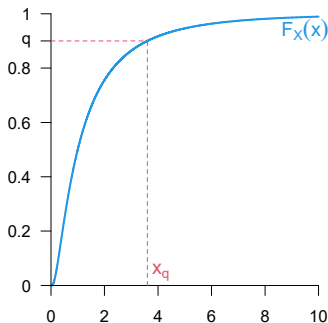
2.4 Value-at-Risk

Definition (Value-at-Risk)

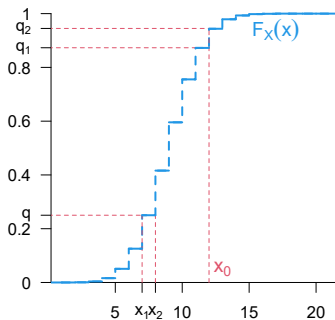
Der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ eines Risikos X ist definiert durch

$$\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{VaR}_q(X) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_X(x) \geq q\}.$$

Stetige Verteilungsfunktion



Diskrete Verteilungsfunktion



2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Für den Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ gilt:

$$q \leq \underbrace{\mathbb{P}(X \leq \text{VaR}_q(X))}_{=F_X(\text{VaR}_q(X))} \implies \mathbb{P}(X > \text{VaR}_q(X)) = 1 - F_X(\text{VaR}_q(X)) \leq 1 - q = \varepsilon.$$

D.h. die obige verbale Beschreibung des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist korrekt.

Bzgl. des Verlauf von F_X können die folgenden **drei Fälle** unterschieden werden:

- a) F_X ist stetig und streng monoton wachsend. Dann gibt es für alle $q \in (0, 1)$ stets genau ein x_q mit $F_X(x_q) = q$ und es gilt dann $\text{VaR}_q(X) = x_q$ (siehe obige Abbildung, links).
- b) F_X springt an der Stelle x_0 von q_1 auf q_2 . Dann gilt $\text{VaR}_q(X) = x_0$ für alle $q \in [q_1, q_2]$ (siehe obige Abbildung, rechts).
- c) F_X ist auf dem Intervall $[x_1, x_2)$ konstant gleich dem Wert q . Dann gilt $\text{VaR}_q(X) = x_1$ (siehe obige Abbildung, rechts).

Bemerkungen:

- In der Praxis liegt das Sicherheitsniveau q i.d.R. zwischen 90% und 99,99%. Zum Beispiel beträgt es 99% bei Basel III und 99,5% bei Solvency II. D.h. durch die **risikobasierten Eigenkapitalvorschriften Basel III** bzw. die **Solvabilitätsvorschriften Solvency II** soll jeweils sichergestellt werden, dass das Haftungskapital eines Kreditinstituts bzw. das Solvenzkapital eines Versicherungsunternehmens mit hinreichender Sicherheit ausreicht, nämlich mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% bzw. 99,5%, auftretende Verluste aufzufangen.
- Die Value-at-Risks zu den Sicherheitsniveaus 99% und 99,9% werden oft als **Jahrhundert-** bzw. **Jahrtausendereignis** bezeichnet. Bei dieser Interpretation ist jedoch Vorsicht geboten, da $\text{VaR}_{99\%}(X)$ und $\text{VaR}_{99,9\%}(X)$ lediglich jeweils die **untere Schranke** für ein solches Ereignis darstellen.
- Ist $\varepsilon = 1 - q$ die zugelassene **Insolvenzwahrscheinlichkeit**, dann gibt $\text{VaR}_q(X)$ die Höhe des **Sicherheitskapitals** an, das mindestens mit der Wahrscheinlichkeit q ausreichend hoch ist.

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Der Value-at-Risk ist ein **monetäres** Risikomaß, welches das Downside-Risiko misst und leicht verständlich ist.
- Der Value-at-Risk berücksichtigt das Risikopotential jenseits von $\text{VaR}_q(X)$ nicht. Er sollte daher nur verwendet werden, wenn die Vermeidung der Insolvenz und nicht die Höhe des Ausfalls im Falle einer Insolvenz von Bedeutung ist. Der Value-at-Risk trägt damit vor allem der stark eingeschränkten Haftung der **Shareholder** und des **Managements** Rechnung. Für **Solvency II** und den **SST** (Schweizer Solvenztest für Versicherungsunternehmen) ist er damit nicht geeignet, da dort der Schutz der **Versicherungsnehmer** und der **Geschädigten** im Mittelpunkt steht und somit auch die Höhe des Ausfalls im Falle einer Insolvenz erfasst werden sollte.
- Die meisten Risikomanager und Aktuarien vertreten die Meinung, dass zur Bestimmung des benötigten Solvenzkapitals bei Versicherungsunternehmen das Risikomaß **Expected Shortfall** (vgl. Abschnitt 2.5) besser geeignet ist als der Value-at-Risk.

2. Risikomaße

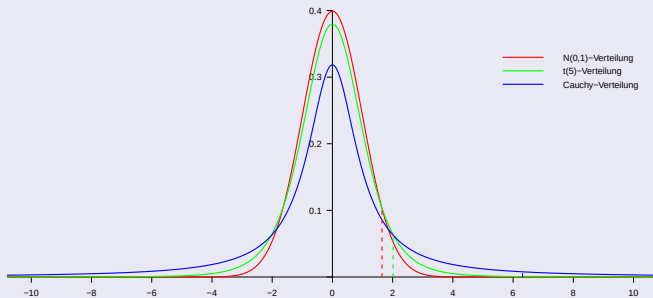
2.4 Value-at-Risk

Beispiel (Value-at-Risk der $N(0, 1)$ -, $t(5)$ - und Cauchy-Verteilung)

Der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 95% z.B. für die $N(0, 1)$ -, $t(5)$ - und Cauchy-Verteilung sind gegeben durch:

	$N(0, 1)$	$t(5)$	Cauchy
$\text{VaR}_{95\%}(X)$	1,645	2,015	6,314

$\text{VaR}_{0.95}(X)$ für drei stetige Verteilungsfunktionen



2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Beispiel (Value-at-Risk der $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung)

Die Verteilungsfunktion der $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung mit $\alpha, \lambda > 0$ ist gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da F_X stetig und streng monoton wachsend ist, erhält man den Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ durch Auflösen der Gleichung $F_X(x_q) = q$ nach x . Dies liefert:

$$x_q = \lambda(1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda$$

Der Value-at-Risk einer $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist somit gegeben durch

$$\text{VaR}_q(X) = \lambda(1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda. \quad (8)$$

Der Value-at-Risk genügt den folgenden **Kohärenzaxiomen**:

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Satz (Kohärenzeigenschaften des Value-at-Risk)

Der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist monoton, translationsinvariant und positiv homogen.

Beweis: Monotonie: Für $X \geq Y$ $\mathbb{P}$ -f.s. gilt

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(Y \leq x) = F_Y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt jedoch (vgl. vorletzte Abbildung)

$$\text{VaR}_q(X) \geq \text{VaR}_q(Y) \quad \text{für alle } 0 < q < 1.$$

Translationsinvarianz: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_{X+c}(z) = \mathbb{P}(X+c \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z-c) = F_X(z-c) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

D.h. $F_{X+c}(z)$ geht aus $F_X(z)$ durch Verschieben um c Einheiten nach rechts hervor. Dies impliziert jedoch (vgl. vorletzte Abbildung)

$$\text{VaR}_q(X+c) = \text{VaR}_q(X) + c \quad \text{für alle } 0 < q < 1.$$

Positive Homogenität: Für $\lambda > 0$ gilt:

$$F_{\lambda X}(z) = \mathbb{P}(\lambda X \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z/\lambda) = F_X(z/\lambda) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

D.h. $F_{\lambda X}(z)$ geht aus $F_X(z)$ durch Skalierung mit dem Faktor λ hervor. Daraus folgt jedoch (vgl. vorletzte Abbildung)

$$\text{VaR}_q(\lambda X) = \lambda \text{VaR}_q(X) \quad \text{für alle } 0 < q < 1.$$

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Das folgende Beispiel aus KLUGMAN ET AL. (2008) zeigt, dass der Value-at-Risk i.A. **nicht subadditiv** und damit insbesondere auch kein kohärentes Risikomaß ist.

