

Numerische Simulation für Asset-Liability Management von Lebensversicherungsunternehmen

Thomas Gerstner

Mathematisches Institut
Goethe-Universität Frankfurt am Main

5. Symposium: Neue Herausforderungen an das Risikomanagement
Hamburger Zentrum für Versicherungswissenschaft
2.–3. Dezember 2010

Überblick

- 1 Asset-Liability Management im Versicherungswesen
 - Asset-Liability Management
 - Modellierung
 - Numerische Simulation
- 2 Numerische Ergebnisse
 - Benchmark-Problem
 - Modelleigenschaften
 - Numerische Konvergenz
- 3 Schlussbemerkungen

Übersicht

- 1 Asset-Liability Management im Versicherungswesen
 - Asset-Liability Management
 - Modellierung
 - Numerische Simulation
- 2 Numerische Ergebnisse
 - Benchmark-Problem
 - Modelleigenschaften
 - Numerische Konvergenz
- 3 Schlussbemerkungen

Asset-Liability Management

BMBF Förderschwerpunkt Mathematik für
Innovationen in Industrie und Dienstleistungen

Forschungsprojekt: Numerische Simulation für Asset-
Liability Management im Versicherungswesen

Kooperationspartner:

- Universität Bonn: T. Gerstner, M. Griebel
- Zurich Gruppe Deutschland: M. Haep

Projektziele:

- Entwicklung eines **mathematischen Modells** zur Simulation der zukünftigen Bilanzentwicklung von Lebensversicherungs-Produkten
- Implementierung des Modells mit **effizienten numerischen Methoden** (Monte Carlo, quasi-Monte Carlo, Dünne Gitter)



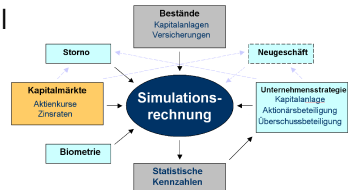
Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn



Asset-Liability Management

Ziel: Analyse und Optimierung des **gleichzeitigen** Managements der Aktiva und Passiva eines Lebensversicherungsunternehmens

- das verfügbare Kapital soll so profitabel wie möglich investiert werden
- die Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern müssen eingehalten werden



Beispiel: Portfolio von Lebensversicherungspolicen

- Versicherungsnehmer zahlen Beiträge und erhalten einen **festen garantierten Betrag** im Todesfall oder bei Vertragsende
- zusätzlich erhalten sie eine **variable Gewinnbeteiligung**, die vom Unternehmen in jedem Jahr im Voraus deklariert wird
- das Kapital wird in Anleihen und Aktien investiert

Modellierung

Zeitdiskreter Rahmen: Simulationszeitraum $[0, T]$ wird in M Perioden $(t_{k-1}, t_k]$ unterteilt

Vereinfachte Bilanz des Versicherungsunternehmens:

Aktiva		Passiva	
Kapital	C_k	Deckungskapital	D_k
		Laufende Überschüsse	B_k
		Freie Reserve	F_k
		Eigenkapital	Q_k

Performance- und Risiko-Kennzahlen:

$$E[Q_k], \text{ Var}[Q_k], P\left(\min_{j \leq k} Q_j < 0\right), \dots$$

Modellierung

Deterministische Modellkomponenten:

- **Kapitalallokation:** konstante Zielaktienquote, buy-and-hold-Strategie
- **Aktionärsbeteiligung:** 90/10 - Regel
- **Bonusdeklaration:** (Grosen, Jorgensen, 2000)

$$z_k = \max \left\{ z, \omega \left(\frac{F_{k-1}}{D_{k-1} + B_{k-1}} - \gamma \right) \right\}$$

z Garantiezins, γ Ziel-Reserverate, $\omega \in [0, 1]$ Beteiligungsrate

- **Storno:** Storno-Tafeln basierend auf Erfahrungswerten
- **Biometrie:** Sterblichkeitstafeln
- **Neugeschäft:** nicht betrachtet

Modellierung

Stochastisches Kapitalmarktmodell:

- Zinssatz für kurzfristige Anleihen r_t und Aktienkurs s_t zur Zeit t
- kontinuierlich modelliert durch Korrelierung eines CIR-Zinsmodells mit geometrischer Brownscher Bewegung

$$\begin{pmatrix} dr_t \\ ds_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa(\theta - r_t) \\ \mu s_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_r \sqrt{r_t} & 0 \\ \rho \sigma_s s_t & \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_s s_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^r \\ dW_t^s \end{pmatrix}$$

