

Langlebigkeitsbonds

Neue Produkte zur Absicherung des Langlebigkeitsrisikos ?

Ralf Korn

Technische Universität Kaiserslautern
Fraunhofer ITWM Kaiserslautern



Fraunhofer Institut
Techno- und
Wirtschaftsmathematik



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Langlebigkeit – Was nun ?

Gliederung:

- **Mortalitätsmodellierung: Historischer Überblick**
- **Mortalität und Langlebigkeit: Einige Daten**
- **Mortalitätsmodellierung heute:
Dynamische stochastische Mortalitätsmodelle**
- **Langlebigkeitsbonds, Langlebigkeitsindices und Co.**
- **Bewertung von Langlebigkeitsbonds**
- **Patentrezepte ?**

1. Mortalitätsmodellierung: Ein historischer Überblick

(unvollständig, basiert auf Pitaccio (2005) *Survival models in actuarial mathematics*)

Klassisches Problem eines Lebensversicherers:

„Wie hoch sind die (im nächsten Jahr) an die Versicherten zu leistenden Zahlungen?“

„Antwort“: Starkes Gesetz der großen Zahl

⇒ Ist p die Überlebenswahrscheinlichkeit eines „typischen Versicherten“, so gilt

$$\boxed{Z \approx p \cdot N \cdot z} \quad (\pm 2 p(1-p)z\sqrt{N})$$

wobei N = Anzahl der Versicherten, z = jährliche (Renten-)Zahlung.

Aber:

Es gibt keinen typischen Versicherten, die Überlebensw-keit hängt stark vom Alter des einzelnen Versicherten ab !

1. Mortalitätsmodellierung: Ein historischer Überblick

-2-

Alterung, Lebensdauer und Mortalitätsmodellierung: *Ein historischer Überblick*

- 1662: Erste detaillierte Untersuchung der Sterblichkeit der Londoner (Graunt)
- 1693: **Halley** erstellt die erste Sterbetafel (von Breslau)
- 1746: Deparcieux versucht eine Steigerung der Lebenserwartung zu belegen
- 1766: **Bernoulli** untersucht Mortalitätsintensitäten $\mu(x)$
- 1772: Lambert drückt die „Exhaustion of man’s power“ in einer Formel aus
- 1798: Malthus entwickelt das Modell des exponentiellen Populationswachstums
- 1825: **Gompertz** schlägt exponentiell wachsende Mortalitätsintensitäten vor
- 1860: **Makeham** erlaubt „young mortality“ im Gompertz-Modell
- 1872: Thiele entwickelt ein erstes komplexes Lebenszeit-Modell für $\mu(x)$

Abstrakt:

Ein **Mortalitätsgesetz** ist ein mathematischer Ausdruck, der die Sterblichkeitsrate als Funktion des Alters des Individuums beschreibt.

$${}_i p_x = P(\text{Individuum überlebt die nächsten } i \text{ Jahre} \mid \text{Ind. hat das heutige Alter } x)$$

Vorgehensweise:

Definiere **Mortalitätsraten** über

$${}_i p_x = \exp \left(- \int_0^i \mu_{x+s} ds \right) :$$

$$\mu_x^{(G)} = \alpha e^{\beta x}, \quad \alpha, \beta > 0$$

Gompertz (1825)

$$\mu_x^{(M)} = \alpha e^{\beta x} + \gamma, \quad \alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0,$$

Makeham (1860)

$$\mu_x^{(T)} = \alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{-\beta_2 (x-\eta)^2} + \alpha_3 e^{\beta_3 x}, \quad \alpha_i, \beta_i, \eta \geq 0$$

Thiele (1872)