Beispiel (Fehlende Subadditivität des Value-at-Risk)

Es sei Z eine Zufallsvariable mit streng monoton wachsender und stetiger Verteilungsfunktion F_Z sowie

$$F_Z(1) = 0,91, \quad F_Z(90) = 0,95 \quad \text{und} \quad F_Z(100) = 0,96.$$

D.h. es gilt (vgl. vorletzte Abbildung):

$$\text{VaR}_{95\%}(Z) = 90$$

Ferner lässt sich Z als Summe $Z = X + Y$ der beiden folgenden Zufallsvariablen darstellen

$$X := \begin{cases} Z & \text{für } Z \leq 100 \\ 0 & \text{für } Z > 100 \end{cases} \quad \text{und} \quad Y := \begin{cases} 0 & \text{für } Z \leq 100 \\ Z & \text{für } Z > 100 \end{cases}.$$

Dabei gilt für die Verteilungsfunktion von X :

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Beispiel (Fortsetzung)

$$F_X(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(Z \leq 1) + \mathbb{P}(Z > 100) = 0,91 + 0,04 = 0,95$$

$$F_X(90) = \mathbb{P}(X \leq 90) = \mathbb{P}(Z \leq 90) + \mathbb{P}(Z > 100) = 0,95 + 0,04 = 0,99$$

$$F_X(100) = \mathbb{P}(X \leq 100) = \mathbb{P}(Z \leq 100) + \mathbb{P}(Z > 100) = 0,96 + 0,04 = 1$$

Für die Verteilungsfunktion von Y gilt:

$$F_Y(0) = \mathbb{P}(Y \leq 0) = \mathbb{P}(Z \leq 100) = F_Z(100) = 0,96$$

Daraus folgt

$$\text{VaR}_{95\%}(X) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \text{VaR}_{95\%}(Y) \leq 0$$

und somit insbesondere

$$\text{VaR}_{95\%}(X + Y) = \text{VaR}_{95\%}(Z) = 90 > \text{VaR}_{95\%}(X) + \text{VaR}_{95\%}(Y).$$

D.h. der Value-at-Risk ist nicht subadditiv und damit insbesondere auch kein kohärentes Risikomaß.

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Generell gilt, dass die Subadditivität des Value-at-Risk im Falle von **sehr schiefen Verteilungen**, **Heavy-Tail-Verteilungen** und/oder **starker asymmetrischer Abhängigkeiten** zwischen den Zufallsvariablen (wie im letzten Beispiel) gefährdet ist.

Zur Modellierung von Renditen oder Risikofaktoren wird häufig die **multivariate Normalverteilung** (siehe hierzu auch Kapitel 8) verwendet. Der folgende Satz besagt, dass im Falle von normalverteilten Risiken der **Value-at-Risk auch subadditiv und damit insbesondere kohärent** ist. Genauer gilt:

Satz (Kohärenz des Value-at-Risk bei normalverteilten Risiken)

Der n -dimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ sei multivariat normalverteilt. Dann ist der Value-at-Risk für Sicherheitsniveaus $q \in [1/2, 1)$ bei Risiken aus der Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ Y : Y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ein kohärentes Risikomaß,

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

Beweis: Aufgrund des letzten Satzes ist für den Value-at-Risk lediglich noch die Subadditivität für Sicherheitsniveaus $q \in [1/2, 1)$ nachzuweisen.

Da $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ multivariat normalverteilt ist, gilt für $Y \in \mathcal{M}$ entweder $Y \in \mathbb{R}$ (d.h. Y ist deterministisch) oder Y ist eindimensional normalverteilt (vgl. Kapitel 8). Bezeichnet nun $\Phi^{-1}(q)$ das q -Quantil der (eindimensionalen) Standardnormalverteilung, dann sind die Value-at-Risks zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ zweier beliebiger Risiken $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$ und deren Summe $Y_1 + Y_2$ gegeben durch (vgl. erstes Beispiel in Abschnitt 2.5)

$$\text{VaR}_q(Y_i) = \mathbb{E}[Y_i] + \sqrt{\text{Var}(Y_i)}\Phi^{-1}(q) \quad \text{für } i = 1, 2 \quad \text{bzw.} \quad \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2) = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2] + \sqrt{\text{Var}(Y_1 + Y_2)}\Phi^{-1}(q).$$

Zusammen mit

$$\sqrt{\text{Var}(Y_1 + Y_2)} \leq \sqrt{\text{Var}(Y_1)} + \sqrt{\text{Var}(Y_2)}$$

(vgl. (5)) und $\Phi^{-1}(q) \geq 0$ für $q \in [1/2, 1)$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2) &= \mathbb{E}[Y_1 + Y_2] + \sqrt{\text{Var}(Y_1 + Y_2)}\Phi^{-1}(q) \\ &\leq \mathbb{E}[Y_1] + \sqrt{\text{Var}(Y_1)}\Phi^{-1}(q) + \mathbb{E}[Y_2] + \sqrt{\text{Var}(Y_2)}\Phi^{-1}(q) = \text{VaR}_q(Y_1) + \text{VaR}_q(Y_2) \end{aligned}$$

für $q \in [1/2, 1)$. Der Value-at-Risk ist somit für Sicherheitsniveaus $q \in [1/2, 1)$ und Risiken aus $\mathcal{M}$ subadditiv und damit insbesondere kohärent. ■

Dieses Resultat lässt sich noch auf die Klasse der **elliptischen Verteilungen** (vgl. Kapitel 8) verallgemeinern.

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

a) Parameterischer VaR-Schätzer:

Annahme: Die Verteilung des betrachteten Risikos X ist durch eine bestimmte parameterische Verteilung gegeben (z.B. $N(\mu, \sigma^2)$), sodass F_X bis auf einen oder mehrere Parameter vollständig spezifiziert ist. In diesem Fall erhält man einen Schätzer für den Value-at-Risk dadurch, dass in dem Ausdruck für den Value-at-Risk die unbekannten Parameter durch Schätzungen ersetzt werden. Zum Beispiel lautet für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ der **parameterische VaR-Schätzer**

$$\widehat{\text{VaR}}_q(X) := \hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(q)$$

(vgl. (11)).

b) Nichtparameterischer VaR-Schätzer:

Annahme: Für die Verteilung des betrachteten Risikos X liegen keine Informationen über eine bestimmte parameterische Verteilung vor. In diesem Fall wird der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ für eine gegebene Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ durch das „kleinste“ q -Quantil der **empirischen Verteilungsfunktion**

$$F_n(x) := \frac{\#\{x_i \leq x\}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(x_i) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

geschätzt.

2. Risikomaße

2.4 Value-at-Risk

D.h. der **nichtparameterische VaR-Schätzer** zum Sicherheitsniveau q ist gegeben durch

$$\widehat{\text{VaR}}_q(X) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_n(x) \geq q\}.$$

Ist zum Beispiel $x_{(1)} < \dots < x_{(1000)}$ eine geordnete Stichprobe, dann würde der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q = 0,99$ durch den elftgrößten x -Wert $x_{(990)}$ geschätzt werden.

Die **Kendall-Formel** besagt, dass für den nichtparameterischen VaR-Schätzer $\widehat{\text{VaR}}_q(X)$ unter relativ allgemeinen Annahmen und für hinreichend großes n näherungsweise

$$\widehat{\text{VaR}}_q(X) \sim N \left(\text{VaR}_q(X), \frac{q(1-q)}{nf_X(\text{VaR}_q(X))^2} \right)$$

gilt (vgl. LEHMANN (2004)).

Abschnitt 2.5

Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Im Vergleich zum Value-at-Risk liefert der **Expected-Shortfall** bessere Informationen über die **Stärke des rechten Tails** der Verteilung. D.h. er liefert eine Antwort auf die wichtige Frage:

„How bad is bad?“

Definition (Expected-Shortfall)

Der Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ eines Risikos X ist definiert durch

$$\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{ES}_q(X) := \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) \, du. \quad (9)$$

Offensichtlich gilt

$$\text{VaR}_q(X) \leq \text{ES}_q(X). \quad (10)$$

Der Expected-Shortfall macht im Gegensatz zum Value-at-Risk eine Aussage über die Höhe des **durchschnittlich zu erwartenden Extremereignisses**, falls es zu einem solchen kommt. Neben Expected-Shortfall sind für (9) auch die Bezeichnungen **Average Value-at-Risk** und **Conditional Value-at-Risk** gebräuchlich.

