

Research Papers on Operations & Supply Chain Management

Hartmut Stadtler

Myopische Losgrößenheuristiken - Ein modifiziertes Groff-Abbruchkriterium (auch) für den sporadischen Bedarf

No. 4

September 2022

ISSN 1867-7908

Editors:

- Wolfgang Brüggemann (brueggemann@uni-hamburg.de)
- Malte Fliedner (malte.fliedner@uni-hamburg.de)
- Knut Haase (knut.haase@uni-hamburg.de)
- Guido Voigt (guido.voigt@uni-hamburg.de)

Kurzfassung

Myopische Losgrößenheuristiken werden auch heute noch in der betrieblichen Praxis eingesetzt, da deren Logik aus Sicht der Anwender leicht verständlich und nachvollziehbar ist. Zudem sind die entstehenden Rüst- und Lagerkosten oft nur unwesentlich höher als die einer exakten Lösung (z.B. mit Hilfe des Wagner/Whitin-Algorithmus). In numerischen Tests haben insbesondere die Silver/Meal-Heuristik und die Groff-Heuristik eine sehr hohe Lösungsgüte gezeigt. Dies gilt allerdings nur für den regelmäßigen Bedarf. Für den sporadischen Bedarf wurde von Silver/Miltenburg (1984) eine Modifikation der Silver/Meal-Heuristik vorgeschlagen. Für die Groff-Heuristik ist eine derartige Modifikation nicht bekannt, dies soll in dem vorliegenden Working Paper nachgeholt werden.

1 Einleitung und Literatur

Wir betrachten im weiteren das dynamische, einstufige Losgrößenmodell ohne Kapazitätsbeschränkungen. Es basiert auf den deterministischen Periodenbedarfen d_t für die einzelnen Perioden t des Planungszeitraums $t = 1..T$. Vereinfachend wird im weiteren eine "Periode" mit einer "Zeiteinheit" (ZE) gleichgesetzt. Zu beachten ist ferner, dass in diesem Dokument mit "Bedarf" immer der "Netto-Bedarf" einer Periode gemeint ist. Zu minimieren sind die losauflagefixen und die lagerbestandsabhängigen Kosten im Planungszeitraum bei Erfüllung der Periodenbedarfe. Für die myopischen Losgrößenheuristiken wird unterstellt, dass die losauflagefixen Kostensätze U periodenunabhängig sind und der Lagerbestand am Ende einer Periode mit dem Lagerkostensatz h bewertet wird. Mit diesen Angaben lässt sich das folgende Modell formulieren:

$$\min \sum_{t=1}^T (U \cdot f(X_t) + h \cdot I_t) \quad (1)$$

u. d. N.

$$I_{t-1} + X_t = d_t + I_t \quad \forall t \quad (2)$$

$$f(X_t) = 1, \text{ wenn } X_t > 0; \text{ sonst } 0 \quad \forall t \quad (3)$$

$$X_t \geq 0 \quad \forall t \quad (4)$$

$$I_t \geq 0 \quad \forall t = 0..T \quad (5)$$

Variablen:

I_t Lagerendbestand der Periode t (Hinweis: $I_0 = 0$)

X_t Produktionsmenge in Periode t

Zur Lösung des obigen Modells haben Wagner und Whitin bereits 1958 ein exaktes Lösungsverfahren der Dynamischen Programmierung entwickelt (Wagner/Whitin 1958). Dennoch sind bis heute myopische Losgrößenheuristiken aufgrund ihrer einfachen Verständlichkeit und Nachvollziehbarkeit in der betrieblichen Praxis weit verbreitet. Myopische Losgrößenheuristiken zeichnen sich dadurch aus, dass sie Periodenbedarfe fortschreitend von einer Periode zur nächsten zu einem Los zusammenfassen bis ein vorgegebenes Abbruchkriterium greift. Dies führt in der Regel zu einer linearen Rechenzeitkomplexität.

Bekannte Vertreter der myopischen Heuristiken sind, die Least-Unit Cost-Regel (Autoren unbekannt), die Part-Period-Regel (DeMatteis 1968), die Silver/Meal-Heuristik (Silver/Meal 1973) und die Groff-Heuristik (Groff 1978). Die myopischen Losgrößenheuristiken wurden von Zoller/Robrade (1987) umfangreichen numerischen Tests unterzogen. Hierzu dienten Testdatensätze mit unterschiedlichen, regelmäßigen Bedarfsverläufen. Ein regelmäßiger Bedarf liegt vor, wenn (nahezu) alle Periodenbedarfe positiv sind, während sich der sporadische Bedarf durch einen hohen Anteil an Nullbedarfsperioden auszeichnet. Aus der Studie stachen die Silver/Meal- und die Groff-Heuristik aufgrund ihrer sehr guten Lösungsqualität hervor.