- Euler-Maruyama Diskretisierung $\rightsquigarrow$ diskrete Zinssätze r_k und Aktienkurse s_k zur Zeit t_k

$$\begin{aligned} r_k &= r_{k-1} + \kappa(\theta - r_{k-1})\Delta t + \sigma_r \sqrt{r_{k-1}} \sqrt{\Delta t} \xi_{r,k} \\ s_k &= s_{k-1} \exp\{(\mu - \sigma_s^2/2)\Delta t + \sigma_s \sqrt{\Delta t}(\rho \xi_{r,k} + \sqrt{1 - \rho^2} \xi_{s,k})\} \end{aligned}$$

Modellierung

Aktiva-Modell

$$\begin{aligned} \text{Zinsrate} \quad r_k &= r_{k-1} + \kappa (\theta - r_{k-1}) \Delta t + \sigma_r \sqrt{|r_{k-1}|} \sqrt{\Delta t} \xi_{r,k} \\ \text{Aktienkurs} \quad s_k &= s_{k-1} \exp \left\{ \left(\mu - \sigma_s^2 / 2 \right) \Delta t + \sigma_s \sqrt{\Delta t} \left(\rho \xi_{r,k} + \sqrt{1 - \rho^2} \xi_{s,k} \right) \right\} \\ \text{Bondpreise} \quad b_k(\tau) &= A(\tau) \exp \{ -B(\tau) r_k \} \end{aligned}$$

Management-Modell

$$\begin{aligned} \text{Investition in Aktien} \quad A_k &= \max \left\{ \min \left\{ C_{k-1} + P_k - \sum_{i=1}^{\tau-1} n_{k-i} b_{k-1}(\tau-i), \beta(C_{k-1} + P_k) \right\}, 0 \right\} \\ \text{Anzahl neuer Bonds} \quad n_k &= \left(C_{k-1} + P_k - \sum_{i=1}^{\tau-1} n_{k-i} b_{k-1}(\tau-i) - A_k \right) / b_{k-1}(\tau) \\ \text{Portfoliozins} \quad p_k &= \left((s_k / s_{k-1} - 1) + \sum_{i=0}^{\tau-1} n_{k-i} (b_k(\tau-i-1) - b_{k-1}(\tau-i)) \right) / (C_{k-1} + P_k) \\ \text{Kundenzins} \quad z_k &= \max \{ z, \omega (F_{k-1} / (D_{k-1} + B_{k-1}) - \gamma) \} \end{aligned}$$

Passiva-Modell (für jeden Vertrag $i = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \text{Zahl der Verträge} \quad \delta_k^i &= (1 - q_k^i - \sigma_k^i) \delta_{k-1}^i \\ \text{Deckungskapital} \quad D_k^i &= \left((1 + z) (D_{k-1}^i + P_k^i) - q_k^i T_k^{i,G} \right) / (1 - q_k^i) - E_k^{i,G} \\ \text{Laufende Überschüsse} \quad B_k^i &= \left((1 + z_k) B_{k-1}^i + (z_k - z) (D_{k-1}^i + P_k^i) - q_k^i T_k^{i,G} \right) / (1 - q_k^i) - E_k^{i,B} \end{aligned}$$

Bilanzprojektion

$$\begin{aligned} \text{Kapital} \quad C_k &= (1 + p_k)(C_{k-1} + P_k) - E_k - T_k - S_k \\ \text{Deckungskapital} \quad D_k &= (1 + z)(D_{k-1} + P_k) - E_k^G - T_k^G - S_k^G / \vartheta \\ \text{Laufende Überschüsse} \quad B_k &= (1 + z_k)B_{k-1} + (z_k - z)(D_{k-1} + P_k) - E_k - T_k - S_k \\ \text{Freie Reserve} \quad F_k &= \max \{ (1 + \alpha p_k)F_{k-1} + \alpha(p_k - z_k)(D_{k-1} + B_{k-1} + P_k) + \alpha(1/\vartheta - 1)S_k, 0 \} \\ \text{Eigenkapital} \quad Q_k &= C_k - M_k - F_k \end{aligned}$$

(G. et al 2008)

Numerische Simulation

Numerische Simulation:

- Berechnung von Performance- und Risikokennzahlen, z.B. $E[Q_k]$, erfordert die Durchführung vieler Simulationsläufe
 - Optimierung von Managementregeln und Produktparametern erfordert viele Berechnungen solcher Kennzahlen
- **hohe Komplexität**, man braucht **effiziente numerische Methoden**