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Value-at-Risk und Expected-Shortfall der $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung)

Ein normalverteiltes Risiko $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right].$$

Im Folgenden sei ϕ und Φ die Dichte bzw. Verteilungsfunktion von $Z \sim N(0, 1)$. Der Value-at-Risk von Z zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist dann gegeben durch

$$\text{VaR}_q(Z) = \Phi^{-1}(q)$$

und $\mu + \sigma Z$ ist wie X auch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Aus den Eigenschaften Translationsinvarianz und positive Homogenität des Value-at-Risk folgt

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(X) &= \text{VaR}_q(\mu + \sigma Z) \\ &= \mu + \sigma \text{VaR}_q(Z) \\ &= \mu + \sigma \Phi^{-1}(q). \end{aligned} \tag{11}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Fortsetzung)

Für den Expected-Shortfall von X erhält man damit

$$\begin{aligned}\text{ES}_q(X) &= \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) \, du \\ &= \frac{1}{1-q} \int_q^1 (\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)) \, du \\ &= \mu + \frac{\sigma}{1-q} \int_q^1 \Phi^{-1}(u) \, du.\end{aligned}$$



Mit der Substitution $u = \Phi(x)$ bzw. $x = \Phi^{-1}(u)$ folgt

$$du = \phi(x) \, dx, \quad u_1 = q \longrightarrow x_1 = \Phi^{-1}(q) \quad \text{und} \quad u_2 = 1 \longrightarrow x_2 = \Phi^{-1}(1) = \infty$$

und für den Expected-Shortfall gilt somit

$$\text{ES}_q(X) = \mu + \frac{\sigma}{1-q} \int_{\Phi^{-1}(q)}^{\infty} x \phi(x) \, dx.$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Fortsetzung)

Mit $\phi'(x) = -x\phi(x)$ (nachrechnen) folgt daraus weiter

$$\begin{aligned}\text{ES}_q(X) &= \mu + \frac{\sigma}{1-q} \int_{\Phi^{-1}(q)}^{\infty} x\phi(x) dx \\ &= \mu - \frac{\sigma}{1-q} \int_{\Phi^{-1}(q)}^{\infty} \phi'(x) dx \\ &= \mu - \left(\frac{\sigma}{1-q} \phi(x) \right) \Big|_{\Phi^{-1}(q)}^{\infty} \\ &= \mu - \left(\frac{\sigma}{1-q} \phi(\infty) - \frac{\sigma}{1-q} \phi(\Phi^{-1}(q)) \right) = \mu + \frac{\sigma}{1-q} \phi(\Phi^{-1}(q)). \quad (12)\end{aligned}$$

D.h. für $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Risiken handelt es sich bei $\text{VaR}_q(X)$ und $\text{ES}_q(X)$ um Standardabweichungsprinzipien

$$\rho(X) = \mu + \beta\sigma$$

(vgl. erstes Beispiel in Abschnitt 2.2).

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Expected-Shortfall der $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung)

Im zweiten Beispiel des Abschnitts 2.4 wurde gezeigt, dass der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ bei einer $\text{Par}(\alpha, \lambda)$ -Verteilung durch

$$\text{VaR}_q(X) = \lambda(1 - q)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda \quad (13)$$

gegeben ist (vgl. (8)). Damit erhält man für den Expected-Shortfall:

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \frac{1}{1 - q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du \\ &= \frac{1}{1 - q} \int_q^1 \left(\lambda(1 - u)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda \right) du \\ &= \frac{\lambda}{1 - q} \left(-\frac{\alpha}{\alpha - 1} (1 - u)^{-\frac{1}{\alpha} + 1} \right) \Big|_q^1 - \lambda \\ &= 0 + \frac{\lambda}{1 - q} \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} (1 - q)^{-\frac{1}{\alpha} + 1} \right) - \lambda \end{aligned}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Fortsetzung)

Mit (13) folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned}\text{ES}_q(X) &= \lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} (1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} \right) - \lambda \\ &= \lambda \left(\frac{(\alpha-1)+1}{\alpha-1} (1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} \right) - \lambda \\ &= \lambda (1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda + \frac{\lambda (1-q)^{-\frac{1}{\alpha}} - \lambda + \lambda}{\alpha-1} \\ &= \text{VaR}_q(X) + \frac{\text{VaR}_q(X) + \lambda}{\alpha-1}\end{aligned}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Value-at-Risk und Expected-Shortfall der $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung)

Für die $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung gilt:

$$X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2) \iff Z = \ln(X) \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$$

Aus dem vorletzten Beispiel ist ferner bekannt, dass der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ eines $\text{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Risikos Z durch

$$\text{VaR}_q(Z) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(q)$$

gegeben ist. Für $q \in (0, 1)$ gilt ferner:

$$\mathbb{P}(Z \leq \text{VaR}_q(Z)) = q = \mathbb{P}(X \leq \text{VaR}_q(X)) = \mathbb{P}(\ln(X) \leq \ln(\text{VaR}_q(X)))$$

Wegen $\ln(X) \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ für $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ muss somit

$$\ln(\text{VaR}_q(X)) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(q) \quad \text{bzw.} \quad \text{VaR}_q(X) = e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(q)}$$

gelten.

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Fortsetzung)

Für den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ erhält man damit

$$\text{ES}_q(X) = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du = \frac{1}{1-q} \int_q^1 e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} du.$$

Mit der Substitution $u = \Phi(x)$ bzw. $x = \Phi^{-1}(u)$ folgt daraus weiter

$$du = \phi(x) dx, \quad u = q \longrightarrow x = \Phi^{-1}(q) \quad \text{und} \quad u = 1 \longrightarrow x = \Phi^{-1}(1) = \infty,$$

wobei $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist. Es gilt folglich

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \frac{1}{1-q} \int_q^1 e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(u)} du \\ &= \frac{1}{1-q} \int_{\Phi^{-1}(q)}^{\infty} e^{\mu + \sigma x} \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{1-q} e^{\mu + \sigma^2/2} \int_{\Phi^{-1}(q)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2} dx. \end{aligned}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Fortsetzung)

Mit der weiteren Substitution $y := x - \sigma$ bzw. $x = y + \sigma$ folgt

$$dx = dy, \quad x = \Phi^{-1}(q) \longrightarrow y = \Phi^{-1}(q) - \sigma \quad \text{und} \quad x = \infty \longrightarrow y = \infty$$

und zusammen mit der Symmetrie

$$1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$$

der Standardnormalverteilung liefert dies schließlich:

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \frac{1}{1-q} e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\Phi^{-1}(q)-\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{1-q} e^{\mu+\sigma^2/2} \left(1 - \Phi(\Phi^{-1}(q) - \sigma) \right) \\ &= \frac{1}{1-q} e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(q)) \end{aligned}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Der Expected-Shortfall liefert im Gegensatz zum Value-at-Risk nicht nur Informationen über die Stärke des rechten Tails der Verteilung, sondern besitzt zudem den Vorteil, dass er ein **kohärentes Risikomaß** ist:

Satz (Kohärenz des Expected-Shortfall)

Der Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist kohärent.

Beweis: Monotonie: Es gelte $X \geq Y$ $\mathbb{P}$ -f.s. Dann folgt aus der Monotonie des Value-at-Risk $\text{VaR}_q(X) \geq \text{VaR}_q(Y)$. Dies wiederum impliziert:

$$\text{ES}_q(X) = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du \geq \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(Y) du = \text{ES}_q(Y)$$

Translationsinvarianz: Es sei $c \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Translationsinvarianz des Value-at-Risk gilt $\text{VaR}_q(X+c) = \text{VaR}_q(X) + c$. Daraus folgt:

$$\text{ES}_q(X+c) = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X+c) du = \frac{1}{1-q} \int_q^1 (\text{VaR}_u(X) + c) du = \text{ES}_q(X) + c$$

Positive Homogenität: Es sei $\lambda > 0$. Dann folgt aus der positiven Homogenität des Value-at-Risk $\text{VaR}_q(\lambda X) = \lambda \text{VaR}_q(X)$. Dies liefert:

$$\text{ES}_q(\lambda X) = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(\lambda X) du = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \lambda \text{VaR}_u(X) du = \lambda \text{ES}_q(X)$$

Für die Eigenschaft der Subadditivität siehe z.B. MCNEIL ET AL. (2005), Seite 243.

Bemerkungen:

- Der Expected-Shortfall gibt Auskunft über die zu erwartende Verlusthöhe der $(1 - q) \cdot 100\%$ schlechtesten Fälle (siehe hierzu auch den übernächsten Satz). Er ist damit stärker auf die Interessen von **Aufsichtsämtern**, **Versicherungsnehmern** und **Gläubigern** ausgerichtet, die nicht nur an der Wahrscheinlichkeit eines Verlusts, sondern auch an dessen erwarteter Höhe interessiert sind.
- Der Expected-Shortfall wird im Vergleich zum Value-at-Risk von vielen Risikomanagern als das bessere Risikomaß angesehen (vor allem in der Versicherungsindustrie).