Für den sporadische Bedarf liegen bisher nur wenige Beiträge vor. Hierzu zählen Silver/Miltenburg (1984), Knolmayer (1986) und Yilmaz (1992). Das Augenmerk von Silver/Miltenburg (1984) liegt auf der Verbesserung der Lösungsgüte der Silver/Meal-Heuristik durch zwei Verbesserungsschritte. Zusätzlich wird gleich zu Beginn des Aufsatzes eine einfache Erweiterung der Silver/Meal-Heuristik für den sporadischen Bedarf vorgestellt. Knolmayer untersucht mehrere myopische Heuristiken und modifiziert diese derart, dass "... all heuristics were adjusted in such a way that each lot arrives in a period with positive demand" (Knolmayer 1986). Knolmayer zeigt anhand numerischer Tests, dass diese Modifikation zusammen mit einer möglichen Verlängerung der Reichweite eines Loses um 1 bis 4 Perioden i.d.R. zu einer verbesserten Lösungsgüte der betrachteten myopischen Losgrößenheuristiken führt. Yilmaz (1992) propagiert die Incremental-Order-Policy. Diese

wird hier aber nicht weiter betrachtet, da diese Heuristik bereits für den regelmäßigen Bedarf relativ schlechte Ergebnisse gezeigt hat (siehe Zoller/Robrade 1987).

Eine zielgerichtete Modifikation des Groff-Abbruchkriteriums (auch) für den sporadischen Bedarf fehlt unseres Erachtens in der Literatur. Diese Lücke soll das vorliegende Working Paper schließen. Ziel ist es, das Groff-Abbruchkriterium so zu modifizieren, dass es bei regelmäßigem Bedarf identische Lösungen wie das ursprüngliche Groff-Abbruchkriterium erzeugt und zusätzlich auch bei Vorliegen von sporadischem Bedarf kostengünstige Lösungen generiert.

2 Die Groff-Heuristik

2.1 Herleitung des modifizierten Groff-Abbruchkriteriums

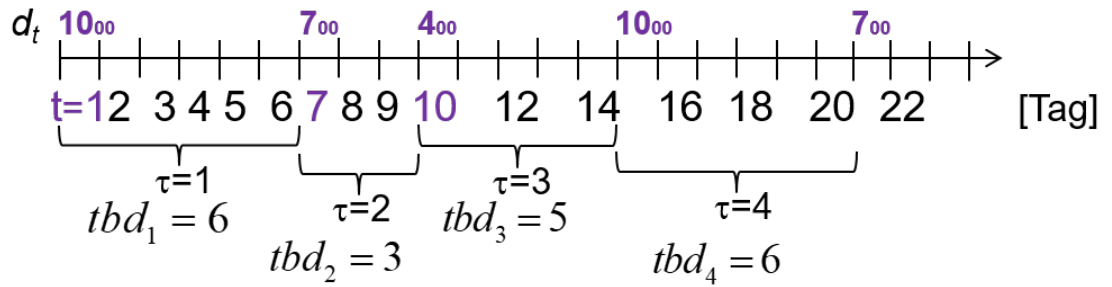


Abbildung 1: Beispiel einer Zeitreihe mit sporadischem Bedarf

Mit Hilfe der Bedarfszyklen lässt sich die Reichweite eines Loses, das die Bedarfszyklen $1, \dots, \tau$ überdeckt, berechnen:

$$tbd_{\tau}^{cum} = \sum_{i=1}^{\tau} tbd_i \quad (6)$$

Für das Groff-Abbruchkriterium ist die Verminderung der Fixkosten pro Zeiteinheit (ZE) bzw. Periode zu bestimmen. Diese ergibt sich aus der Differenz der Rüstkosten pro Periode bei einer Reichweite eines Loses von τ und einer Reichweite von $\tau + 1$ Bedarfszyklen:

$$\Delta U_{\tau, \tau+1} = \frac{U}{tbd_{\tau}^{cum}} - \frac{U}{tbd_{\tau+1}^{cum}} \quad (7)$$

Nach Zusammenführung und Kürzen der beiden Brüche ergibt sich das folgende Verhältnis:

$$\frac{tbd_{\tau+1} \cdot U}{tbd_{\tau+1}^{cum} \cdot tbd_{\tau}^{cum}} \quad (8)$$