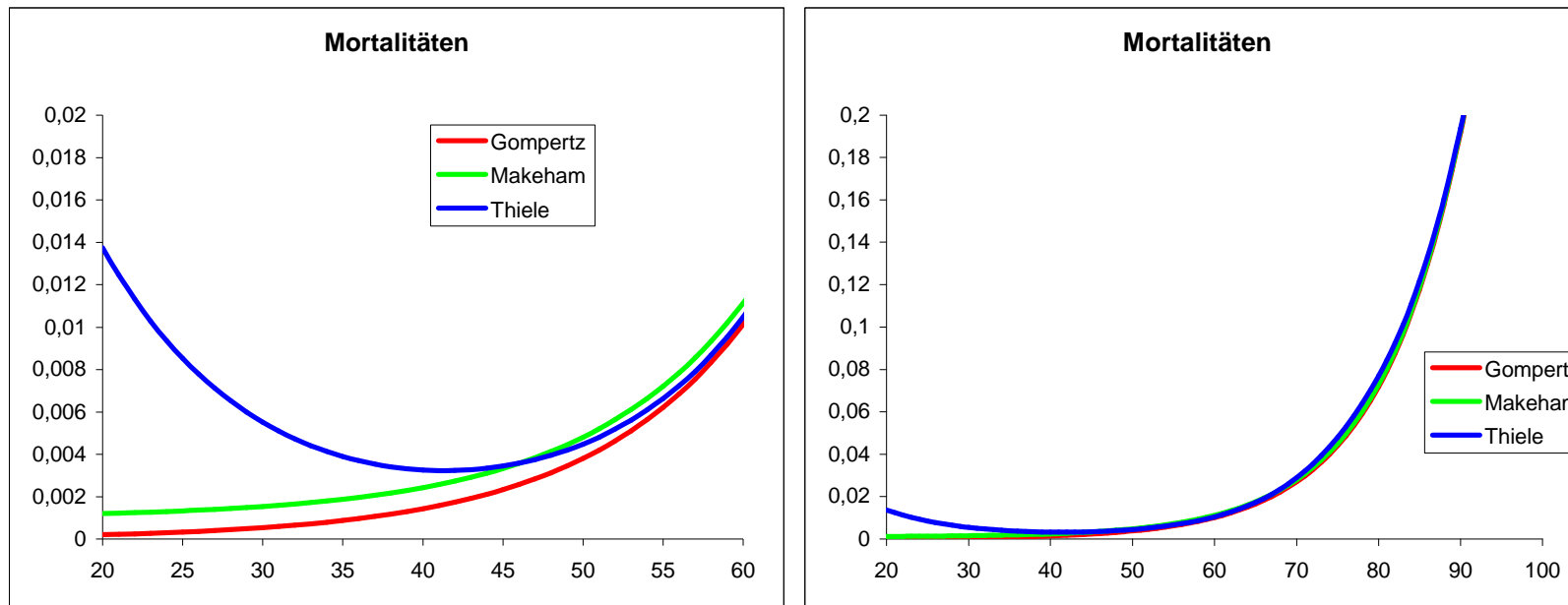
$$\mu_x^{(P)} = \frac{\alpha e^{\beta x} + \gamma}{1 + \delta e^{\beta x} + \varepsilon e^{-\beta x}}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \geq 0$$

Perks (1932)

1. Mortalitätsmodellierung: Ein historischer Überblick

-3-

Bilder der Mortalitätskurven (reale Daten bei Gompertz und Makeham)