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Für den folgenden Satz wird die Zufallsvariable

$$(X - t)_+ := \max\{X - t, 0\} = \begin{cases} X - t & \text{falls } X \geq t \\ 0 & \text{falls } X < t \end{cases}$$

benötigt. Sie gibt an, um wieviel die Zufallsvariable X den **Schwellenwert (Threshold)** $t \in \mathbb{R}$ übersteigt. Ihr Erwartungswert

$$\pi_X(t) := \mathbb{E}[(X - t)_+]$$

wird als **Stop-Loss-Transformation** bezeichnet. Sie gibt in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den **erwarteten Überschreibungsbetrag** an.

Im Versicherungskontext wird t als **Selbstbehalt (Deductible)** bezeichnet und die Zufallsvariable $(X - t)_+$ spielt z.B. beim Pricing von Rückversicherungen (z.B. bei der Bestimmung von **Stop-Loss-Prämien**) eine wichtige Rolle.

Mit der Stop-Loss-Transformation erhält man den folgenden **Zusammenhang** zwischen Expected-Shortfall und Value-at-Risk:

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Satz (Zusammenhang Expected-Shortfall und Value-at-Risk)

Zwischen Expected-Shortfall und Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ eines Risikos X besteht der Zusammenhang

$$\text{ES}_q(X) = \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \pi_X(\text{VaR}_q(X)).$$

Beweis: Siehe BÄUERLE-MUNDT (2005), Seite 74 in Kombination mit ROCKAFELLAR-URYASEV (2002), 1454 ff.

Das folgende Beispiel zeigt, wie der Value-at-Risk und der Expected-Shortfall für Risiken mit **diskreter Verteilung** berechnet werden können:

Beispiel (Value-at-Risk und Expected-Shortfall für diskrete Verteilungen)

Das Risiko X besitze die diskrete Verteilungsfunktion F_X mit dem Träger

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 \cdots$$

und den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i > 0$. Der Value-at-Risk von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist dann gegeben durch

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}\text{VaR}_q(X) &= \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_X(x) \geq q\} \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\mathbb{P}(X \leq x) \geq q\} = \inf_{x_k \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=-\infty}^k p_i \geq q \right\}.\end{aligned}$$

Mit dem letzten Satz folgt daraus für den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}\text{ES}_q(X) &= \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \pi_X(\text{VaR}_q(X)) \\ &= \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \mathbb{E} \left[\max \{X - \text{VaR}_q(X), 0\} \right] \\ &= \text{VaR}_q(X) + \frac{1}{1-q} \sum_{x_i > \text{VaR}_q(X)} p_i (x_i - \text{VaR}_q(X))\end{aligned} \tag{14}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Im Falle eines Risikos mit **stetiger Verteilungsfunktion** gilt:

Satz (Expected-Shortfall für stetige Verteilungen)

Für den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ gilt im Falle eines Risikos X mit stetiger Verteilungsfunktion

$$\text{ES}_q(X) = \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_q(X)]. \quad (15)$$

Beweis: Da $F_X(x)$ nach Voraussetzung stetig ist, gilt

$$\text{ES}_q(X) = \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du = \frac{1}{\mathbb{P}(X > \text{VaR}_q(X))} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du. \quad (16)$$

Mit der Substitution $\text{VaR}_u(X) = x$ bzw. $u = F_X(\text{VaR}_u(X)) = F_X(x)$ folgt:

$$du = f_X(x) dx, \quad u = q \rightarrow x = \text{VaR}_q(X) \quad \text{und} \quad u = 1 \rightarrow x = \text{VaR}_1(X)$$

Damit erhält man:

$$\text{ES}_q(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(X > \text{VaR}_q(X))} \int_{\text{VaR}_q(X)}^{\text{VaR}_1(X)} x f_X(x) dx = \int_{\text{VaR}_q(X)}^{\text{VaR}_1(X)} x f_X(x | X > \text{VaR}_q(X)) dx = \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_q(X)] \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Im Falle eines Risikos X mit stetiger Verteilungsfunktion F_X und Dichtefunktion f_X gilt somit:

$$\text{ES}_q(X) = \int_{\text{VaR}_q(X)}^{\infty} x f_{X|X > \text{VaR}_q(X)}(x) dx = \frac{1}{1-q} \int_{\text{VaR}_q(X)}^{\infty} x f_X(x) dx$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Das Risikomaß

$$\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{CTE}_q(X) := \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_q(X)] \quad (17)$$

wird als **Conditional-Tail-Expectation** bezeichnet. Es beantwortet die Frage

„Wie hoch ist der zu erwartende Verlust in den $100(1 - q)\%$ schlechtesten Fällen?“

Neben Conditional-Tail-Expectation wird für (17) häufig auch die Bezeichnung **Tail-Value-at-Risk** verwendet.

Gemäß des letzten Satzes stimmen der Conditional-Tail-Expectation und der Expected-Shortfall für Risiken mit stetiger Verteilungsfunktion überein. D.h. der Conditional-Tail-Expectation ist für Risiken mit stetiger Verteilungsfunktion ein **kohärentes Risikomaß**.

Die Identität $\text{ES}_q(X) = \text{CTE}_q(X)$ für Risiken mit stetiger Verteilungsfunktion ist auch der Grund dafür, weshalb in der Literatur der Conditional-Tail-Expectation manchmal (fälschlicherweise) als Expected-Shortfall (und umgekehrt) bezeichnet wird.

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

Im allgemeinen stimmen jedoch Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation nicht überein. Denn im Falle von Risiken X mit diskreter Verteilungsfunktion F_X kann an einer **Unstetigkeitsstelle** $x_0 = \text{VaR}_q(X)$ von F_X auch

$$\mathbb{P}(X \leq \text{VaR}_q(X)) > q \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}(X > \text{VaR}_q(X)) < 1 - q$$

gelten (vgl. hierzu auch Abschnitt 2.4). Anstelle von (16) erhält man dann:

$$\begin{aligned} \text{ES}_q(X) &= \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du \\ &< \frac{1}{\mathbb{P}(X > \text{VaR}_q(X))} \int_q^1 \text{VaR}_u(X) du \\ &= \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_q(X)] \\ &= \text{CTE}_q(X) \end{aligned} \tag{18}$$

D.h. im Allgemeinen gilt nur die **Ungleichung**:

$$\boxed{\text{ES}_q(X) \leq \text{CTE}_q(X)} \tag{19}$$

2. Risikomaße

2.5 Expected-Shortfall und Conditional-Tail-Expectation

a) Parameterischer CTE-Schätzer:

Annahme: Die Verteilung des betrachteten Risikos X ist durch eine bestimmte parameterische Verteilung gegeben (z.B. $N(\mu, \sigma^2)$), sodass F_X bis auf einen oder mehrere Parameter vollständig spezifiziert ist. In diesem Fall erhält man einen Schätzer für den Conditional-Tail-Expectation dadurch, dass in dem Ausdruck für den Conditional-Tail-Expectation die unbekannten Parameter durch Schätzungen ersetzt werden. Zum Beispiel lautet für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ der **parameterische CTE-Schätzer** (vgl. (12) und letzten Satz):

$$\widehat{\text{CTE}}_q(X) = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{1-q} \phi\left(\Phi^{-1}(q)\right)$$

b) Nichtparameterischer CTE-Schätzer:

Annahme: Für die Verteilung des betrachteten Risikos X liegen keine Informationen über eine bestimmte parameterische Verteilung vor. In diesem Fall kann der Conditional-Tail-Expectation zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ durch den Mittelwert der $n - \lceil n \cdot q \rceil$ größten Beobachtungen geschätzt werden. D.h. ist $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ eine geordnete Stichprobe und $\lceil y \rceil := \min \{k \in \mathbb{N} : k \geq y\}$, dann ist ein nichtparameterischer CTE-Schätzer zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ gegeben durch

$$\widehat{\text{CTE}}_q(X) = \frac{1}{n - \lceil n \cdot q \rceil} \sum_{i=\lceil n \cdot q \rceil+1}^n x_{(i)}.$$

Abschnitt 2.6

Distortion-Risikomaße

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Neben der Klasse der kohärenten Risikomaße und der Klasse der konvexen Risikomaße (vgl Abschnitte 2.2 und 2.3) haben sich die 1996 von S. S. WANG eingeführten **Distortion-Risikomaße** zu einer weiteren bedeutenden Klasse von Risikomaßen entwickelt. Wie sich zeigen wird, ist ein Distortion-Risikomaß unter bestimmten Voraussetzungen **kohärent**. Darüber hinaus gehören z.B. der Value-at-Risk und der Expected-Shortfall zu dieser Klasse von Risikomaßen.