Die Erhöhung der Lagerkosten pro ZE (Periode) bei Erweiterung der Reichweite des betrachteten Loses um den Bedarfszyklus $\tau + 1$ ergibt sich nunmehr aus der Differenz der Lagerkosten pro ZE eines Loses mit der Reichweite $tbd_{\tau+1}^{cum}$ und den Lagerkosten pro ZE eines Loses mit der Reichweite tbd_{τ}^{cum} :

$$\Delta H_{\tau, \tau+1} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau+1} tbd_{i-1}^{cum} \cdot h \cdot d_{t+tbd_{i-1}^{cum}}}{tbd_{\tau+1}^{cum}} - \frac{\sum_{i=1}^{\tau} tbd_{i-1}^{cum} \cdot h \cdot d_{t+tbd_{i-1}^{cum}}}{tbd_{\tau}^{cum}} \quad (9)$$

Das Abbruchkriterium ist erreicht, sobald durch eine Erweiterung der Losgröße zum ersten Mal die Erhöhung der Lagerkosten pro ZE größer ist als die Verminderung der Rüstkosten pro ZE.

$$\Delta H_{\tau, \tau+1} > \Delta U_{\tau, \tau+1} \quad (10)$$

Die Losgröße für die Periode t ergibt sich dann wie folgt:

$$x_t = \sum_{i=1}^{\tau^*} d_{t+tbd_{i-1}^{cum}} \quad (11)$$

Durch weitere Umformungen ergibt sich das folgende Verhältnis:

$$\frac{tbd_{\tau}^{cum} \cdot H_{t+\tau+1} - tbd_{\tau+1}^{cum} \cdot H_{t+\tau}}{tbd_{\tau}^{cum} \cdot tbd_{\tau+1}^{cum}} \quad (12)$$

Dabei stellt $H_{t+\tau}$ die Lagerkosten bei einer Reichweite der Losgröße von τ Bedarfszyklen dar:

$$H_{t+\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} tbd_{i-1}^{cum} \cdot h \cdot d_{t+tbd_{i-1}^{cum}} \quad (13)$$

$H_{t+\tau+1}$ betrachtet die Lagerhaltungskosten inklusive des Bedarfszyklus $\tau+1$:

$$H_{t+\tau+1} = H_{t+\tau} + tbd_{\tau}^{cum} \cdot h \cdot d_{t+tbd_{\tau}^{cum}} \quad (14)$$

Das neue (exakte) Groff-Abbruchkriterium (auch) für den sporadischen Bedarf

ergibt sich dann wie folgt:

$$tbd_{\tau}^{cum} \cdot H_{t+\tau+1} - tbd_{\tau+1}^{cum} \cdot H_{t+\tau} > tbd_{\tau+1} \cdot U \quad (15)$$

Für den Fall gleich langer Bedarfszyklen tbd und einem konstanten Bedarf d in Perioden mit positiven Bedarfen kann die obige Gleichung vereinfacht werden, sodass folgende Gleichung für die Erhöhung der Lagerhaltungskosten resultiert:

$$\Delta H_{\tau, \tau+1} = \frac{\tau \cdot (\tau + 1) \cdot h \cdot d}{2 \cdot (\tau + 1) \cdot \tau} \quad (16)$$

Angemerkt sei hier, dass zur Herleitung des ursprünglichen Groff-Abbruchkriteriums ebenfalls ein konstanter Periodenbedarf unterstellt wird (siehe z.B. Baciarello et al. 2013). Die Gleichung zur Berechnung der Rüstkostenerhöhung kann wie folgt angepasst werden:

$$\Delta U_{\tau, \tau+1} = \frac{U}{tbd \cdot (\tau + 1) \cdot \tau} \quad (17)$$

Die Kombination der beiden Gleichungen führt zu dem modifizierten Groff-Abbruchkriterium (auch) für den sporadischen Bedarf, das eine starke Ähnlichkeit zum ursprünglichen Groff-Abbruchkriterium aufweist:

$$\frac{1}{2} \cdot tbd \cdot h \cdot d > \frac{U}{\tau^* \cdot (\tau^* + 1)} \quad (18)$$