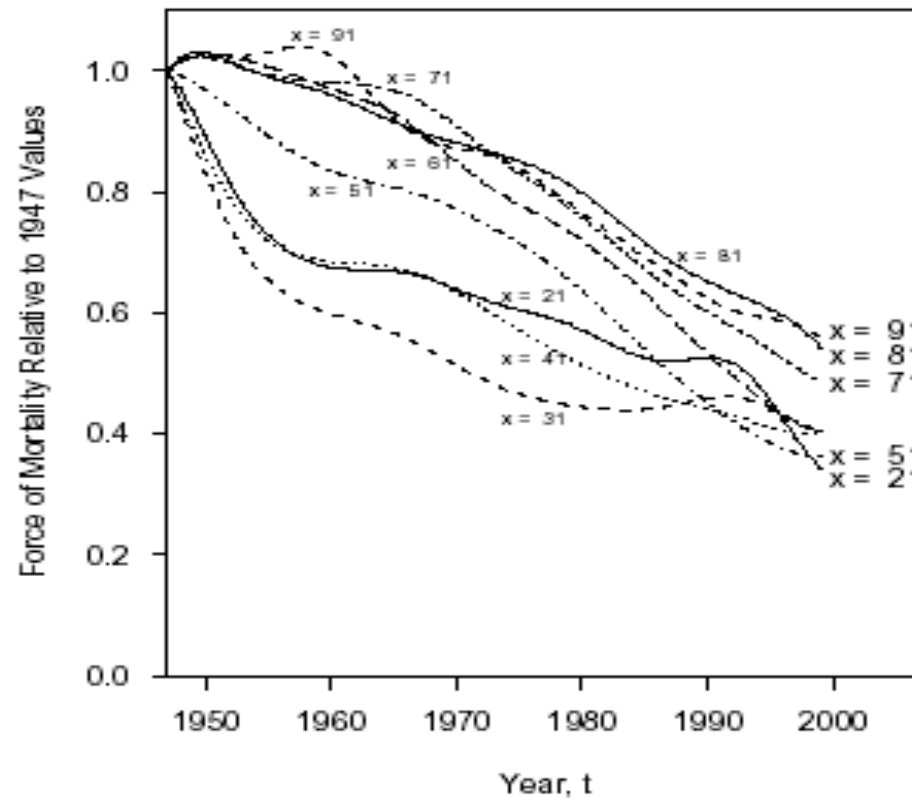


Beachte: „Zeit“ heißt hier immer „*Alter*“ und nicht „*Kalenderzeit*“

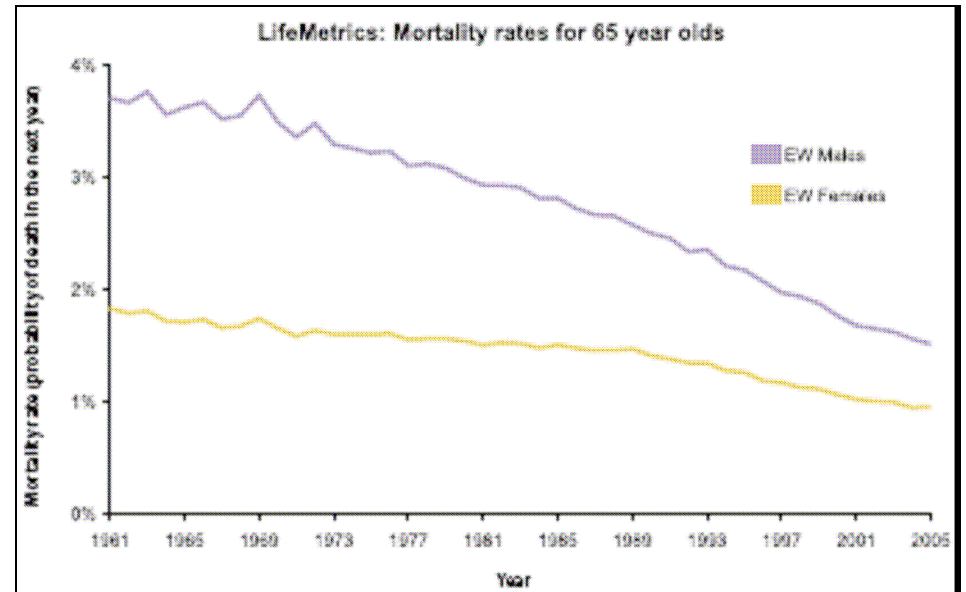
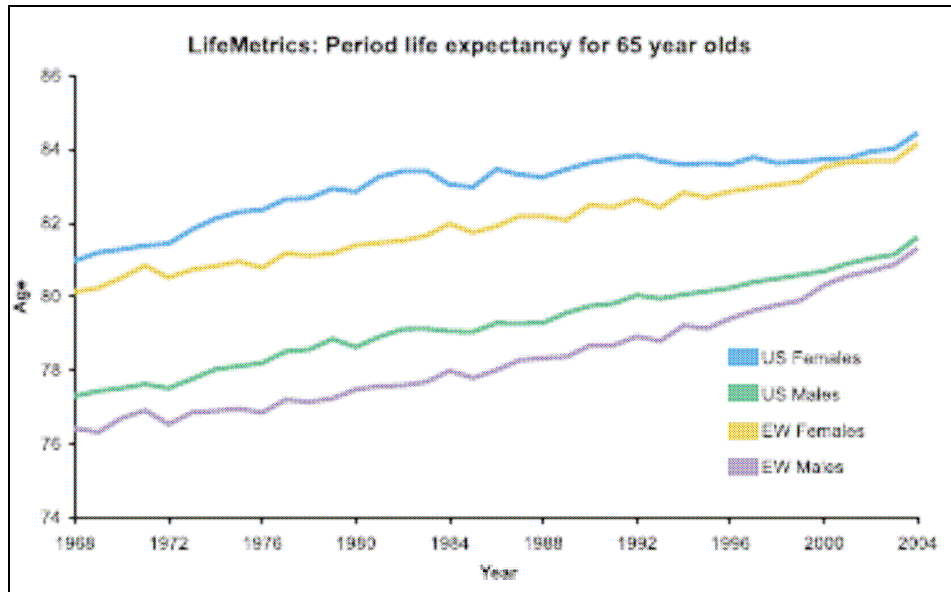
2. Mortalitätsentwicklung: Einige Daten

