

Quantitatives Risikomanagement 1

WS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg



Kapitel 3

Allokationsverfahren

Abschnitt 3.1

Einleitung

3. Allokationsverfahren

3.1 Einleitung

Vor allem Versicherungen & Banken sind gesetzlich dazu verpflichtet ein ausreichend hohes **Risikokapital** vorzuhalten, welches als **Puffer** gegen unerwartete Verluste dient und (mit hoher Wahrscheinlichkeit) den Fortbestand des Unternehmens auch in schwierigen Perioden sicherstellen soll. Die Höhe des Risikokapitals einer Versicherung oder Bank ist daher für Aufsichtsämter, Versicherungsnehmer, Investoren, Ratingagenturen und Wirtschaftsprüfer von großer Bedeutung.



Da auf das Risikokapital aufgrund von gesetzlichen Regelungen nur eine **geringe Rendite** erwirtschaftet werden kann, ist das Vorhalten von möglichst viel Risikokapital nicht wirtschaftlich und es besteht folglich ein **Zielkonflikt** zwischen Sicherheit und Rendite. Für Versicherungen und Banken stellt sich daher die Aufgabe, diese „Last“ in Form von ruhendem Kapital den einzelnen Geschäftsbereichen, wie z.B.

- Branchen,
- Regionen,
- Vertriebswege,
- Produkte/Produktgruppen,
- Profitcenter usw.

möglichst fair zuzuordnen.

3. Allokationsverfahren

3.1 Einleitung

Zu diesem Zweck existieren **Allokationsverfahren**, welche das Risikokapital auf die einzelnen Geschäftsbereiche gemäß ihrem Beitrag am unternehmerischen Gesamtrisiko aufteilen. Dabei soll der **Abhängigkeitsstruktur** zwischen den Bereichen, d.h. den **Diversifikationseffekten**, möglichst gut Rechnung getragen werden.

Die Allokation des Risikokapitals auf einzelne Geschäftsbereiche wird u.a. für die folgenden Aufgabenstellungen benötigt:

- Identifikation von Risikotreibern
- Performancemessung von Geschäftsbereichen
- Preis- und Prämienkalkulation (die Prämie sollte die Risikoexponiertheit eines Geschäftsbereichs berücksichtigen)
- Erfolgsabhängige Vergütung von Managern
- Bewertung von Geschäftsbereichen nach Rendite-Risiko-Aspekten
- Übertragung der Unternehmensziele auf Geschäftsbereiche (Top-Down-Approach)

D.h. die Allokation des Risikokapitals ist eine wichtige Voraussetzung für eine **wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung**.

3. Allokationsverfahren

3.1 Einleitung

Fundamentales Problem aller Allokationsverfahren:

- a) Bei der Allokation von Risikokapital handelt es sich um eine Aufschlüsselung von **Gemeinkosten** für das Unternehmen als Ganzes.
- b) Es gibt Risiken **ohne eine klare Zuordnung zu einem einzelnen Geschäftsreich**, da sie auf mehrere Geschäftsbereiche ausstrahlen (z.B. Reputationsrisiko, Terroranschlag auf die Zentrale).

Aufgrund von b) ist die Zuordnung der Risiken auf einzelne Geschäftsbereiche stets ein Teil der Modellierung bei der Risikokapitalallokation und somit stets mit einer gewissen „Willkür“ behaftet. In manchen Fällen kann es daher auch sinnvoll sein, einen eigenen Geschäftsbereich „Corporate“ zu definieren, dem die Risiken zugewiesen werden, die einem einzelnen Geschäftsbereich nur schwer zuzordnen sind.

Diese stets vorhandene „Willkür“ muss bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden. Sie ist auch der Grund, weshalb mehrere **konkurrierende Allokationsverfahren mit unterschiedlichen Eigenschaften** existieren und sich bisher kein Verfahren als das „beste Verfahren“ durchsetzen konnte.

Abschnitt 3.2

Kohärente Allokationsverfahren

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Das Ziel eine Kapitalallokation ist eine möglichst **faire** und **konsistente Aufteilung** des Gesamtrisikokapitals auf die einzelnen Geschäftsbereiche. Es wurden daher verschiedene wünschenswerte Kriterien/Eigenschaften für Allokationsverfahren vorgeschlagen, welche dies sicherstellen sollen.

Im Folgenden repräsentiere

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

das **Risiko des Gesamtunternehmens** und

$$X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}$$

die **Risiken seiner n Geschäftsbereiche**. Positive (negative) Vorzeichen von X_i stehen dabei wieder für Verluste (Gewinne).

Die Risikostruktur des Unternehmens ist durch die **n -dimensionale Verteilungsfunktion**

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad \text{von} \quad \mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)^T$$

vollständig beschrieben. Da jedoch $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ in der Praxis nicht bekannt ist, werden bei den folgenden Allokationsverfahren keine Annahmen über $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ bzw. über die Abhängigkeiten zwischen $X_1, \dots, X_n$ getroffen.

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Mittels eines **Risikomaßes** $\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ erhält man mit

$$\boxed{\text{RK}(X) := \rho(X)} \quad (1)$$

das **Risikokapital für das Gesamtunternehmen**. Dieses Kapital soll mit Hilfe eines Allokationsverfahrens aufgeteilt werden, so dass die resultierenden **Risikokapitalien für die n Geschäftsbereiche**

$$\boxed{\text{RK}(X_1), \dots, \text{RK}(X_n)} \quad (2)$$

eine möglichst faire und konsistent Aufteilung des Gesamtrisikokapitals (1) darstellen.

Werden die Risikokapitalien (2) unabhängig voneinander berechnet, d.h. wird

$$\text{RK}(X_i) := \rho(X_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (3)$$

gesetzt, dann spricht man von **Stand-alone-Verfahren**. Dieses einfache Vorgehen ist jedoch nicht sinnvoll, da auf diese Weise die **Abhängigkeitsstruktur** zwischen den n Geschäftsbereichen nicht berücksichtigt wird.

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Bei Verwendung eines subadditiven Risikomaßes ρ gilt

$$\rho(X) = \rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \rho(X_i)$$

(vgl. Abschnitt 2.2), so dass bei Verwendung eines subadditiven Risikomaßes ρ stets ein **nichtnegativer Diversifikationseffekt**

$$\boxed{D(X_1, \dots, X_n) := \sum_{i=1}^n \rho(X_i) - \rho(X) \geq 0,} \quad (4)$$

entsteht. Dieser Diversifikationseffekt soll mittels eines Allokationsverfahrens unter Berücksichtigung der verschiedenen Abhängigkeiten zwischen den n Geschäftsbereichen möglichst fair und konsistent auf die Geschäftsbereiche verteilt werden.

Da jedoch der Diversifikationseffekt(4) erst auf Gesamtunternehmensebene durch Interaktion der einzelnen Risiken entsteht, ist eine vollkommen objektive und faire Aufteilung nicht möglich. Ein brauchbares Allokationsverfahren sollte jedoch zumindest den spezifischen Beiträgen der n Geschäftsbereiche am Gesamtrisiko Rechnung tragen und mit den **Zielen des Gesamtunternehmens** vereinbar sein.

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Beispiel (Diversifikationseffekt)

Betrachtet wird ein Versicherungsunternehmen mit den drei Branchen Feuerversicherung mit Risiko X_1 , Wasserschadenversicherung mit Risiko X_2 und Fahrradversicherung mit Risiko X_3 .