Beispiel: Eigenkapital $Q_k = Q_k(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2k}) \sim N(0, \text{Id})$:

$$E[Q_k] = \int_{\mathbb{R}^{2k}} Q_k(\mathbf{x}) \frac{e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x} / 2}}{(2\pi)^k} d\mathbf{x} = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

monatliche Beiträge, $T = 10$ Jahre → **$d = 240$** -dimensionales Integral

Numerische Simulation

- Random Walk: $W_{t_j} = W_{t_{j-1}} + \sqrt{\Delta t} x_j$,

$$x_j \sim N(0, 1)$$

- Brownsche Brücke:

$$W_T = \sqrt{T} x_1$$

$$W_{T/2} = 1/2(W_0 + W_T) + \sqrt{T/4} x_2$$

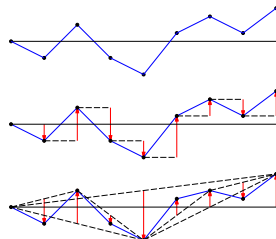
$$W_{T/4} = 1/2(W_0 + W_{T/2}) + \sqrt{T/8} x_3$$

$\vdots$

- PCA-Konstruktion:

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_d} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

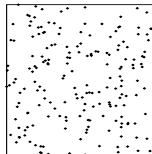
wobei $\mathbf{C} = (\sqrt{\lambda_1} v_1, \dots, \sqrt{\lambda_d} v_d)$ die Eigenwerte und -vektoren der Kovarianzmatrix $\text{Cov}(W_{t_i}, W_{t_j})$ enthält



Numerische Simulation

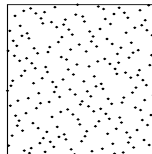
Numerische Methoden für mehrdimensionale Integrale:

$$\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^N w_i f(\mathbf{x}_i)$$



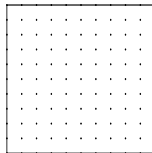
Monte Carlo

$\mathbf{x}_i$ zufällig
beschr. Varianz
 $\epsilon(N) = O(N^{-1/2})$



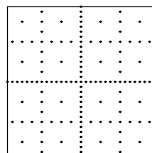
quasi-Monte Carlo

$\mathbf{x}_i$ Niederdiskrepanz-Folge
beschr. Variation
 $\epsilon(N) = O(N^{-1}(\log N)^d)$



Produkt-Ansatz

$\mathbf{x}_i$ Produktgitter
s beschr. Ableit.
 $\epsilon(N) = O(N^{-s/d})$

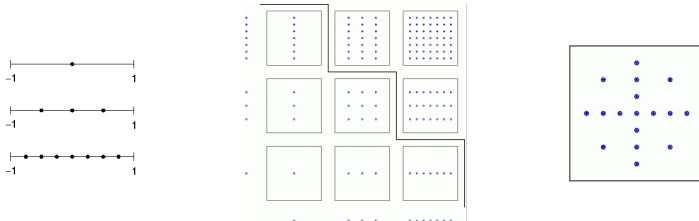


Dünne Gitter

$\mathbf{x}_i$ spezielles Produktgitter
s beschr. gem. Ableitungen
 $\epsilon(N) = O(N^{-s}(\log N)^{(d-1)(s+1)})$

Numerische Simulation

Klassische Dünne Gitter: $Q_k^{(d)}(f) = \sum_{|i| \leq d+k-1} (\Delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{i_d})(f)$
wobei $|i| = i_1 + \dots + i_d$
und $\Delta_i = Q_i^{(1)} - Q_{i-1}^{(1)}$ Differenzen eindimensionaler Quadraturformeln

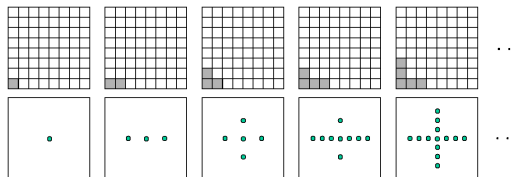


(Smolyak 1963, Novak, Ritter 1996, G., Griebel 1998)

Numerische Simulation

Verallgemeinerte Dünne Gitter: $Q_k^{(d)}(f) = \sum_{i \in \mathcal{I}_k} (\Delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{i_d})(f)$
mit Indexmengen $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$

Dimensions-adaptive Dünne Gitter (G., Griebel 2003) finden angepasste Indexmengen $\mathcal{I}_k$ mit Hilfe geeigneter Fehlerschätzer