Ausgangspunkt für die Definition von Distortion-Risikomaßen ist der folgende Satz:

Satz (Erwartungswert einer nichtnegativen Zufallsvariablen)

Für den Erwartungswert einer nichtnegativen Zufallsvariablen X gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx. \quad (20)$$

Beweis: Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} t dF_X(t) = \int_0^{\infty} \int_0^t dx dF_X(t) = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} dF_X(t) dx = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx. \quad \blacksquare$$

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Bemerkung: Für eine allgemeine (nicht notwendigerweise nichtnegative) Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx. \quad (21)$$

Zur Definition von Distortion-Risikomaßen wird das Konzept der „**Distortion-Funktion**“ benötigt, das auf YAARI (1987) zurückgeht:

Definition (Distortion-Funktion)

Eine monoton wachsende Funktion

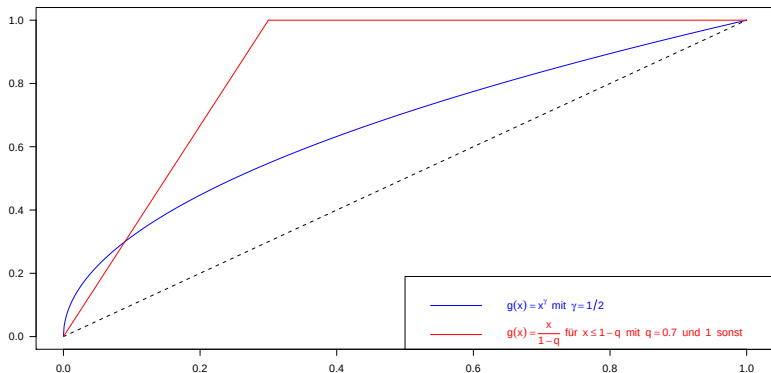
$$g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g(1) = 1$$

heißt Distortion-Funktion.

Die folgende Abbildung zeigt zwei typische Distortion-Funktionen:

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße



Distortion-Risikomaße lassen sich für allgemeine Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ definieren. Im Folgenden werden jedoch Distortion-Risikomaße ausschließlich für **nichtnegative** Zufallsvariablen X betrachtet. D.h. es wird

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$$

vorausgesetzt.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Dies führt zur folgenden Definition:

Definition (Distortion-Risikomaß)

Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable und g eine Distortion-Funktion. Dann heißt

$$\rho_g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx \quad (22)$$

Distortion-Risikomaß bzgl. der Distortion-Funktion g .

Für den Spezialfall $g(x) = x$ resultiert aus (22) der **gewöhnliche Erwartungswert**

$$\rho_g(X) = \mathbb{E}[X]$$

(vgl. (20)). Für $X = 0$ $\mathbb{P}$ -f.s. gilt $F_X(x) = 1$ für $x \geq 0$. Zusammen mit $g(0) = 0$ folgt daraus

$$\rho_g(0) = \int_0^\infty g(0) dx = 0.$$

D.h. Distortion-Risikomaße sind stets **normalisiert**.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Bemerkungen:

- Für allgemeine (nicht notwendigerweise nichtnegative) Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ lassen sich Distortion-Risikomaße mittels (21) definieren.
- Durch die Distortion-Funktion g werden die **Tail-Wahrscheinlichkeiten**

$$1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

zu

$$g(1 - F_X(x))$$

„**verzerrt/deformiert**“ (engl. distorted) bevor der Erwartungswert (22) berechnet wird.

- Anstelle von Distortion-Risikomaß wird für (22) häufig auch die Bezeichnung **Wang-Risikomaß** verwendet.
- Im Unterschied zur **Erwartungsnutzentheorie** (vgl. Kapitel 2 im Skript zur Bachelor-Vorlesung „Einführung in das Quantitative Risikomanagement“) werden bei der Bestimmung von Distortion-Risikomaßen nicht die Ausprägungen von Risiken/Zufallsvariablen modifiziert, sondern die Wahrscheinlichkeiten für diese Ausprägungen „verzerrt/deformiert“.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Die Funktion

$$1 - g(1 - F_X(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (23)$$

besitzt die folgenden Eigenschaften:

- a) Sie ist **monoton wachsend**. Denn $1 - F_X(x)$ und $1 - g(x)$ sind monoton fallend.
- b) Sie ist **rechtsseitig stetig**, falls g zusätzlich stetig ist. Denn F_X ist als Verteilungsfunktion rechtsseitig stetig und somit auch (23).
- c) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - g(1 - F_X(x))) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - g(1 - F_X(x))) = 1.$$

⇒ Im Falle einer stetigen Distortion-Funktion g ist (23) die Verteilungsfunktion einer **risikoadjustierten Zufallsvariablen** $\tilde{X}$. Das Distortion-Risikomaß (22) ist somit der Erwartungswert von $\tilde{X}$ mit der „verzerrten/deformierten“ Verteilungsfunktion

$$F_{\tilde{X}}(x) = 1 - g(1 - F_X(x)) \quad (24)$$

aufgefasst werden:

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^\infty 1 - (1 - g(1 - F_X(x))) dx = \int_0^\infty 1 - F_{\tilde{X}}(x) dx = \mathbb{E}[\tilde{X}]$$

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Verzerrte Verteilungsfunktion bei exponentieller Distortion-Funktion)

Die Funktion

$$g(x) = \frac{1 - \exp(-\alpha x)}{1 - \exp(-\alpha)} \quad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

besitzt die Eigenschaften $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ sowie

$$g'(x) = \frac{\alpha \exp(-\alpha x)}{1 - \exp(-\alpha)} > 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D.h. g ist für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Distortion-Funktion. Das Distortion-Risikomaß $\rho_g(X)$ ist der Erwartungswert der risikoadjustierten Zufallsvariablen $\tilde{X}$ mit der verzerrten Verteilungsfunktion

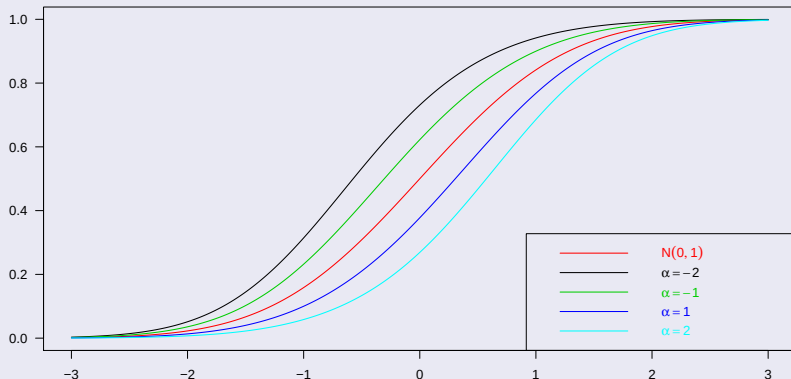
$$F_{\tilde{X}}(x) = 1 - g(1 - F_X(x)) = 1 - \frac{1 - \exp(-\alpha(1 - F_X(x)))}{1 - \exp(-\alpha)}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die Verteilungsfunktionen F_X von $X \sim N(0, 1)$ und $F_{\tilde{X}}$ von $\tilde{X}$ für $\alpha = -2, -1, 1, 2$.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)



Für $\alpha > 0$ gilt offensichtlich $F_{\tilde{X}}(x) \leq F_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. $\tilde{X}$ dominiert X stochastisch (vgl. Abschnitt 2.1) und ist damit risikoreicher als X .