Zur Vereinfachung der Rechnungen wird (realitätsfern) angenommen, dass der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ multivariat normalverteilt ist. Da bei der Lösung eines Brandes oft auch Wasserschäden entstehen, wird weiter angenommen, dass die beiden Risiken X_1 und X_2 positiv korreliert sind mit dem Korrelationskoeffizienten 0,5. Das Risiko X_3 sei jedoch stochastisch unabhängig von X_1 und X_2 . Die Korrelationsmatrix von $\mathbf{X}$ ist somit gegeben durch

$$\text{Corr} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Erwartungswerte und die Standardabweichungen der drei Einzelrisiken von $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ gelte

$$\mu_{\mathbf{X}} = (10, 5, 5)^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\mathbf{X}} = (12; 2,5; 7,5)^T.$$

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Beispiel (Fortsetzung)

Wegen $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Corr}(X_i, X_j)\sigma(X_i)\sigma(X_j)$ erhält man für die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 144 & 15 & 0 \\ 15 & 6,25 & 0 \\ 0 & 0 & 56,25 \end{pmatrix}$$

Das Risiko $X = \sum_{i=1}^3 X_i$ des Gesamtunternehmens ist somit (eindimensional) normalverteilt mit

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 20$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (1, 1, 1)\Sigma(1, 1, 1)^T \\ &= 144 + 6,25 + 56,25 + 2 \cdot 15 = 236,5. \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Beispiel (Fortsetzung)

Wird als Risikomaß ρ der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q = 0,99$ gewählt, erhält man mit $\Phi^{-1}(0,99) \approx 2,33$ für das Gesamtrisikokapital $RK(X)$ und die drei Stand-alone-Risikokapitalien $RK(X_i)$ die folgenden Werte (vgl. erstes Beispiel in Abschnitt 2.5):

$$RK(X) = \text{VaR}_{0,99}(X) = \mathbb{E}[X] + \sqrt{\text{Var}(X)}\Phi^{-1}(0,99) \approx 20 + 2,33\sqrt{236,5} \approx 55,83$$

$$RK(X_1) = \text{VaR}_{0,99}(X_1) = \mathbb{E}[X_1] + \sqrt{\text{Var}(X_1)}\Phi^{-1}(0,99) \approx 10 + 2,33 \cdot 12 = 37,96$$

$$RK(X_2) = \text{VaR}_{0,99}(X_2) = \mathbb{E}[X_2] + \sqrt{\text{Var}(X_2)}\Phi^{-1}(0,99) \approx 5 + 2,33 \cdot 2,5 \approx 10,83$$

$$RK(X_3) = \text{VaR}_{0,99}(X_3) = \mathbb{E}[X_3] + \sqrt{\text{Var}(X_3)}\Phi^{-1}(0,99) \approx 5 + 2,33 \cdot 7,5 \approx 22,48$$

Der Diversifikationseffekt (4) beträgt somit:

$$\begin{aligned} D(X_1, X_2, X_3) &= \sum_{i=1}^n RK(X_i) - RK(X) \\ &= 20 + 2,33 \cdot 22 - \left(20 + 2,33\sqrt{236,5}\right) \approx 15,43 > 0 \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Der Begriff **Allokationsverfahren** ist wie folgt definiert:

Definition (Allokationsverfahren)

Es sei $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Risikomaß. Dann wird eine Abbildung

$$\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{X} \mapsto (\text{RK}(X_1), \dots, \text{RK}(X_n))^T$$

mit

$$\sum_{i=1}^n \text{RK}(X_i) = \text{RK}(X) \quad \text{für } \text{RK}(X) := \rho(X) \quad \text{und} \quad X = \sum_{i=1}^n X_i \quad (5)$$

als Allokationsverfahren (bzgl. des Risikomaßes ρ) bezeichnet.

Die Eigenschaft (5) heißt **vollständige Allokation** und stellt sicher, dass das Gesamtrisikokapital $\text{RK}(X)$ vollständig auf die n Geschäftsbereiche aufgeteilt wird und die Aufteilung von $\text{RK}(X)$ **Top-Down** erfolgt.

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Durch die obige Definition eines Allokationsverfahrens wird jedoch noch keine faire und konsistente Aufteilung des Gesamtrisikokapitals $RK(X)$ sichergestellt. Um diesem Ziel ein Stück näher zu kommen, werden in DENAULT (2001) für Allokationsverfahren die folgenden drei **Kohärenzaxiome** formuliert, die sich an den vier Kohärenzaxiomen für kohärente Risikomaße orientieren (vgl. Abschnitt 2.2).



In DENAULT (2001) werden diese Kohärenzaxiome mit den Worten

„... a set of axioms, which we argue are necessary properties of a reasonable allocation principle.“

eingeführt.

Allokationsverfahren, welchen diesen drei Axiomen genügen, werden als **kohärente Allokationsverfahren** bezeichnet:

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Definition (Kohärentes Allokationsverfahren)

Ein Allokationsverfahren $\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto (\text{RK}(X_1), \dots, \text{RK}(X_n))^T$ heißt kohärent (bzgl. des Risikomaßes ρ), falls es den folgenden drei Axiomen genügt:

(A1) Symmetrie:

$$\rho \left(\sum_{i \in M} X_i + X_j \right) = \rho \left(\sum_{i \in M} X_i + X_k \right) \quad (6)$$

für alle $M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\} \implies \text{RK}(X_j) = \text{RK}(X_k)$

(A2) No undercut:

$$\text{RK}(X_i) \leq \rho(X_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (7)$$

(A3) Risikolose Allokation: $\text{RK}(X_i) = \rho(c)$ für alle $X_i = c$ $\mathbb{P}$ -f.s. mit $c \in \mathbb{R}$

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Interpretation der Kohärenz-Axiome:

Symmetrie: Wenn zwei Geschäftsbereiche j und k stets in gleicher Höhe zum Risiko eines beliebigen Segments $M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}$ des Gesamtunternehmens beitragen, wird ihnen das gleiche Risikokapital zugewiesen.

Die Bedingung (6) ist z.B. erfüllt, wenn die beiden Risiken X_i und X_j **austauschbar** (**exchangeable**) sind. D.h. wenn die beiden Zufallsvektoren

$$(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) \quad \text{und} \quad (X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

dieselbe n -dimensionale Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ besitzen. Denn in diesem Fall haben die beiden Risiken X_i und X_j die gleiche Verteilung und weisen auch die gleiche Abhängigkeitsstruktur zu den restlichen $n - 2$ Risiken des Gesamtunternehmens auf.

No undercut: Diese Eigenschaft entspricht der **Subbadditivität** bei Risikomaßen (vgl. Abschnitt 2.2). Das einem einzelnen Geschäftsbereich i zugeordnete Risikokapital $RK(X_i)$ ist nicht höher als das Risikokapital, das er für sich alleine benötigen würde (vgl. (3)). Wenn die Eigenschaft (7) nicht gilt, ist es für den Geschäftsbereich i sinnvoll sich vom Gesamtunternehmen abzuspalten. D.h. es besteht ein Anreiz zur Antidiversifikation.

3. Allokationsverfahren

3.2 Kohärente Allokationsverfahren

Risikolose Allokation: Ein Geschäftsbereich i , der ein deterministisches „Risiko“ c darstellt, bekommt den Betrag $\rho(c)$ als Risikokapital zugewiesen. Im Falle eines **positiven** und **translationsinvarianten Risikomaßes** ρ gilt $\rho(c) = c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt 2.2) und damit

$$\text{RK}(X_i) = c \quad \text{für alle } X_i = c \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s. mit } c \in \mathbb{R}.$$

Einem Geschäftsbereich i mit einem deterministischen Risiko c wird somit genau dieser Wert als Risikokapital zugeordnet.

Abschnitt 3.3

Proportionale Allokation

3. Allokationsverfahren

3.3 Proportionale Allokation

Die **proportionale Allokation** ist ein sehr einfaches und intuitives Allokationsverfahren. Bei diesem Verfahren wird das Gesamttrisiko­kapital $\text{RK}(X) = \rho(X)$ auf die n Geschäftsbereiche im Verhältnis der Größe ihrer Stand-alone-Risiko­kapitalien $\rho(X_i)$ verteilt (vgl. (3)). D.h. es gilt:

Definition (Proportionale Allokation)

Die proportionale Allokation $\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto (\text{RK}(X_1), \dots, \text{RK}(X_n))^T$ ist definiert durch

$$\text{RK}(X_i) := \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} \rho(X) \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Der Wert

$$\lambda_i := \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (9)$$

wird als **i -ter Allokationsfaktor** bezeichnet. Er gibt den Anteil am Gesamttrisiko­kapital $\text{RK}(X) = \rho(X)$ an, der dem i -ten Geschäftsbereich zugeordnet wird.

3. Allokationsverfahren

3.3 Proportionale Allokation

Bemerkungen:

- Für die Allokationsfaktoren λ_i gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

D.h. bei diesem Verfahren handelt es sich um eine **vollständige Allokation** (vgl. (5)).

- Der Diversifikationseffekt (4) wird **proportional** zu den Stand-alone-Risikokapitalien $\rho(X_i)$ auf die n Geschäftsbereiche aufgeteilt. D.h. es erfolgt keine gerechte Aufteilung des Diversifikationseffektes. Die **Abhängigkeitsstruktur** zwischen den Geschäftsbereichen wird bei der Aufteilung des Gesamtrisikokapitals $RK(X) = \rho(X)$ nicht berücksichtigt. Eventuell vorhandene **risiko-erhöhende Abhängigkeiten** eines Geschäftsbereichs zum Restunternehmen werden nicht durch erhöhte Kapitalzuweisungen sanktioniert und umgekehrt werden wünschenswerte **negative Abhängigkeiten** nicht honoriert.