→ räumlich adaptive Dünne Gitter (Bonk 1994, Bungartz, Dirnstorfer 2003)

Numerische Simulation

Klassische Dünne Gitter:

- verdopple die Zahl der eindimensionalen Punkte zwischen Leveln
- Zahl der Dünngitter-Punkte: $N = O(2^l d^{-1})$
- Quadraturfehler: $O(N^{-s}(\log N)^{(d-1)(s+1)})$
- Glattheits-Voraussetzung:

$$W_d^s = \left\{ f : \left\| \frac{\partial^{|u|} f}{\partial x_1^{u_1} \dots \partial x_d^{u_d}} \right\|_{\infty} < \infty, u_i \leq s \right\}$$

Dimensions-adaptive Dünne Gitter:

- können Verhältnis von Aufwand zu Genauigkeit optimieren
- können wichtige von unwichtigen Dimensionen unterscheiden
- können eine **niedrige effektive Dimension** des Problems nutzen

Übersicht

1 Asset-Liability Management im Versicherungswesen

- Asset-Liability Management
- Modellierung
- Numerische Simulation

2 Numerische Ergebnisse

- Benchmark-Problem
- Modelleigenschaften
- Numerische Konvergenz

3 Schlussbemerkungen

Benchmark-Problem

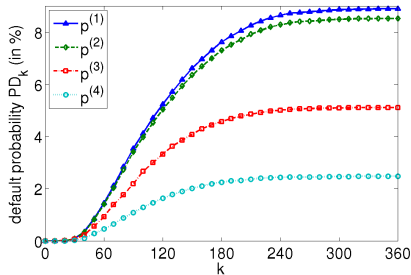
Benchmark-Problem:

- **Beispielprodukt:** Erlebensfallversicherung mit Beitragsrückgewähr im Todesfall (Garantiezins $z = 3\%$, Stornofaktor $\vartheta = 90\%$)
- **Verträge:** Realitätsnaher Testbestand der Zürich Gruppe Deutschland: 46.719 Verträge auf 500 Modelpoints verdichtet
- **Biometrie:** DAV2004R Sterbetafel, laufzeitabhängige Storno-WS
- **Kapitalallokation:** Aktienquote $\beta = 10\%$, Bondlaufzeit $\tau = 3$ Jahre
- **Überschussdeklaration:** Beteiligung 25%, Zielreserverate $\gamma = 15\%$
- **Kapitalmärkte:** Parameter für geometrische Brownsche Bewegung und CIR-Modell geschätzt für den deutschen Markt

Modelleigenschaften

Einfluss von Storno (-gebühren):

Ruinwahrscheinlichkeiten: $PD_k = (\min_{j \leq k} Q_j < 0)$



$p^{(1)}$: reiner Sparvertrag

$p^{(2)}$: Erlebensfallversicherung
mit Beitragsrückzahlung
im Todesfall

$p^{(3)}$: wie $p^{(2)}$ + Stornooption

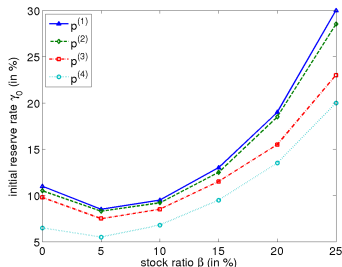
$p^{(4)}$: wie $p^{(3)}$ + 10% Stornogebühr

Storno führt zu einer Reduktion der Ruinwahrscheinlichkeiten

Modelleigenschaften

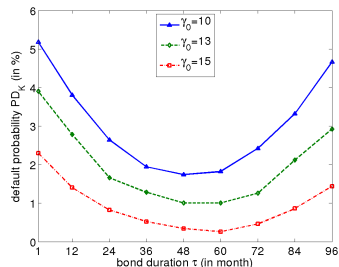
Sensitivitäten:

Diversifikationseffekte und Liquiditätsrisiko:



Kombinationen von Zielaktienquote und Reservequote, so dass $PD_{120} = 5\%$

Optimale Aktienquote: 5%



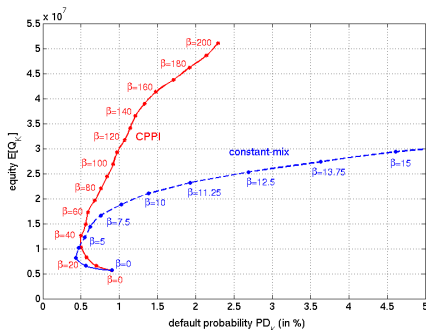
PD_{120} in Abhängigkeit von der Laufzeit der Anleihen für verschiedene Reservequoten γ_0

Optimale Laufzeit der Anleihen abhängig von Reservequote

Modelleigenschaften

Kapitalanlagestrategie:

Risiko-Ertrags-Profile: erwartetes Eigenkapital vs. Ruin-Ws.