In einem letzten Schritt ist die obige Formel auf den dynamischen Bedarf zu übertragen, so dass sich das modifizierte, approximierte Groff-Abbruchkriterium (auch für den sporadischen Bedarf) ergibt:

$$\frac{1}{2} \cdot tbd_{\tau^*} \cdot h \cdot d_{t(\tau^*+1)} > \frac{U}{\tau^* \cdot (\tau^* + 1)} \quad (19)$$

mit

τ^*	Anzahl der Bedarfszyklen, die das aktuelle Los überdeckt
$t(\tau^* + 1)$	Periode, in der der positive Bedarf des Bedarfszyklus $\tau^* + 1$ liegt
tbd_{τ^*}	Dauer des letzten Bedarfszyklus, den das aktuelle Los überdeckt

2.2 Ein numerisches Beispiel

Die Anwendung der Groff-Heuristik soll anhand eines numerischen Beispiels verdeutlicht werden. Unterschieden werden die ursprüngliche Groff-Heuristik und die modifizierte Groff-Heuristik. Als Lagerkostensatz wird $h = 0,01$ und als Rüstkostensatz $U = 100$ gewählt. Die (sporadischen) Periodenbedarfe innerhalb des Planungszeitraums $T = 15$ sowie die erzielten Lösungen können den beiden nachfolgenden Tabellen entnommen werden.

Losnr.	t	tstart	τ	tbd_τ	tbd_τ^{cum}	$d_t > 0$	Zusätzl. Lagerkosten $0.5 \cdot tbd_\tau \cdot h \cdot d_{t(\tau+1)}$	Anteil der Rüstkosten $sc / (\tau \cdot (\tau + 1))$	Abbruchkrit. erfüllt	Losgröße q	Lagerkosten	Rüstkosten
1. Los	1	1	1	6	6	1000	21,0000	50,0000	< false	2100	0	100
	7		2	3	9	700	6,0000	16,6667	< false		42	
	10		3	5	0	400	25,0000	8,3333	> true		36	
2. Los	15	15	1			1000	0,0	50,0000	< false	1000		100
Summe											78	200
Gesamt												278

Tabelle 1: Losbildung mit der modifizierten Groff-Heuristik

Losnr.	t	tstart	τ^p	d_t	Zusätzl. Lagerkosten $0.5 \cdot h \cdot d_{\tau^p+1}$	Anteil der Rüstkosten $sc/(\tau^p \cdot (\tau^p + 1))$	Abbruchkrit.	Losgröße q	Lagerkosten	Rüstkosten	
1. Los	1	1	1	1000	0,000	50,0000	< false	1000	0	100	
	2		2	0	0,0000	16,6667	"				
	3		3	0	0,0000	8,3333	"				
	4		4	0	0,0000	5,0000	"				
	5		5	0	0,0000	3,3333	"				
	6		6	0	3,5000	2,3810	> true				
2. Los	7	7	1	700	2,0000	50,0000	< false	1100		100	
	8		2	0	0,0000	16,6667	"				
	9		3	0	2,0000	8,3333	"				
	10		4	400	0,0000	5,0000	"		12		
	11		5	0	0,0000	3,3333	"				
	12		6	0	0,0000	2,3810	"				
	13		7	0	0,0000	1,7857	"				
	14		8	0	5,0000	1,3889	< true				
3. Los	15	15	1	1000	0,0000	50,0000	< false	1000	0	100	
									Summe	12	300
									Gesamt		312

Tabelle 2: Losbildung mit der ursprünglichen Groff-Heuristik

Ein Vergleich der Lösungen der beiden Heuristiken zeigt, dass die ursprüngliche Groff-Heuristik drei Lose im Planungszeitraum mit Rüstkosten von 300 [GE] bei relativ geringen Lagerkosten 12 [GE] vorsieht. Die modifizierte Groff-Heuristik schlägt hingegen zwei Lose vor und führt zu Rüst- und Lagerkosten von 278 [GE]. Die ursprüngliche Groff-Heuristik verursacht demnach Mehrkosten von 12,2%.

2.3 Vergleich der Abbruchkriterien

Vergleicht man nun das ursprüngliche Groff-Abbruchkriterium

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot d_{t^{start} + \tau^{p^*}} > \frac{U}{\tau^{p^*} \cdot (\tau^{p^*} + 1)} \quad (20)$$