3. Allokationsverfahren

3.3 Proportionale Allokation

Die proportionale Allokation genügt den folgenden **Kohärenzaxiomen**:

Satz (Kohärenzeigenschaften der proportionalen Allokation)

Die proportionale Allokation ist symmetrisch und besitzt im Falle eines subadditiven Risikomaßes ρ auch die No undercut-Eigenschaft. Sie ist jedoch nur im Falle eines additiven Risikomaßes ρ , d.h. wenn $\rho(Y+Z) = \rho(Y) + \rho(Z)$ für alle $Y, Z \in \mathcal{M}$ gilt, eine risikolose Allokation.

Beweis: Symmetrie: Aus

$$\rho\left(\sum_{i \in M} X_i + X_j\right) = \rho\left(\sum_{i \in M} X_i + X_k\right) \quad (10)$$

mit $M = \emptyset$ folgt $\rho(X_j) = \rho(X_k)$. Eingesetzt in (8) liefert dies $RK(X_j) = RK(X_k)$.

No undercut: Es gilt für alle $M \subseteq \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{i \in M} RK(X_i) = \sum_{i \in M} \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} \rho(X)$$

Im Falle eines subadditiven Risikomaßes ρ gilt $\rho(X) \leq \sum_{j=1}^n \rho(X_j)$. Daraus folgt:

$$\sum_{i \in M} RK(X_i) \leq \sum_{i \in M} \rho(X_i)$$

Mit $M = \{i\}$ folgt daraus weiter $RK(X_i) \leq \rho(X_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$.

3. Allokationsverfahren

3.3 Proportionale Allokation

Beweis (Fortsetzung): Risikolose Allokation: Für $X_i = c$ $\mathbb{P}$ -f.s. mit $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\rho(c)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} \rho(X)$$

D.h. es gilt $\text{RK}(X_i) = \rho(c)$ genau dann, wenn $\rho(X) = \sum_{j=1}^n \rho(X_j)$, also wenn ρ additiv ist. ■

Beispiel (Proportionale Allokation)

Es wird wieder die Situation aus dem letzten Beispiel betrachtet. Bei Verwendung des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 99% als Risikomaß ρ erhält man mit dem proportionalen Allokationsverfahren die folgenden Risikokapitalien:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_1) &= \frac{\text{VaR}_{0,99}(X_1)}{\text{VaR}_{0,99}(X_1) + \text{VaR}_{0,99}(X_2) + \text{VaR}_{0,99}(X_3)} \text{VaR}_{0,99}(X) \\ &= \frac{10 + 2,33 \cdot 12}{20 + 2,33 \cdot 22} \left(20 + 2,33 \sqrt{236,5} \right) \approx 29,74 \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.3 Proportionale Allokation

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_2) &= \frac{\text{VaR}_{0,99}(X_2)}{\text{VaR}_{0,99}(X_1) + \text{VaR}_{0,99}(X_2) + \text{VaR}_{0,99}(X_3)} \text{VaR}_{0,99}(X) \\ &= \frac{5 + 2,33 \cdot 2,5}{20 + 2,33 \cdot 22} \left(20 + 2,33 \sqrt{236,5} \right) \approx 8,48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_3) &= \frac{\text{VaR}_{0,99}(X_3)}{\text{VaR}_{0,99}(X_1) + \text{VaR}_{0,99}(X_2) + \text{VaR}_{0,99}(X_3)} \text{VaR}_{0,99}(X) \\ &= \frac{5 + 2,33 \cdot 7,5}{20 + 2,33 \cdot 22} \left(20 + 2,33 \sqrt{236,5} \right) \approx 17,61 \end{aligned}$$

Abschnitt 3.4

Inkrementelle Allokation

3. Allokationsverfahren

3.4 Inkrementelle Allokation

Das **inkrementelle Allokationsverfahren** wird auch als **diskretes Marginalprinzip** bezeichnet. Es ist wie folgt definiert:

Definition (Inkrementelle Allokation)

Die inkrementelle Allokation $\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto \text{RK}(\mathbf{X})$ ist definiert durch $\text{RK}(X_1) := \rho(X_1)$ und

$$\text{RK}(X_i) := \rho\left(\sum_{j=1}^i X_j\right) - \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j\right) \quad \text{für } i = 2, \dots, n.$$

Bei diesem Verfahren wird ausgehend von

$$\text{RK}(X_1) = \rho(X_1)$$

durch **sukzessive Hinzunahme** eines weiteren Geschäftsbereichs das dadurch zusätzlich induzierte Risiko den einzelnen Geschäftsbereichen als Risikokapital zugewiesen. Auf diese Weise werden bestehende Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Geschäftsbereichen berücksichtigt.

Bei der inkrementellen Allokation handelt es sich offensichtlich um eine **vollständige Allokation** (vgl. (5)).

3. Allokationsverfahren

3.4 Inkrementelle Allokation

Dieses Vorgehen besitzt jedoch den **erheblichen Nachteil**, dass die resultierende Allokation von der **Reihenfolge** abhängt, in der die Risiken $X_1, \dots, X_n$ der n Geschäftsbereiche hinzugenommen werden. Folglich ist die resultierende Allokation in Fällen, in denen die Reihenfolge der n Geschäftsbereiche nicht auf eine natürliche Weise vorgegeben ist, mit einer gewissen Willkür versehen. In diesen Fällen ist die inkrementelle Allokation kein **sinnvolles Allokationsverfahren**.

Bemerkungen:

- Der erste Geschäftsbereich hat den Nachteil, dass sein Risiko X_1 nicht an den Risikoausgleichseffekten partizipieren kann, da ihm das Stand-alone-Kapital $\rho(X_1)$ zugewiesen wird.
- Bei diesem Verfahren ist es möglich, dass einem Geschäftsbereich ein **negatives Risikokapital** zugewiesen wird, wenn dieser Geschäftsbereich mit anderen Geschäftsbereichen negativ korreliert ist und er somit als Hedge gegen Verluste in anderen Geschäftsbereichen fungiert (z.B. sind die Rentenversicherung und Risikolebensversicherung bzgl. des Langlebigkeitsrisikos negativ korreliert).
- Eine bekannte und naheliegende Erweiterung mit guten Eigenschaften ist die aus der Spieltheorie stammende **Shapley-Wert-Allokation** (siehe Abschnitt 3.5).

3. Allokationsverfahren

3.4 Inkrementelle Allokation

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Die inkrementelle Allokation ist **nicht symmetrisch**, da die resultierende Allokation von der Reihenfolge abhängt, in der die Risiken $X_1, \dots, X_n$ der n Geschäftsbereiche hinzugenommen werden.

Die **inkrementelle Allokation** genügt den folgenden Kohärenzaxiomen:

Satz (Kohärenzeigenschaften der inkrementellen Allokation)

Die inkrementelle Allokation besitzt im Falle eines subadditiven Risikomaßes ρ die No undercut-Eigenschaft und ist im Falle eines translationsinvarianten und positiv homogenen Risikomaßes ρ eine risikolose Allokation.