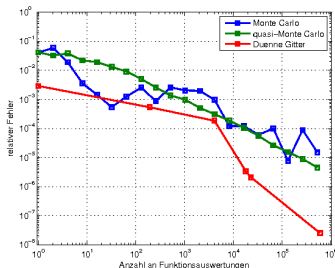
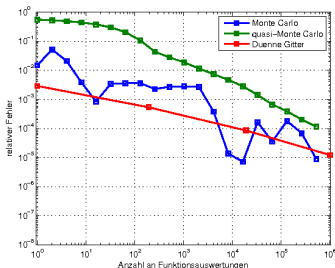


Strategie 1 (constant-mix): konstante Zielaktienquote

Strategie 2 (CPPI): Aktienquote gekoppelt an Höhe der Reserven

Numerische Konvergenz

- Simulation eines Szenarios (32 Perioden): ≈ 0.1 Sekunden



- Anforderung: 5 Stellen Genauigkeit

	ohne Brown. Brücke / dim-ad. Verf.			mit Brown. Brücke / dim-ad. Verf.		
	Konv.rate	# Fkt.	Zeit	Konv.rate	# Fkt.	Zeit
MC	0.5	$4.5 \cdot 10^6$	5.2 Tage	0.5	$4.5 \cdot 10^6$	5.2 Tage
QMC	0.79	$1.1 \cdot 10^7$	12.7 Tage	0.82	$2.6 \cdot 10^5$	7.2 Std.
DG	0.41	$1.3 \cdot 10^6$	36 Std.	1.72	$1.4 \cdot 10^4$	23 Min.

Überblick

1 Asset-Liability Management im Versicherungswesen

- Asset-Liability Management
- Modellierung
- Numerische Simulation

2 Numerische Ergebnisse

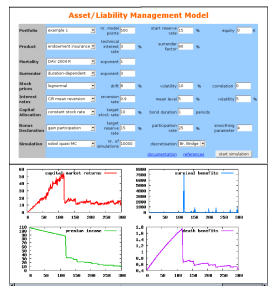
- Benchmark-Problem
- Modelleigenschaften
- Numerische Konvergenz

3 Schlussbemerkungen

Zusammenfassung

Asset-Liability Management:

- zeitdiskrete Modellierung
- stochastische Kapitalmärkte
- deterministische Modellbildung
- effiziente numerische Simulation
- Ermittlung von Risikokennzahlen, ...



Patent:

Method and device for the valuation of financial derivatives using sparse grids by G. and Griebel (US patent no. 7536327)
(vgl. Patent zu QMC in Finanzanwendungen, J. Traub et al., Columbia Univ.)

Literatur

Dünne Gitter:

- T. Gerstner, M. Griebel: Numerical integration using sparse grids. *Numerical Algorithms* **18(3-4)**:209-232, 1998.
- T. Gerstner, M. Griebel: Dimension-adaptive tensor-product quadrature. *Computing* **71(1)**:65-87, 2003.
- T. Gerstner, M. Griebel: Sparse grids. In Encyclopedia of Quantitative Finance, J. Wiley & Sons, 2010.

Asset-Liability Management:

- T. Gerstner, M. Griebel, M. Holtz, R. Goschnick, M. Haep: A general asset-liability management model for the efficient simulation of portfolios of life insurance policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, **42(2)**:704-716, 2008.
- T. Gerstner, M. Griebel, M. Holtz: The effective dimension of asset-liability management models in life insurance. In Proc. Third Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance, pages 148–153, 2007.
- T. Gerstner, M. Griebel, M. Holtz, R. Goschnick and M. Haep: Numerical simulation for asset-liability management in life insurance. In Mathematics – Key Technology for the Future, pages 319-341. Springer, 2008.
- T. Gerstner, M. Griebel, M. Holtz: Efficient deterministic numerical simulation of stochastic asset-liability management models in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, **44(3)**:434–446, 2009.

Weitere Informationen:

<http://gcsc.uni-frankfurt.de/computational-finance>