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Distortion-Risikomaß für $X \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ und $g(x) = x^\gamma$)

Es gelte $X \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ mit $\alpha, \lambda > 0$ sowie $g(x) = x^\gamma$ mit $\gamma \in (0, 1]$ (vgl. vorletzte Abbildung). Mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und (24) erhält man dann

$$F_{\tilde{X}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^\gamma = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\gamma\alpha} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

D.h. es gilt $\tilde{X} \sim \text{Par}(\gamma\alpha, \lambda)$ und für $\gamma \in (1/\alpha, 1)$ folgt $1 < \gamma\alpha < \alpha$ und somit

$$\rho_g(X) = \mathbb{E}[\tilde{X}] = \frac{\lambda}{\gamma\alpha - 1} > \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \mathbb{E}[X]. \quad (25)$$

Die risikoadjustierte Zufallsvariable $\tilde{X}$ ist somit für $\gamma \in (1/\alpha, 1)$ im Vergleich zu X mit einem positiven Sicherheitszuschlag versehen.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Distortion-Risikomaße besitzen die folgende **alternative Darstellung**:

Satz (Alternative Darstellung eines Distortion-Risikomaßes)

Ein Distortion-Risikomaß ρ_g besitzt die alternative Darstellung

$$\rho_g(X) = \int_0^1 \text{VaR}_{1-u}(X) dg(u). \quad (26)$$

Beweis: Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge bei Riemann-Stieltjes-Integralen erhält man

$$\begin{aligned} \rho_g(X) &= \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{1-F_X(x)} dg(u) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\text{VaR}_{1-u}(X)} dx dg(u) \\ &= \int_0^1 \text{VaR}_{1-u}(X) dg(u). \end{aligned}$$

■

Mit Hilfe dieses Resultats lässt sich leicht nachweisen, dass Distortion-Risikomaße die folgenden **Kohärenzeigenschaften** besitzen:

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Satz (Kohärenzeigenschaften eines Distortion-Risikomaßes)

Ein Distortion-Risikomaß ρ_g ist monoton, translationsinvariant und positiv homogen.

Beweis: Da der Value-at-Risk monoton, translationsinvariant und positiv homogen ist (vgl. ersten Satz in Abschnitt 2.4) und ein Distortion-Risikomaß gemäß des letzten Satzes eine gewichtete Summe von Value-at-Risks zu verschiedenen Sicherheitsniveaus ist, besitzt auch ein Distortion-Risikomaß diese drei Kohärenzeigenschaften. Gilt zum Beispiel $X \geq Y$ $\mathbb{P}$ -f.s., dann folgt aus der Monotonie des Value-at-Risk $\text{VaR}_q(X) \geq \text{VaR}_q(Y)$ für alle $q \in (0, 1)$. Dies impliziert unmittelbar

$$\rho_g(X) = \int_0^1 \text{VaR}_{1-u}(X) dg(u) \geq \int_0^1 \text{VaR}_{1-u}(Y) dg(u) = \rho_g(Y),$$

also die Monotonie von ρ_g . Analog zeigt man, dass ρ_g auch translationsinvariant und positiv homogen ist. ■

Das Resultat (25) gilt ganz allgemein für alle Distortion-Risikomaße bzgl. Distortion-Funktionen g mit der Eigenschaft $g(x) \geq x$ für $x \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}[\tilde{X}] = \rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx \geq \int_0^\infty 1 - F_X(x) dx = \mathbb{E}[X].$$

D.h. eine Distortion-Funktion g , die stets nicht unter der ersten Winkelhalbierenden $h(x) = x$ liegt, führt zu einem Distortion-Risikomaße mit **nichtnegativen Sicherheitszuschlag**. Dies ist insbesondere der Fall, wenn g **konkav** ist, also

$$g''(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

gilt, falls g zweimal differenzierbar ist.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Durch eine konkave Distortion-Funktion g wird dem rechten Tail der Verteilung von X **mehr Wahrscheinlichkeitsmasse** zugewiesen. Dieser Ansatz ähnelt der Berechnung von Prämien in der Lebensversicherung, wo aus Sterbetafeln 2. Ordnung (erwartete Sterbewahrscheinlichkeiten) durch Hinzufügen von nichtnegativen Sicherheitszuschlägen konservativere Sterbetafeln 1. Ordnung konstruiert werden.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen Distortion-Risikomaßen und **kohärenten Risikomaßen** her:

Satz (Kohärenz eines Distortion-Risikomaßes)

Ein Distortion-Risikomaß ρ_g bzgl. der Distortion-Funktion g ist genau dann subadditiv und damit insbesondere kohärent, wenn g konkav ist.

Beweis: Gemäß des letzten Satzes ist ρ_g monoton, translationsinvariant und positiv homogen. Es ist daher nur noch nachzuweisen, dass ρ_g subadditiv ist. Für den Nachweis dieser Eigenschaft siehe z.B. DENUIT ET AL. (2005) Seiten 90–91. ■

Dieser Satz liefert eine Technik, mit der kohärente Risikomaße konstruiert werden können (siehe hierzu z.B. DELBAEN (2000)).

Im Folgenden wird gezeigt, dass der **Value-at-Risk** und der **Expected-Shortfall** zur Klasse der Distortion-Risikomaße gehören, wobei beim Value-at-Risk die Distortion-Funktion g nicht konkav und beim Expected-Shortfall dagegen konkav ist.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Value-at-Risk ist ein Distortion-Risikomaß)

Der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist ein Distortion-Risikomaß zur Distortion-Funktion $g(x) = 1_{\{1-q \leq x \leq 1\}}(x)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} g(1 - F_X(x)) &= \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq 1 - F_X(x) < 1 - q \\ 1 & \text{für } 1 - q \leq 1 - F_X(x) \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } q < F_X(x) \leq 1 \\ 1 & \text{für } 0 \leq F_X(x) \leq q \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } x > \text{VaR}_q(X) \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq \text{VaR}_q(X) \end{cases}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^{\text{VaR}_q(X)} 1 dx = \text{VaR}_q(X)$$

Da g nicht konkav ist, ist der Value-at-Risk nicht subadditiv (kohärent).

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Expected-Shortfall ist ein Distortion-Risikomaß)

Der Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist ein Distortion-Risikomaß zur Distortion-Funktion $g(u) = \min \left\{ \frac{u}{1-q}, 1 \right\}$. Es gilt:

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u}{1-q} & \text{für } 0 \leq u \leq 1-q \\ 1 & \text{für } 1-q < u \leq 1 \end{cases}$$

Zusammen mit (26) liefert dies:

$$\begin{aligned} \rho_g(X) &= \int_0^1 \text{VaR}_{1-u}(X) dg(u) \\ &= \int_0^{1-q} \text{VaR}_{1-u}(X) d\frac{u}{1-q} + \int_{1-q}^1 \text{VaR}_{1-u}(X) d1 \\ &= \int_0^{1-q} \text{VaR}_{1-u}(X) d\frac{u}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q} \int_0^{1-q} \text{VaR}_{1-u}(X) du \end{aligned}$$

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

Mit der Variablentransformation $1 - u = v$ bzw. $u = 1 - v$ folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned}\rho_g(X) &= \frac{1}{1-q} \int_0^{1-q} \text{VaR}_{1-u}(X) du \\ &= -\frac{1}{1-q} \int_1^q \text{VaR}_v(X) dv \\ &= \frac{1}{1-q} \int_q^1 \text{VaR}_v(X) dv \\ &= \text{ES}_q(X)\end{aligned}$$

Da g konkav ist (vgl. vorletzte Abbildung), ist der Expected-Shortfall subadditiv und kohärent.

In den folgenden drei Beispielen wird gezeigt, wie mittels des letzten Satzes **kohärente Risikomaße** konstruiert werden können.

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Distortion-Risikomaß mit exponentieller Distortion-Funktion)

Betrachtet wird wieder die Distortion-Funktion

$$g(x) = \frac{1 - \exp(-\alpha x)}{1 - \exp(-\alpha)} \quad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

aus dem ersten Beispiel dieses Abschnitts. Wegen

$$g''(x) = \frac{-\alpha^2 \exp(-\alpha x)}{1 - \exp(-\alpha)} < 0 \quad \text{für } \alpha > 0$$

ist g für alle $\alpha > 0$ konkav und folglich ist

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-\alpha(1 - F_X(x)))}{1 - \exp(-\alpha)} dx$$

für alle $\alpha > 0$ ein kohärentes Risikomaß.