Beweis: No undercut: Im Falle eines subadditiven Risikomaßes ρ gilt für alle $i = 1, \dots, n$:

$$\rho\left(\sum_{j=1}^i X_j\right) \leq \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j\right) + \rho(X_i)$$

Daraus folgt für alle $i = 1, \dots, n$:

$$\text{RK}(X_i) = \rho\left(\sum_{j=1}^i X_j\right) - \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j\right) \leq \rho(X_i)$$

Risikolose Allokation: Für ein translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß ρ erhält man für $X_i = c$ $\mathbb{P}$ -f.s. mit $c \in \mathbb{R}$:

$$\text{RK}(X_i) = \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j + c\right) - \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j\right) = \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j\right) + c - \rho\left(\sum_{j=1}^{i-1} X_j\right) = c = \rho(c)$$

3. Allokationsverfahren

3.4 Inkrementelle Allokation

Beispiel (Inkrementelle Allokation)

Es wird die Situation aus den letzten beiden Beispielen betrachtet. Die Risiken der Geschäftsbereiche werden in der Reihenfolge X_1, X_2, X_3 hinzugenommen. Wegen

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 10 + 5 = 15$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) = 144 + 6,25 + 2 \cdot 15 = 180,25$$

erhält man mit der inkrementellen Allokation bei Verwendung des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 99% als Risikomaß ρ die folgenden Risikokapitalien:

$$\text{RK}(X_1) = \text{VaR}_{0,99}(X_1) = 10 + 2,33 \cdot 12 = 37,96$$

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_2) &= \text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2) - \text{VaR}_{0,99}(X_1) \\ &= 15 + 2,33\sqrt{180,25} - (10 + 2,33 \cdot 12) \approx 8,32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_3) &= \text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2) \\ &= 20 + 2,33\sqrt{236,5} - \left(15 + 2,33\sqrt{180,25}\right) \approx 9,55 \end{aligned}$$

Abschnitt 3.5

Shapley-Wert-Allokation

3. Allokationsverfahren

3.5 Shapley-Wert-Allokation

Die **Shapley-Wert-Allokation** hat ihren Ursprung in der kooperativen Spieltheorie und ist nach dem US-amerikanischen Wirtschaftswissenschaftler und Mathematiker LLOYD S. SHAPLEY (1923–2016) benannt, der 2012 für seine Beiträge zur kooperativen Spieltheorie den Wirtschafts-Nobelpreis erhalten hat.



Dieses Allokationsverfahren kann auch als eine **naheliegende Erweiterung der inkrementellen Allokation** (vgl. Abschnitt 3.4) aufgefasst werden. Denn bei Anwendung der inkrementellen Allokation gibt es im Falle von n Geschäftsbereichen insgesamt $n!$ verschiedene Reihenfolgen, in der die Risiken $X_1, \dots, X_n$ der n Geschäftsbereiche bei der Berechnung ihrer Risikokapitalien hinzugenommen werden können. Durch Berechnung des Durchschnitts der jeweils $n!$ resultierenden Risikokapitalien für jeden Geschäftsbereich erhält man die Shapley-Wert-Allokation.

Formal lässt sich die Shapley-Wert-Allokation wie folgt definieren:

3. Allokationsverfahren

3.5 Shapley-Wert-Allokation

Definition (Shapley-Wert-Allokation)

Die Shapley-Wert-Allokation $\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto \text{RK}(\mathbf{X})$ ist definiert durch

$$\text{RK}(X_i) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{n!} \sum_{M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, |M|=k} \left(\rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_i \right) - \rho \left(\sum_{l \in M} X_l \right) \right)$$

für $i = 1, \dots, n$ und $\text{RK} \left(\sum_{l \in M} X_l \right) := 0$ für $|M| = 0$.

Die obige Formel für $\text{RK}(X_i)$ lässt sich **direkt interpretieren**. Es gilt:

$$\frac{k!(n-1-k)!}{n!} = \frac{1}{\frac{n!}{k!(n-1-k)!}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

Da $\binom{n-1}{k}$ die Anzahl an Möglichkeiten angibt, aus $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ eine k -elementige Teilmenge M zu ziehen, handelt es sich bei $\text{RK}(X_i)$ bis auf den Proportionalitätsfaktor $1/n$ um den durchschnittlichen Risikokapitalbeitrag des i -ten Geschäftsbereichs zu allen anderen Teilmengen von Geschäftsbereichen. Der Proportionalitätsfaktor $1/n$ sorgt dafür, dass es eine **vollständige Allokation** ist.

3. Allokationsverfahren

3.5 Shapley-Wert-Allokation

Dass die Shapley-Wert-Allokation eine vollständige Allokation ist, ergibt sich auch daraus, dass jede der $n!$ inkrementellen Allokationen für sich genommen eine vollständige Allokation ist (vgl. Abschnitt 3.4). Folglich muss auch deren Durchschnitt, die Shapley-Wert-Allokation, eine vollständige Allokation sein.

Die Shapley-Wert-Allokation genügt den gleichen Kohärenzaxiomen wie die inkrementelle Allokation (vgl. Abschnitt 3.4). Sie ist jedoch zusätzlich noch **symmetrisch**.

Genauer gilt:

Satz (Kohärenzeigenschaften der Shapley-Wert-Allokation)

Die Shapley-Wert-Allokation ist symmetrisch. Im Falle eines subadditiven Risikomaßes ρ besitzt sie auch die No undercut-Eigenschaft und im Falle eines translationsinvarianten und positiv homogenen Risikomaßes ρ ist sie eine risikolose Allokation.

Beweis: No undercut: Im Falle eines subadditiven Risikomaßes ρ erfüllt jede der $n!$ inkrementellen Allokationen die No undercut-Eigenschaft (vgl. Abschnitt 3.4). Folglich erfüllt auch deren Durchschnitt die No undercut-Eigenschaft.

Risikolose Allokation: Für ein translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß ρ ist jede der $n!$ inkrementellen Allokationen eine risikolose Allokation (vgl. Abschnitt 3.4). Folglich ist auch deren Durchschnitt eine risikolose Allokation.

3. Allokationsverfahren

3.5 Shapley-Wert-Allokation

Beweis (Fortsetzung): Symmetrie: Für alle $i, j = 1, \dots, n$ erhält man mit der Symmetrie-Bedingung (6)

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{n!} \left(\sum_{M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}, |M|=k} \left(\rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_i \right) - \rho \left(\sum_{l \in M} X_l \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}, |M|=k-1} \left(\rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_j + X_i \right) - \rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_j \right) \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-1-k)!}{n!} \left(\sum_{M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}, |M|=k} \left(\rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_j \right) - \rho \left(\sum_{l \in M} X_l \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{M \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}, |M|=k-1} \left(\rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_j + X_i \right) - \rho \left(\sum_{l \in M} X_l + X_i \right) \right) \right) = \text{RK}(X_j) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Bemerkungen:

- Im Falle eines kohärenten Risikomaßes ρ ist die Shapley-Wert-Allokation ein **kohärentes Allokationsverfahren**.
- Die Shapley-Wert-Allokation besitzt weitere gute Eigenschaften. Zum Beispiel ist sie im Falle eines positiv homogen Risikomaßes ρ **linear homogen**. D.h es gilt $\text{RK}(\lambda X_i) = \lambda \text{RK}(X_i)$ für alle $\lambda \geq 0$.
- Die Shapley-Wert-Allokation besitzt den Nachteil, dass mit zunehmender Anzahl an Geschäftsbereichen die Berechnung **schnell sehr aufwendig** wird.

3. Allokationsverfahren

3.5 Shapley-Wert-Allokation

Beispiel (Shapley-Wert-Allokation)

Es wird die Situation aus den letzten drei Beispielen betrachtet. Bei Verwendung des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau 99% als Risikomaß ρ erhält man mit der Shapley-Wert-Allokation die folgenden Risikokapitalien:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_1) &= \frac{2}{6} \text{VaR}_{0,99}(X_1) + \frac{1}{6} \left(\text{VaR}_{0,99}(X_2 + X_1) - \text{VaR}_{0,99}(X_2) \right. \\ &\quad \left. + \text{VaR}_{0,99}(X_3 + X_1) - \text{VaR}_{0,99}(X_3) \right) \\ &\quad + \frac{2}{6} \left(\text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{VaR}_{0,99}(X_2 + X_3) \right) \\ &\approx \frac{2}{6} \cdot 37,96 + \frac{1}{6} (46,28 - 10,83 + 47,97 - 22,48) + \frac{2}{6} (55,83 - 28,42) \\ &\approx 31,95 \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.5 Shapley-Wert-Allokation

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_2) &= \frac{2}{6} \text{VaR}_{0,99}(X_2) + \frac{1}{6} \left(\text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2) - \text{VaR}_{0,99}(X_1) \right. \\ &\quad \left. + \text{VaR}_{0,99}(X_3 + X_2) - \text{VaR}_{0,99}(X_3) \right) \\ &\quad + \frac{2}{6} \left(\text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_3) \right) \\ &\approx \frac{2}{6} \cdot 10,83 + \frac{1}{6} (46,28 - 37,96 + 28,42 - 22,48) + \frac{2}{6} (55,83 - 47,97) \approx 8,61 \\ \text{RK}(X_3) &= \frac{2}{6} \text{VaR}_{0,99}(X_3) + \frac{1}{6} \left(\text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_3) - \text{VaR}_{0,99}(X_1) \right. \\ &\quad \left. + \text{VaR}_{0,99}(X_2 + X_3) - \text{VaR}_{0,99}(X_2) \right) \\ &\quad + \frac{2}{6} \left(\text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2 + X_3) - \text{VaR}_{0,99}(X_1 + X_2) \right) \\ &\approx \frac{2}{6} \cdot 22,48 + \frac{1}{6} (47,97 - 37,96 + 28,42 - 10,83) + \frac{2}{6} (55,83 - 46,28) \approx 15,28 \end{aligned}$$