Beobachteter Trend: *Langlebigkeit*

(Mortalität (versicherter) britischer Männer zwischen 1947 und 1999)



Daten aus: **JPMorgan „Pension Alert April 2007“**



Eindeutige Tendenz: Die Mortalitätsraten sind *nicht konstant im Zeitablauf* !

Was ist zu tun ?

3. Mortalitätsmodellierung heute: Dynamische (stochastische) Mortalitätsmodelle

Ziel:

Finde eine Modellierung der Mortalitätsraten, die den Trend zur Langlebigkeit darstellen kann

Eine Möglichkeit:

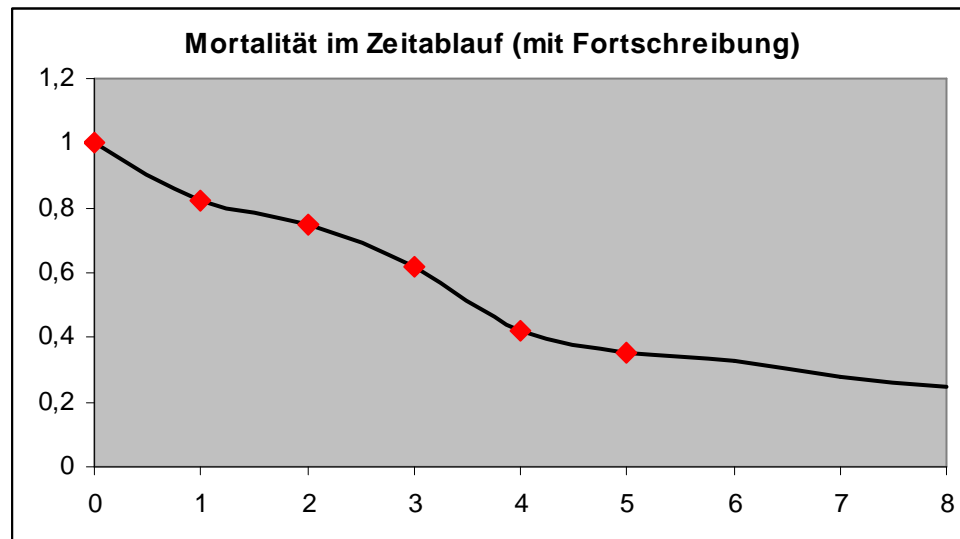
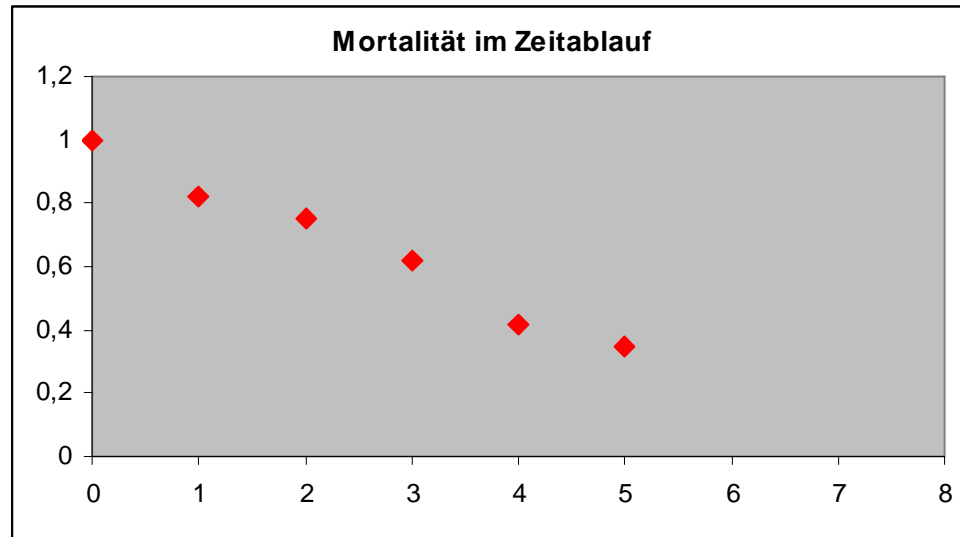
Finde ein Modell, in dem sich die Mortalitätsraten mit der **KALENDER**-Zeit ändern