Zwei ebenfalls bekannte **kohärente Distortion-Risikomaße** resultieren, wenn als Distortion-Funktion g die **Wang-Transformation** oder die **PH-Transformation** gewählt wird:

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Distortion-Risikomaße bzgl. der Wang-Transformation)

Die Distortion-Funktion

$$g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \alpha) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

wird als **Wang-Transformation** bezeichnet. Wie man zeigen kann, gilt $g''(x) \leq 0$ für alle $\alpha \geq 0$. D.h. sie ist für $\alpha \geq 0$ konkav und damit ist

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^\infty \Phi(\Phi^{-1}(1 - F_X(x)) + \alpha) dx$$

ein kohärentes Risikomaß für $\alpha \geq 0$. Im Falle einer normal- oder lognormalverteilten Zufallsvariablen X besitzt die risikoadjustierte Zufallsvariable $\tilde{X}$ eine Verteilung aus der gleichen Verteilungsfamilie. Für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ erhält man z.B.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

und damit

$$1 - F_X(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

Somit folgt:

$$\begin{aligned}F_{\tilde{X}}(x) &= 1 - g(1 - F_X(x)) \\&= 1 - \Phi \left(\Phi^{-1} \left(\Phi \left(-\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right) + \alpha \right) \\&= 1 - \Phi \left(\left(-\frac{x - \mu}{\sigma} \right) + \alpha \right) \\&= 1 - \Phi \left(-\frac{x - (\mu + \alpha\sigma)}{\sigma} \right) \\&= \Phi \left(\frac{x - (\mu + \alpha\sigma)}{\sigma} \right)\end{aligned}$$

D.h. es gilt $\tilde{X} \sim N(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$ und somit $\rho_g(X) = \mathbb{E}[\tilde{X}] = \mu + \alpha\sigma$.

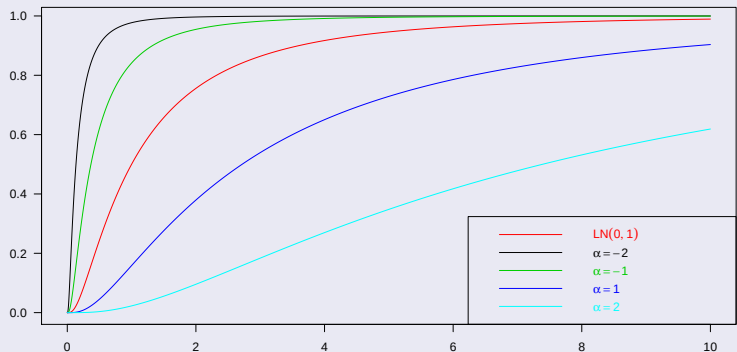
Gilt $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$, dann erhält man weitgehend analog $\tilde{X} \sim \text{LN}(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$ und folglich $\rho_g(X) = \mathbb{E}[\tilde{X}] = e^{\mu + \alpha\sigma + \sigma^2/2}$ (siehe Übungsaufgaben).

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Fortsetzung)

Die folgende Abbildung zeigt die Verteilungsfunktionen F_X von $X \sim \text{LN}(0, 1)$ und $F_{\tilde{X}}$ von $\tilde{X} \sim \text{LN}(\alpha, 1)$ für $\alpha = -2, -1, 1, 2$.



Für $\alpha > 0$ gilt wieder $F_{\tilde{X}}(x) \leq F_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. $\tilde{X}$ dominiert X stochastisch (vgl. Abschnitt 2.1) und ist damit risikoreicher als X .

2. Risikomaße

2.6 Distortion-Risikomaße

Beispiel (Distortion-Risikomaße bzgl. der PH-Transformation)

Die Distortion-Funktion

$$g(x) = x^\gamma \quad \text{mit } \gamma \in (0, 1]$$

wird als **Proportional Hazard-Transformation (PH-Transformation)** bezeichnet. Wie man zeigen kann, gilt $g''(x) \leq 0$ für alle $\gamma \in (0, 1]$. D.h. sie ist für $\gamma \in (0, 1]$ konkav (vgl. erste Abbildung in diesem Abschnitt) und damit ist

$$\rho_g(X) = \int_0^\infty g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^\infty (1 - F_X(x))^\gamma dx \quad (27)$$

ein kohärentes Risikomaß.

Wird (27) speziell zur Prämienberechnung eingesetzt, spricht man auch von **Proportional Hazard-Prämienprinzip**.

Abschnitt 2.7

Delta-Normal-Methode

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Die **Delta-Normal-Methode** wurde 1994 von der Investmentbank J.P. MORGAN eingeführt und dient zur Berechnung des **Value-at-Risk** und **Expected-Shortfall** eines **Portfolios** unterschiedlicher Finanztitel.



Betrachtet wird ein **Portfolio** $\mathcal{P}$ aus n Finanztiteln (z.B. Aktien, Anleihen, Optionen, Forwards, Futures, Swaps, Währungen) mit den **Portfolioanteilen**

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n)^T.$$

Die Werte der n Finanztitel im Zeitpunkt t sind gegeben durch die Zufallsvariablen

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T.$$

Annahme: Die Werte $X_1(t), \dots, X_n(t)$ hängen von m zufälligen **Risikofaktoren**

$$\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$$

ab (z.B. Zinssatz, Wechselkurs, Aktienkurs, Aktienindex, Rohstoffpreis, Volatilität).
D.h. es gilt

$$X_i(t) = f_i(\mathbf{Z}(t)) \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

wobei $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare **Bewertungsfunktionen** sind.

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Beispiel (Bewertungsfunktion einer europäischen Call-Option)

Der Wert einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt t ist im berühmten **Black-Scholes-Modell** (Wirtschaftsnobelpreis 1997 für M. SCHOLES (*1941) und R. MERTON (*1944)) durch



$$X(t) = f(r, \sigma, S_t) := S_t \Phi(d_1) - K \exp(-r(T^* - t)) \Phi(d_2)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sigma \sqrt{T^* - t}} + \frac{\sqrt{T^* - t}}{\sigma} \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T^* - t}$$

gegeben, wobei K der Ausübungspreis, $T^* > t$ der Ausübungszeitpunkt, S_t der Kurs des Underlyings zum Zeitpunkt t , r der risikolose Zinssatz und σ die Volatilität des Underlyings ist.

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Exkurs: Ein m -dimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ heißt multivariat normalverteilt (kurz: $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$), wenn er die Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (28)$$

besitzt mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ und einer positiv definiten $(m \times m)$ -Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$. Dabei gilt

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}.$$

D.h. $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ sind der Erwartungswertvektor bzw. die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$. Für die Verteilung der affin-lineare Transformation $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ gilt dann

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim N(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T) \quad (29)$$

(vgl. Kapitel 8). D.h. die affin-lineare Transformation $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ ist wieder multivariat normalverteilt und die beiden Parameter $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$ verändern sich zu $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T$. Dieser Sachverhalt wird bei der im Folgenden dargestellten Delta-Normal-Methode mehrfach ausgenutzt.

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Die **Delta-Normal-Methode** basiert auf den beiden folgenden **zentralen Annahmen**:

- 1) Für den Vektor $\Delta \mathbf{Z} := (\Delta Z_1, \dots, \Delta Z_m)^T$ bestehend aus den Wertveränderungen

$$\Delta Z_k := Z_k(T) - Z_k(0)$$

der m Risikofaktoren im Zeitraum $[0, T]$ gilt:

$$\Delta \mathbf{Z} \sim N(T\boldsymbol{\mu}, T\boldsymbol{\Sigma})$$

- 2) Die Wertveränderungen

$$\Delta X_i := X_i(T) - X_i(0) = f_i(\mathbf{Z}(T)) - f_i(\mathbf{Z}(0))$$

der n Finanztitel im Zeitraum $[0, T]$ können durch eine **Taylor-Entwicklung 1. Ordnung** um $\mathbf{Z}(0)$ approximiert werden:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= f_i(\mathbf{Z}(0) + \Delta \mathbf{Z}) - f_i(\mathbf{Z}(0)) \\ &\approx \text{grad} f_i(\mathbf{Z}(0)) \Delta \mathbf{Z} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_k}}_{\text{Sensitivität}} \cdot \underbrace{\Delta Z_k}_{\text{Delta}} \end{aligned} \quad (30)$$

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Für $\Delta \mathbf{X} := (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n)^T$ liefert dies die Approximation

$$\Delta \mathbf{X} \approx \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \Delta \mathbf{Z}$$

mit der **Jacobi-Matrix (Fundamental-Matrix)**

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) = \begin{pmatrix} \text{grad} f_1(\mathbf{Z}(0)) \\ \vdots \\ \text{grad} f_n(\mathbf{Z}(0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_m} \end{pmatrix}.$$

Mit (29) liefert dies für die **Verteilung des Vektors $\Delta \mathbf{X}$** :

$$\Delta \mathbf{X} \sim \mathcal{N}\left(T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\mu}, T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T\right) \quad (31)$$