Abschnitt 3.6

Kovarianzprinzip

3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Das folgende **Kovarianzprinzip** berücksichtigt **lineare Abhängigkeiten** zwischen den Geschäftsbereichen $X_1, \dots, X_n$:

Definition (Kovarianzprinzip)

Das Kovarianzprinzip $\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto \text{RK}(\mathbf{X})$ ist definiert durch

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\text{Var}(X)} \rho(X) \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Bei dieser Methode wird das gesamtunternehmerische Risikokapital $\rho(X) = \text{RK}(X)$ entsprechend den Anteilen $\text{Cov}(X, X_i)$ der einzelnen Geschäftsbereiche an der Gesamtvarianz $\text{Var}(X)$ **linear aufgespalten**:

$$\begin{aligned} \text{RK}(X) &= \frac{\text{Cov}(X, X)}{\text{Var}(X)} \rho(X) = \frac{\text{Cov}\left(X, \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\text{Var}(X)} \rho(X) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\text{Var}(X)} \rho(X) = \sum_{i=1}^n \text{RK}(X_i) \end{aligned}$$

Dies zeigt insbesondere, dass das Kovarianzprinzip eine **vollständige Allokation** ist

3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Das Kovarianzprinzip besitzt die folgende **Optimalitätseigenschaft**:

Satz (Optimalitätseigenschaft des Kovarianzprinzips)

Das Kovarianzprinzip minimiert in der Klasse aller proportionalen Allokationsverfahren mit der Eigenschaft

$$\text{RK}(X_i) = \lambda_i \rho(X) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

die Verlustfunktion

$$L(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]) - \boldsymbol{\lambda}(X - \mathbb{E}[X]) \right)^T \mathbf{W} \left((\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]) - \boldsymbol{\lambda}(X - \mathbb{E}[X]) \right) \right]$$

mit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ und positiv-definiten Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$.

Beweis: Durch Ableiten von $L(\boldsymbol{\lambda})$ nach $\boldsymbol{\lambda}$ mittels Produktregel erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dL(\boldsymbol{\lambda})}{d\boldsymbol{\lambda}} &= \mathbb{E} \left[-(X - \mathbb{E}[X]) \mathbf{W} \left((\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]) - \boldsymbol{\lambda}(X - \mathbb{E}[X]) \right) \right] + \mathbb{E} \left[\left((\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}]) - \boldsymbol{\lambda}(X - \mathbb{E}[X]) \right)^T \mathbf{W} (- (X - \mathbb{E}[X])) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[2\boldsymbol{\lambda}^T (X - \mathbb{E}[X])^2 \mathbf{W} - 2(X - \mathbb{E}[X]) (\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T \mathbf{W} \right] = 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right] \mathbf{W} - 2\mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X]) (\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T \right] \mathbf{W} \end{aligned}$$

Nullsetzen dieses Ausdrucks und Auflösen nach $\boldsymbol{\lambda}$ liefert weiter

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X]) (\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T \right]}{\mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right]} = \frac{\text{Cov}(X, \mathbf{X})}{\text{Var}(X)}, \quad \text{also } \lambda_i = \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\text{Var}(X)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

und damit die Behauptung.

3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Sind die Geschäftsbereiche $X_1, \dots, X_n$ **unkorreliert**, dann vereinfachen sich die Allokationsfaktoren zu

$$\lambda_i = \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\text{Var}(X)} = \frac{\text{Cov}\left(\sum_{j=1}^n X_j, X_i\right)}{\text{Var}(X)} = \sum_{j=1}^n \frac{\text{Cov}(X_j, X_i)}{\text{Var}(X)} = \frac{\text{Var}(X_i)}{\text{Var}(X)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Das Kovarianzprinzip stellt bzgl. der **Berücksichtigung von linearen Abhängigkeitsstrukturen** zwischen den Risiken der n Geschäftsbereiche eine deutliche Verbesserung zur proportionalen Allokation dar (vgl. Abschnitt 3.3). In seiner allgemeinen Form genügt es jedoch keinem der drei Kohärenzaxiome. Ferner ist es so, dass bei seiner Anwendung häufig negative Allokationsfaktoren λ_i und damit **negative Kapitalallokationen** für einzelne Geschäftsbereiche resultieren. Aus diesem Grund wird in der Regel anstelle von (11) das **modifizierte Kovarianzprinzip**

$$\boxed{\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\text{Var}(X)} (\rho(X) - \mathbb{E}[X]) \quad \text{für } i = 1, \dots, n} \quad (12)$$

verwendet, so dass es seltener zu negativen Kapitalallokationen kommt. Negative Kapitalallokationen können aber auch durchaus angemessen sein, wenn sie die Diversifikationseffekte zwischen einzelnen Geschäftsbereichen widerspiegeln.

3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Das modifizierte Kovarianzprinzip ist offensichtlich auch eine **vollständige Allokation**. Allerdings genügt es in seiner allgemeinen Form ebenfalls keinem der drei Kohärenzaxiome. In den meisten Anwendungen wird deshalb das **Standardabweichungsprinzip**

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha \sigma(X) \quad \text{mit } \alpha > 0$$

als Risikomaß ρ verwendet (vgl. Abschnitt 2.2).

Man erhält dann aus (12) für die Risikokapitalien

$$\boxed{\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\sigma(X)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.} \quad (13)$$

Dieses Allokationsverfahren genügt allen drei Kohärenzaxiomen und ist somit ein **kohärentes Allokationsverfahren**:

3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Satz (Kohärenz des modifizierten Kovarianzprinzips mit $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$)

Das modifizierte Kovarianzprinzip mit dem Risikomaß $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$ und $\alpha > 0$ ist ein kohärentes Allokationsverfahren.

Beweis: Symmetrie: Es sei angenommen, dass X_j und X_k die Symmetrie-Bedingung (6) erfüllen. Dann lässt sich mit ein wenig Rechnen zeigen, dass

$$\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_k] \quad \text{und} \quad \sigma(X_j) = \sigma(X_k) \quad (14)$$

gelten muss. Es sei nun $M := \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}$ und $X^* := \sum_{i \in M} X_i$. Dann folgt mit (14) und (6)

$$\mathbb{E}[X^*] + \mathbb{E}[X_j] + \alpha\sigma(X^* + X_j) = \rho(X^* + X_j) = \rho(X^* + X_k) = \mathbb{E}[X^*] + \mathbb{E}[X_k] + \alpha\sigma(X^* + X_k)$$

und daraus zusammen mit (14)

$$\text{Var}(X^* + X_j) = \text{Var}(X^* + X_k). \quad (15)$$

Ferner gilt:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X^* + X_j + X_k) = \text{Var}(X^* + X_j) + \text{Var}(X_k) + 2\text{Cov}(X^* + X_j, X_k)$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X^* + X_k + X_j) = \text{Var}(X^* + X_k) + \text{Var}(X_j) + 2\text{Cov}(X^* + X_k, X_j)$$

Mit (14) und (15) folgt daraus:

$$\text{Cov}(X^* + X_j, X_k) = \text{Cov}(X^* + X_k, X_j)$$

Damit erhält man zusammen mit (14):

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_j, X) &= \text{Cov}(X_j, X^* + X_j + X_k) = \text{Var}(X_j) + \text{Cov}(X_j, X^* + X_k) \\ &= \text{Var}(X_k) + \text{Cov}(X_k, X^* + X_j) = \text{Cov}(X_k, X^* + X_j + X_k) = \text{Cov}(X_k, X) \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Beweis (Fortsetzung): Zusammen mit (14) folgt daraus schließlich

$$\text{RK}(X_j) = \mathbb{E}[X_j] + \alpha \frac{\text{Cov}(X, X_j)}{\sigma(X)} = \mathbb{E}[X_k] + \alpha \frac{\text{Cov}(X, X_k)}{\sigma(X)} = \text{RK}(X_k)$$

und damit die Behauptung.