mit dem neuen, modifizierten Abbruchkriterium (Ungleichung (19)) so erkennt man, dass beide für regelmäßigen Bedarf (ohne Nullbedarfsperioden) identisch sind. In dem ursprünglichen Groff-Abbruchkriterium wird die Anzahl der Perioden τ^{p^*} und die Dauer des (letzten) Bedarfszyklus $tbd_t(\tau^*)$ mit einer Periode (ZE) zugrunde gelegt, während in das modifizierte Groff-Abbruchkriterium die Anzahl der überdeckten Bedarfszyklen eingehen. Bei regelmäßigem Bedarf (ohne Nullbedarfsperioden) entspricht die Anzahl der Bedarfszyklen der Anzahl der Perioden innerhalb der Reichweite eines Loses. Die Abbruchkriterien unterscheiden sich daher bei regelmäßigem Bedarf nicht. Bei sporadischem Bedarf ist die Anzahl der Bedarfszyklen hingegen kleiner als die Anzahl der Perioden innerhalb der Reichweite eines Loses. Das modifizierte Groff-Abbruchkriterium „ignoriert“ Nullbedarfsperioden und führt daher zu Losen mit tendenziell längeren Reichweiten.

Um sowohl für den regelmäßigen als auch für den sporadischen Bedarf eine hohe Lösungsgüte zu erzielen, sind lediglich zwei Änderungen an der ursprünglichen Groff-Heuristik vorzunehmen. Zum einen müssen vor Beginn der myopischen Losbildung die innerhalb des Planungszeitraums liegenden Bedarfszyklen ermittelt werden. Zum anderen ist das ursprüngliche Groff-Abbruchkriterium durch das obige modifizierte Groff-Abbruchkriterium (19) zu ersetzen. Die neue, modifizierte Groff-Heuristik weist daher - wie auch die ursprüngliche Groff-Heuristik - eine lineare Rechenzeitkomplexität $\mathcal{O}(T)$ auf.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben ein modifiziertes Groff-Abbruchkriterium hergeleitet, das sowohl für den regelmäßigen als auch den sporadischen Bedarf ausgelegt ist. Grundidee ist hierbei die Betrachtung von Bedarfszyklen an Stelle einzelner Perioden. Ein Bedarfszyklus beginnt stets mit einem positiven Bedarf und endet in der Vorperiode des nächstfolgenden positiven Bedarfs. Auf einen positiven Bedarf können sich eine oder mehrere Nullbedarfsperioden anschließen.

Wir konnten zeigen, dass sich das ursprüngliche Groff-Abbruchkriterium als Spezialfall des neuen, modifizierten Groff-Abbruchkriteriums interpretieren lässt, sofern Bedarfszyklen ohne Nullbedarfsperioden vorliegen. Mithin hat das neue, modifizierte Groff-Abbruchkriterium bei regulärem Bedarf die gleiche Lösungsgüte wie das ursprüngliche Groff-Abbruchkriterium.

Zukünftige Forschung sollte die Lösungsgüte der neuen, modifizierten Groff-Heuristik insbesondere für sporadische Bedarfsverläufe untersuchen. Interessant wäre auch die Betrachtung von “nahezu” sporadischen Bedarfen, d.h. solchen, bei denen auf Perioden mit relativ großen Bedarfen Perioden mit relativ geringen Bedarfen folgen. Diese Bedarfsmuster entstehen bei zyklischer Belieferung von Großabnehmern bei gleichzeitiger täglicher Erfüllung von relativ kleinen Ersatzteilbedarfen.

Danksagung

Ich danke Johanna Dujesiefken und Jonas Martynkiewicz für die Unterstützung bei der Erstellung des Working Papers.

Literatur

Baciarello, L., D’Avino, M., Onori, R., Schiraldi, M. M., Lot sizing heuristics performance, International Journal of Engineering Business Management 5 (2013), 1 - 18

DeMatteis, J.J., An economic lot-sizing technique I, The part-period algorithm, IBM Systems Journal 7 (1968), 30 - 38

Groff, G.K., A Lot sizing rule for time-phased component demand. Production & Inventory Management 20, Nr. 1 (1979), 47 - 53

Knolmayer, G., The performance of lot sizing heuristics in the case of sparse demand patterns, working paper, Universität Kiel (1986)

Silver, E.A., Meal, H.C., A heuristic for selecting lot size quantities for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment, *Production & Inventory Management* 14.2 (1973), 64 - 74

Silver, E.A., Miltenburg, J., Two modifications of the Silver-Meal lot sizing heuristic, *INFOR* 22 (1984), 56 - 69

Wagner, H.M., Whitin, T.M., Dynamic version of the economic lot size model, *Management Science* 5 (1958), 89 - 96

Yilmaz, C., Incremental order quantity for the case of very lumpy demand, *International Journal of Production Economics* 26 (1992), 361 - 311