Die Wertveränderung des gesamten Portfolios $\mathcal{P}$ im Zeitraum $[0, T]$ beträgt

$$\boldsymbol{\pi}^T \Delta \mathbf{X} = \sum_{k=1}^n \Delta X_k \pi_k.$$



2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Erneute Anwendung von (29) liefert die **Verteilung von $\pi^T \Delta \mathbf{X}$** :

$$\pi^T \Delta \mathbf{X} \sim N\left(T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\mu}, T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T \pi\right).$$

Zusammen mit (11) erhält man für den **Value-at-Risk von $\pi^T \Delta \mathbf{X}$** den Ausdruck:

$$\text{VaR}_q(\pi^T \Delta \mathbf{X}) = T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\mu} + \sqrt{T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T \pi} \Phi^{-1}(q)$$

Mit

$$\mathbf{X}(T) = \Delta \mathbf{X} + \mathbf{X}(0)$$

sowie (31) und (29) erhält man für die **Verteilung des Vektors $\mathbf{X}(T)$** mit den Werten der n Finanztitel zum Zeitpunkt T :

$$\mathbf{X}(T) \sim N\left(T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}(0), T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T\right)$$

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Durch erneute Anwendung von (29) erhält man, dass die **Verteilung des Portfolio-werts** $\pi^T \mathbf{X}(T)$ zum Zeitpunkt $t = T$ durch

$$\pi^T \mathbf{X}(T) \sim N \left(T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\mu} + \pi^T \mathbf{X}(0), T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T \pi \right) \quad (32)$$

gegeben ist. Der **Value-at-Risk des Portfoliowerts** $\pi^T \mathbf{X}(T)$ beträgt somit:

$$\text{VaR}_q \left(\pi^T \mathbf{X}(T) \right) = T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\mu} + \pi^T \mathbf{X}(0) + \sqrt{T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T \pi} \Phi^{-1}(q)$$

Die **Delta-Normal-Methode** weist für den praktischen Einsatz eine Reihe von Vorzügen auf:

- Für die Anwendung der Delta-Normal-Methode werden nur der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$, die Varianz-Kovarianz-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$, der Zeithorizont T , die Sensitivitäten $\frac{\partial f_i(\mathbf{Z}_k(0))}{\partial Z_k}$ und die Portfolioanteile π_i benötigt.
- Unter den Annahmen der Delta-Normal-Methode ist der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveaus $q \in [0, 5; 1)$ **kohärent** (vgl. letzter Satz in Abschnitt 2.4).
- Der Value-at-Risk kann sehr leicht bzgl. unterschiedlich langer Betrachtungszeiträume $[0, T]$ skaliert werden.

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Beispiel (Delta-Normal-Methode)

Im Folgenden sei $\mathcal{P}$ ein Portfolio aus drei Zero-Bonds mit dem Nominalwert € 1'000'000, den Laufzeiten $j = 1, 2, 3$ und den Anteilen $\pi = (1, 1, -2)^T$. Die Risikofaktoren $Z_j(t)$ der drei Finanztitel sind gegeben durch die zum Zeitpunkt t gültigen j -jährigen logarithmierten Renditen $R_j(t)$. D.h. es gilt $Z_j(t) := \ln(R_j(t))$.

PORTFOLIO 

Die Werte der drei Finanztitel $j = 1, 2, 3$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} X_j(t) &= f_j(\mathbf{Z}(t)) = 1000000 \exp(-R_j(t)(j-t)) \\ &= 1000000 \exp(-e^{Z_j(t)}(j-t)) \end{aligned}$$

und der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ beträgt somit

$$\pi^T \mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^3 \pi_j X_j(t) = 1000000 \sum_{j=1}^3 \pi_j \exp(-R_j(t)(j-t)).$$

Für die j -jährigen Renditen $R_j(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte

$$R_1(0) = 0,023, \quad R_2(0) = 0,028 \quad \text{und} \quad R_3(0) = 0,032.$$

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Beispiel (Fortsetzung)

Die Komponenten des Vektors $\Delta \mathbf{Z} = (\Delta Z_1, \Delta Z_2, \Delta Z_3)^T$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta Z_j &:= Z_j(T) - Z_j(0) \\ &= \ln(R_j(T)) - \ln(R_j(0)) \\ &= \ln\left(\frac{R_j(T)}{R_j(0)}\right).\end{aligned}\tag{33}$$

Dabei sei $T := \frac{1}{250}$ Jahr (entspricht einem Geschäftstag). Für die Deltas $\Delta Z_1, \Delta Z_2, \Delta Z_3$ werde angenommen, dass sie näherungsweise Normal-verteilt sind. Genauer gelte

$$\Delta \mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, T\Sigma),$$

wobei die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ gegeben ist durch

$$\Sigma := \begin{pmatrix} 0,01 & 0,0096 & 0,0091 \\ 0,0096 & 0,0144 & 0,0125 \\ 0,0091 & 0,0125 & 0,0169 \end{pmatrix}.$$

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Beispiel (Fortsetzung)

Für die Sensitivitäten erhält man nach kurzer Rechnung

$$\frac{\partial f_j(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_j} = -R_j(0)jX_j(0) \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_j(\mathbf{Z}(0))}{\partial Z_k} = 0 \quad \text{für } j \neq k.$$

Damit erhält man für die Gradienten

$$\text{grad}f_1(\mathbf{Z}(0)) = (-R_1(0)X_1(0), 0, 0) = (-22477, 0, 0)$$

$$\text{grad}f_2(\mathbf{Z}(0)) = (0, -2R_2(0)X_2(0), 0) = (0, -52950, 0)$$

$$\text{grad}f_3(\mathbf{Z}(0)) = (0, 0, -3R_3(0)X_3(0)) = (0, 0, -87213)$$

und somit die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) = \begin{pmatrix} -22477 & 0 & 0 \\ 0 & -52950 & 0 \\ 0 & 0 & -87213 \end{pmatrix}.$$

Für den Erwartungswert und die Standardabweichung (Volatilität) des Portfolio-wertes $\pi^T \mathbf{X}(T)$ zum Zeitpunkt T erhält man mit (32) für $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$:

2. Risikomaße

2.7 Delta-Normal-Methode

Beispiel (Fortsetzung)

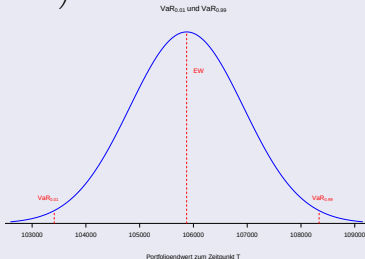
$$\mathbb{E} \left[\pi^T \mathbf{X}(T) \right] = \pi^T \mathbf{X}(0) = 105874$$

$$\sqrt{\text{Var}(\pi^T \mathbf{X}(T))} = \sqrt{T \pi^T \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0)) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{J}_f(\mathbf{Z}(0))^T \pi} = 1058,67.$$

Der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 1% und 99% ist gegeben durch:

$$\text{VaR}_{1\%}(\pi^T \mathbf{X}(T)) = 105874 + 1058,67 \Phi^{-1}(0,01) = 103411$$

$$\text{VaR}_{99\%}(\pi^T \mathbf{X}(T)) = 105874 + 1058,67 \Phi^{-1}(0,99) = 108337$$



Abschnitt 2.8

Literatur

2. Risikomaße

2.8 Literatur



ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance, 9/3, 203–228.



BAUER, H. (1998). *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter.



BÄUERLE, N., MUNDT, A. (2005). *Risikomanagement*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH.



DELBEAN, F. (2000). *Coherent Risk Measures*. Cattedra Galileiana. Pisa.



DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M., KAAS, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Wiley.



GEORGII, H.-O. (2002). *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. De Gruyter.

2. Risikomaße

2.8 Literatur



IRLE, A. (2001). *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik: Grundlagen - Resultate - Anwendungen*. Vieweg+Teubner.



LEHMANN, E. L. (2004). *Elements of Large-Sample Theory*. Springer.



MCNEIL, A. J., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Press.



YAARI, M. (1987). *The Dual Theory of Choice under Risk*. *Econometrica*, 55/1, p. 95–115.



ROCKAFELLAR, R. T., URYASEV, S. (2002). *Conditional value-at-risk for general loss distributions*. *Journal of Banking & Finance*, 26, p. 1443–1471.