No undercut: Für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\sigma(X)\sigma(X_i)} = \text{Corr}(X, X_i) \leq 1$$

Für $\alpha > 0$ folgt daraus:

$$\sigma(X_i) \geq \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\sigma(X)} \quad \text{bzw.} \quad \rho(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \alpha \sigma(X_i) \geq \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov}(X, X_i)}{\sigma(X)} = \text{RK}(X_i)$$

Risikolose Allokation: Für $X_i = c$ $\mathbb{P}$ -f.s. mit $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[c] + \alpha \frac{\text{Cov}(X, c)}{\sigma(X)} = c = \rho(c)$$



3. Allokationsverfahren

3.6 Kovarianzprinzip

Beispiel (Modifiziertes Kovarianzprinzip mit $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$)

Es wird die Situation aus den letzten vier Beispielen betrachtet. Als Risikomaß ρ wird nun jedoch das Standardabweichungsprinzip $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$ mit $\alpha = \Phi^{-1}(0,99) = 2,33$ verwendet. D.h. es gilt

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \Phi^{-1}(0,99)\sigma(X) = \text{VaR}_{0,99}(X)$$

(siehe Abschnitt 2.5). Mit dem modifizierten Kovarianzprinzip erhält man dann die folgenden Risikokapitalien:

$$\text{RK}(X_1) = \mathbb{E}[X_1] + \Phi^{-1}(0,99) \frac{\text{Cov}(X, X_1)}{\sigma(X)} = 10 + 2,33 \frac{144 + 15}{\sqrt{236,5}} \approx 34,09$$

$$\text{RK}(X_2) = \mathbb{E}[X_2] + \Phi^{-1}(0,99) \frac{\text{Cov}(X, X_2)}{\sigma(X)} = 5 + 2,33 \frac{15 + 6,25}{\sqrt{236,5}} \approx 8,22$$

$$\text{RK}(X_3) = \mathbb{E}[X_3] + \Phi^{-1}(0,99) \frac{\text{Cov}(X, X_3)}{\sigma(X)} = 5 + 2,33 \frac{56,25}{\sqrt{236,5}} \approx 13,52$$

Abschnitt 3.7

Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Ein intuitives Allokationsverfahren mit ebenfalls guten Kohärenzeigenschaften ist das **Conditional-Tail-Expectation-Prinzip**:

Definition (Conditional-Tail-Expectation-Prinzip)

Das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip $\Lambda : \mathcal{M}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto \text{RK}(\mathbf{X})$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist definiert durch

$$\text{RK}(X_i) = \text{CTE}_q(X_i|X) := \mathbb{E}[X_i|X > \text{VaR}_q(X)] \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Bei diesem Verfahren ist das Risikomaß ρ durch den **Conditional-Tail-Expectation**

$$\rho(X) = \text{RK}(X) = \mathbb{E}[X|X > \text{VaR}_q(X)] = \text{CTE}_q(X)$$

vorgegeben (vgl. Abschnitt 2.5). Beim Conditional-Tail-Expectation-Prinzip handelt es sich um eine **vollständige Allokation**. Denn es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{RK}(X_i) &= \sum_{i=1}^n \text{CTE}_q(X_i|X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|X > \text{VaR}_q(X)] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i | X > \text{VaR}_q(X)\right] \\ &= \mathbb{E}[X|X > \text{VaR}_q(X)] = \text{RK}(X) \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Beachte jedoch:

$$\text{CTE}_q(X_i|X) = \mathbb{E}[X_i|X > \text{VaR}_q(X)] \neq \mathbb{E}[X_i|X_i > \text{VaR}_q(X_i)] = \text{CTE}_q(X_i).$$

Das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip entspricht sehr gut dem **intuitiven Gerechtigkeitssinn** an eine „faire“ Aufteilung des Gesamtrisikokapitals $\text{RK}(X)$ auf die n Geschäftsbereiche. Denn bei diesem Verfahren entspricht das dem i -ten Geschäftsbereich zugeordnete Risikokapital $\text{RK}(X_i)$ dem Erwartungswert aller durch den i -ten Geschäftsbereich verursachten Schäden/Verluste, die durch Ereignisse hervorgerufen wurden, für die der Gesamtschaden/-verlust X größer als $\text{VaR}_q(X)$ ist.

Neben dieser guten Eigenschaft ist der Conditional-Tail-Expectation-Prinzip auch ein **kohärentes Allokationsverfahren**:

Satz (Kohärenz des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips)

Das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ ist ein kohärentes Allokationsverfahren.

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Beweis: No Undercut: Es sei $X_1, \dots, X_N$ eine Stichprobe von stochastisch unabhängigen und identisch F_X -verteilten Zufallsvariablen und durch $X_{(1)}, \dots, X_{(N)}$ sei die dazugehörige geordnete Stichprobe gegeben. D.h. $X_{(k)}$ ist die k -te Ordnungsstatistik (k -kleinster Wert), so dass

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(k)} \leq \dots \leq X_{(N-1)} \leq X_{(N)}$$

gilt. Wie man zeigen, besitzt dann der Conditional-Tail-Expectation von $X = \sum_{i=1}^n X_i$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ die Darstellung

$$\text{CTE}_q(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(1-q)} \sum_{k=[Nq]+1}^N X_{(k)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (16)$$

mit der Abrundungsfunktion (Gaußklammer) $[x] := \max \{l \in \mathbb{N}_0 : l \leq x\}$ (Starkes Gesetz der großen Zahlen).

Es sei nun ferner angenommen, dass eine Stichprobe $\mathbf{X}_{(1)}, \dots, \mathbf{X}_{(N)} \sim F_{\mathbf{X}}$ der Verteilung des n -dimensionalen Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ vorliegt und $X_{i(k)}$ für $i = 1, \dots, n$ die k -te Ordnungsstatistik (k -kleinster Wert) der i -ten Komponente X_i in dieser n -dimensionalen Stichprobe $\mathbf{X}_{(1)}, \dots, \mathbf{X}_{(N)}$ bezeichnet. Ferner sei $X_{(k,i)}$ der Beitrag des i -ten Geschäftsbereichs zur k -te Ordnungsstatistik $X_{(k)}$ ist, so dass

$$X_{(k)} = \sum_{i=1}^n X_{(k,i)} \quad \text{für } k = 1, \dots, N$$

gilt. Es gilt dann offensichtlich weiter:

$$\sum_{k=[Nq]+1}^N X_{i(k)} \geq \sum_{k=[Nq]+1}^N X_{(k,i)}$$

Denn die linke Summe besteht aus den $N - [Nq]$ größten Werten von X_i und ist daher mindestens so groß wie jede andere Summe aus $N - [Nq]$ Werten von X_i .

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Beweis (Fortsetzung): Zusammen mit (16) liefert dies schließlich

$$\text{CTE}_q(X_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(1-q)} \sum_{k=\lfloor Nq \rfloor + 1}^N X_{i(k)} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(1-q)} \sum_{k=\lfloor Nq \rfloor + 1}^N X_{(k,i)} = \text{CTE}_q(X_i|X) = \text{RK}(X_i) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und damit die Behauptung.

Symmetrie: Es sei angenommen, dass X_j und X_k die Symmetrie-Bedingung (6) erfüllen. Mit $M = \emptyset$ folgt dann aus (6)

$$\text{RK}(X_j) = \mathbb{E}[X_j|X > \text{VaR}_q(X)] = \rho(X_j) = \rho(X_k) = \mathbb{E}[X_k|X > \text{VaR}_q(X)] = \text{RK}(X_k)$$

und damit die Behauptung.

Risikolose Allokation: Für $X_i = c$ $\mathbb{P}$ -f.s. mit $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[c|X > \text{VaR}_q(X)] = c = \rho(c).$$

■

Bemerkungen:

- Das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip ist als intuitives und kohärentes Allokationsverfahren **in der Praxis sehr populär**.
- Bei diesem Allokationsverfahren werden **(nichtlineare) Tailabhängigkeiten** zwischen den Geschäftsbereichen berücksichtigt. D.h. wenn eine erhöhte Wahrscheinlichkeit besteht, dass in zwei Geschäftsbereichen **simultan** extreme Schäden, Verluste usw. auftreten, wird diesen beiden Bereichen ein erhöhtes Risikokapital zugeordnet. Dieser Aspekt ist gerade für die Anwendung im Banken- und Versicherungssektor von zentraler Bedeutung.

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Der folgende Satz besagt, dass das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip im Falle von

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

mit dem **modifizierten Kovarianzprinzip** übereinstimmt, wenn dort als Gesamtrisikokapital $RK(X) = \rho(X) = \text{CTE}_q(X)$ verwendet wird:

Satz (Conditional-Tail-Expectation-Prinzip für $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$)

Das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ liefert für $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ die Risikokapitalien

$$RK(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\text{Var}(X)} (\text{CTE}_q(X) - \mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q} \quad (17)$$

für $i = 1, \dots, n$. D.h. es liefert dieselben Risikokapitalien wie das modifizierte Kovarianzprinzip (12), wenn dort als Gesamtrisikokapital $RK(X) = \rho(X) = \text{CTE}_q(X)$ verwendet wird.

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Beweis: 1. Schritt: Es sei $q \in (0, 1)$ und $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ ein zweidimensionaler normalverteilter Zufallsvektor. Weiter sei

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(X_1), \quad \sigma_2^2 = \text{Var}(X_2), \quad \sigma_{12} = \text{Cov}(X_1, X_2) \quad \text{und} \quad \rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Mittels Integration durch mehrfache Substitution erhält man nach einiger Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 | X_2 > \text{VaR}_q(X_2)] &= \frac{1}{1 - F_{X_2}(\text{VaR}_q(X_2))} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\text{VaR}_q(X_2)}^{\infty} x_1 f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \dots = \mathbb{E}[X_1] + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2} \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q} \end{aligned} \quad (18)$$

2. Schritt: Gemäß Annahme ist der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ multivariat normalverteilt und damit $(X_i, X)^T$ für $i = 1, \dots, n$ zweidimensional normalverteilt. Es kann daher das Ergebnis aus dem 1. Schritt angewendet werden. Mit X_i anstelle von X_1 und X für X_2 folgt aus (18) unmittelbar

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_i) &= \mathbb{E}[X_i | X > \text{VaR}_q(X)] \\ &= \mathbb{E}[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q} \end{aligned} \quad (19)$$

für $i = 1, \dots, n$ und damit die zweite Gleichung in (17). Da die Verteilungsfunktion von X stetig ist, gilt $\text{CTE}_q(X) = \text{ES}_q(X)$ (vgl. letzten Satz in Abschnitt 2.5). Es gilt daher

$$\text{CTE}_q(X) - \mathbb{E}[X] = \sqrt{\text{Var}(X)} \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1 - q} = \frac{\text{CTE}_q(X) - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

(siehe hierzu erstes Beispiel in Abschnitt 2.5). Eingesetzt in (19) liefert dies

$$\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\text{Var}(X)} (\text{CTE}_q(X) - \mathbb{E}[X]).$$

und damit auch die erste Gleichung in (17).

3. Allokationsverfahren

3.7 Conditional-Tail-Expectation-Prinzip

Beispiel (Conditional-Tail-Expectation-Prinzip)

Es wird die Situation aus den letzten fünf Beispielen betrachtet, wobei die Risikokapitalien nun mit dem Conditional-Tail-Expectation-Prinzip zum Sicherheitsniveau $q = 0,95$ berechnet werden. Wegen

$$\frac{\phi(\Phi^{-1}(0,95))}{1 - 0,95} \approx 2,06$$

liefert dies mit (17) für die drei Geschäftsbereiche die folgenden Risikokapitalien:

$$\text{RK}(X_1) = \mathbb{E}[X_1] + \frac{\text{Cov}(X_1, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \frac{\phi(\Phi^{-1}(0,95))}{1 - 0,95} \approx 10 + \frac{159}{\sqrt{236,5}} \cdot 2,06 \approx 31,30$$

$$\text{RK}(X_2) = \mathbb{E}[X_2] + \frac{\text{Cov}(X_2, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \frac{\phi(\Phi^{-1}(0,95))}{1 - 0,95} \approx 5 + \frac{21,5}{\sqrt{236,5}} \cdot 2,06 \approx 7,88$$

$$\text{RK}(X_3) = \mathbb{E}[X_3] + \frac{\text{Cov}(X_3, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \frac{\phi(\Phi^{-1}(0,95))}{1 - 0,95} \approx 5 + \frac{56,25}{\sqrt{236,5}} \cdot 2,06 \approx 12,57$$

Abschnitt 3.8

Euler-Prinzip

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Die inkrementelle Allokation (vgl. Abschnitt 3.4) und die Shapley-Wert-Allokation (vgl. Abschnitt 3.5) verwenden als Grundlage für die Kapitalallokation den Anstieg des Gesamtrisikokapitals wenn ein Geschäftsbereich hinzugefügt wird. D.h. diese beiden Ansätze gehen davon aus, dass ein Geschäftsbereich bei der Kapitalallokation entweder ganz oder gar nicht betrachtet wird.

Das **Euler-Prinzip** ist ein bedeutendes Allokationsverfahren, das erstmals von LITTELMAN (1996) betrachtet wurde. Im Gegensatz zu den beiden oben genannten diskreten Verfahren basiert es auf einem kontinuierlichen Ansatz, bei dem das einem Geschäftsbereich zugewiesene Risikokapital proportional zur Steigerungsrate des Gesamtrisikokapitals ist, wenn sein Gewichtung bei der Kapitalallokation erhöht wird.



Das Euler-Prinzip ist kein einzelnes Allokationsverfahren, sondern ein **Allokationsprinzip**, das einige bekannte Allokationsverfahren als Spezialfälle umfasst.

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Grundlage des Euler-Prinzips und namensgebend ist das **Theorem von Euler** für **homogene Funktionen**. Es besagt, dass für eine differenzierbare Funktion

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (u_1, \dots, u_n) \mapsto f(u_1, \dots, u_n)$$

mit der **Homogenitätseigenschaft**

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, \dots, u_n) \quad (20)$$

für $\lambda > 0$ stets

$$f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)}{\partial u_i} u_i$$

gilt (vgl. z.B. MERZ-WÜTHRICH (2013), Seite 672).

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass $\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein **positiv homogenes** Risikomaß ist (vgl. Abschnitt 2.2).

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Die zugehörige **Risikomaß-Funktion**

$$f_\rho : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (u_1, \dots, u_n) \mapsto f_\rho(u_1, \dots, u_n) = \rho \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right) \quad (21)$$

besitzt dann die Homogenitätseigenschaft (20). Denn für $\lambda > 0$ gilt dann:

$$f_\rho(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \rho \left(\sum_{i=1}^n \lambda u_i X_i \right) = \lambda \rho \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right) = \lambda f_\rho(u_1, \dots, u_n)$$

D.h. wenn die Risikomaß-Funktion (21) zusätzlich differenzierbar ist, folgt mit dem Theorem von Euler und $\lambda = 1$:

$$f_\rho(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\rho(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} u_i$$

Mit $(u_1, \dots, u_n) = (1, \dots, 1)$ erhält man daraus weiter:

$$\rho \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = f_\rho(1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_\rho(1, \dots, 1)}{\partial u_i} \quad (22)$$

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Dies motiviert das folgende Allokationsverfahren, das als **Euler-Prinzip** bezeichnet wird:

Definition (Euler-Prinzip)

Das Euler-Prinzip $\Lambda : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \mapsto \text{RK}(\mathbf{X})$ ist für ein positiv homogenes Risikomaß ρ und eine differenzierbare Risikomaß-Funktion f_ρ definiert durch

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\partial f_\rho(1, \dots, 1)}{\partial u_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Aus (22) folgt unmittelbar, dass es sich bei dem Euler-Prinzip um eine **vollständige Allokation** handelt. Ferner gilt:

$$\text{RK}(\mathbf{X}) = (\text{RK}(X_1), \dots, \text{RK}(X_n))^T = \text{grad} f_\rho(1, \dots, 1)$$

Das Euler-Prinzip wird deshalb manchmal auch als **Gradienten-Verfahren** bezeichnet.

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Bei entsprechender Wahl des Risikomaßes ρ erhält man das (modifizierte) Kovarianzprinzip als Spezialfall des Euler-Prinzips:

Satz (Euler-Prinzip für $\rho(X) = \sigma(X)$ und $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$)

Das Euler-Prinzip liefert für $\rho(X) = \sigma(X)$ die Risikokapitalien

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\text{Var}(X)} \sigma(X) = \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sigma(X)}$$

und für $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$ mit $\alpha > 0$ die Risikokapitalien

$$\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\text{Var}(X)} (\rho(X) - \mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sigma(X)} \quad (24)$$

für $i = 1, \dots, n$. D.h. es liefert dieselben Risikokapitalien wie das Kovarianzprinzip mit Gesamtrisikokapital $\rho(X) = \sigma(X)$ bzw. wie das modifizierte Kovarianzprinzip mit Gesamtrisikokapital $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$.

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Beweis: Es gelte $\rho(X) = \sigma(X)$: Das Risikomaß $\rho(X) = \sigma(X)$ ist offensichtlich positiv homogen und die Risikomaß-Funktion

$$f\sigma : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (u_1, \dots, u_n) \mapsto f\sigma(u_1, \dots, u_n) = \sigma\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right)$$

ist differenzierbar. D.h. die Voraussetzungen für die Anwendung des Euler-Prinzips sind erfüllt. Für die partiellen Ableitungen von

$$f\sigma(u_1, \dots, u_n) = \sigma\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right) = \sqrt{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \text{Cov}(X_i, X_j)}$$

erhält man

$$\frac{\partial f\sigma(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \frac{2 \sum_{j=1}^n u_j \text{Cov}(X_i, X_j)}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \text{Cov}(X_i, X_j)}} = \frac{\text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j\right)}{\sqrt{\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j\right)}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\partial f\sigma(1, \dots, 1)}{\partial u_i} = \frac{\text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right)}{\sqrt{\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right)}} = \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} = \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sigma(X)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Beweis (Fortsetzung): Es gelte $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$: Das Risikomaß $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$ mit $\alpha > 0$ ist ebenfalls positiv homogen (vgl. Beispiel in Abschnitt 2.2) und die Risikomaß-Funktion

$$f_{\text{Std}} : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (u_1, \dots, u_n) \mapsto f_{\text{Std}}(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n u_i X_i \right] + \alpha \sigma \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right)$$

ist differenzierbar. D.h. die Voraussetzungen für die Anwendung des Euler-Prinzips sind wieder erfüllt und analog zu dem Vorgehen zuvor erhält man

$$\frac{\partial f_{\text{Std}}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} = \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j \right)}{\sqrt{\text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j \right)}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und somit

$$\begin{aligned} \text{RK}(X_i) &= \frac{\partial f_{\text{Std}}(1, \dots, 1)}{\partial u_i} = \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov} \left(X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right)}{\sqrt{\text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right)}} \\ &= \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} = \mathbb{E}[X_i] + \alpha \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sigma(X)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Bemerkungen:

- Das Euler-Prinzip zeichnet sich durch eine Reihe **wünschenswerter mathematischer** und **ökonomischer Eigenschaften** aus:
 - LITTERMAN (1996) und TASCHE (1999) führen aus, dass dieses Prinzip mit vielen ökonomischen Steuerungs- und Optimierungsansätzen kompatibel ist.
 - DENAULT (2001) leitet das Euler-Prinzip mit Hilfe von Argumenten aus der kooperativen Spieltheorie her und weist nach, dass es im Falle eines kohärenten Risikomaßes ρ und einer differenzierbaren Risikomaß-Funktion f_ρ ein **kohärentes Allokationsverfahren** liefert.
 - KALKBRENER (2005) zeigt, dass das Euler-Prinzip das einzige Verfahren ist, das gewisse wünschenswerte Diversifikationseigenschaften besitzt.
- Besitzt $\mathbf{X}$ eine n -dimensionale Dichtefunktion, dann ist die zu $\rho(X) = \text{VaR}_q(X)$ gehörende Risikomaß-Funktion f_{VaR_q} differenzierbar und das Euler-Prinzip liefert die Risikokapitalien

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\partial f_{\text{VaR}_q}(1, \dots, 1)}{\partial u_i} = \mathbb{E}[X_i | X = \text{VaR}_q(X)]$$

(vgl. GOURIEROUX ET AL. (2000)).

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Besitzt $\mathbf{X}$ eine n -dimensionale Dichtefunktion, dann ist die zu $\rho(X) = \text{ES}_q(X)$ gehörende Risikomaß-Funktion f_{ES_q} differenzierbar und das Euler-Prinzip liefert die Risikokapitalien

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\partial f_{\text{ES}_q}(1, \dots, 1)}{\partial u_i} = \mathbb{E}[X_i | X > \text{VaR}_q(X)]$$

(vgl. SCAILLET (2004)). D.h. es stimmt in diesem Fall mit dem **Conditional-Tail-Expectation-Prinzip** überein, das ein kohärentes Allokationsverfahren ist (vgl. Abschnitt 3.7).

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Beispiel (Euler-Prinzip für $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$)

Es gelte $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ und $q \in (0, 1)$. Dann folgt

$$\text{VaR}_q(X) = \mathbb{E}[X] + \Phi^{-1}(q)\sigma(X)$$

und

$$\text{ES}_q(X) = \mathbb{E}[X] + \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q}\sigma(X)$$

(vgl. erstes Beispiel in Abschnitt 2.5). D.h. beide Risikomaße sind von der Form $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sigma(X)$. Die Risikokapitalien bei Verwendung des Euler-Prinzips sind daher für $i = 1, \dots, n$ gegeben durch (vgl. (24))

$$\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \Phi^{-1}(q) \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sigma(X)}$$

bzw.

$$\text{RK}(X_i) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q} \frac{\text{Cov}(X_i, X)}{\sigma(X)}.$$

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Beispiel (Vergleich der Risikokapitalien)

Die untenstehende Tabelle zeigt für die drei Geschäftsbereiche und das Gesamtunternehmen die Risikokapitalien, die bei Anwendung der unterschiedlichen betrachteten Allokationsverfahren resultierten:

Verfahren	RK(X_1)	RK(X_2)	RK(X_3)	RK(X)
Stand-alone-Verfahren mit $\rho(X) = \text{VaR}_{0,99}(X)$	37,96	10,83	22,48	55,83
Proportionale Allokation mit $\rho(X) = \text{VaR}_{0,99}(X)$	29,74	8,48	17,61	55,83
Inkrementelle Allokation mit $\rho(X) = \text{VaR}_{0,99}(X)$	37,96	8,32	9,55	55,83
Shapley-Wert-Allokation mit $\rho(X) = \text{VaR}_{0,99}(X)$	31,95	8,61	15,28	55,83
Modifiziertes Kovarianzprinzip mit $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \Phi^{-1}(0,99)\sigma(X)$	34,09	8,22	13,52	55,83
Conditional-Tail-Expectation-Prinzip mit $q = 0,95$	31,30	7,88	12,57	51,75

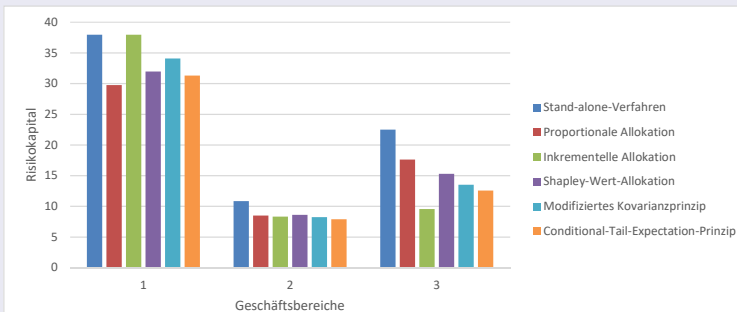
Beachte: Da X normalverteilt ist, gilt:

$$\rho(X) = \text{VaR}_{0,99}(X) = \mathbb{E}[X] + \Phi^{-1}(0,99)\sigma(X).$$

3. Allokationsverfahren

3.8 Euler-Prinzip

Beispiel (Fortsetzung)



Abschnitt 3.9

Literatur

3. Allokationsverfahren

3.9 Literatur



DENAULT, M. (2001). *Coherent allocation of risk capital*. Journal of Risk, 4/1, p. 1–34.



GOURIEROUX, C., LAURENT, J.-P., SCAILLET, O. (2000). *Sensitivity analysis of Values at Risk*. Journal of Empirical Finance, 7/3-4, p. 225–245.



KALKBRENER, M. (2005). *An Axiomatic Approach to Capital Allocation*. Mathematical Finance, 15/3, p. 425–437.



LITTERMAN, R. (1996). *Hot Spots and Hedges*. The Journal of Portfolio Management, 22, p. 52–75.



MERZ, M., WÜTHRICH, M. V. (2013). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen*. Vahlen Verlag.



SCAILLET, O. (2004). *Nonparametric Estimation and Sensitivity analysis of Expected Shortfall*. Mathematical Finance, 14/1, p. 115–129.



TASCHE, D. (1999). *Risk Contributions and Performance Measurement*. Working Paper, TU München.