⇒ **Dynamische Mortalität**

Eine Alternative (bzw. Konsequenz !):

⇒ **Generationssterbetafeln**

Einfache Möglichkeit: Fortschreibung („*Extrapolation*“)



Modellierung dynamischer Mortalitätsraten mittels Extrapolation

1. Fasse „*realisierte Überlebenswahrscheinlichkeiten*“

$$(1) \quad {}_i p_x(t) = \frac{\text{Anz. der zur Zeit } t+i \text{ (} x+i \text{)–Jähr.}}{\text{Anz. der zur Zeit } t \text{ } x\text{–Jährigen}}, \quad t \in \{-(i+1), -(i+2), \dots, -N_i\}$$

als Werte einer Funktion der Zeit auf

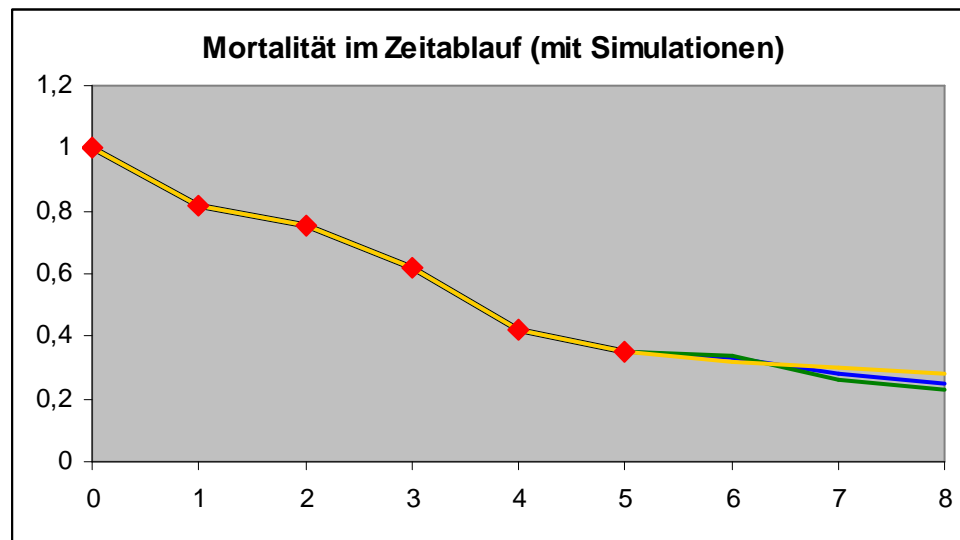
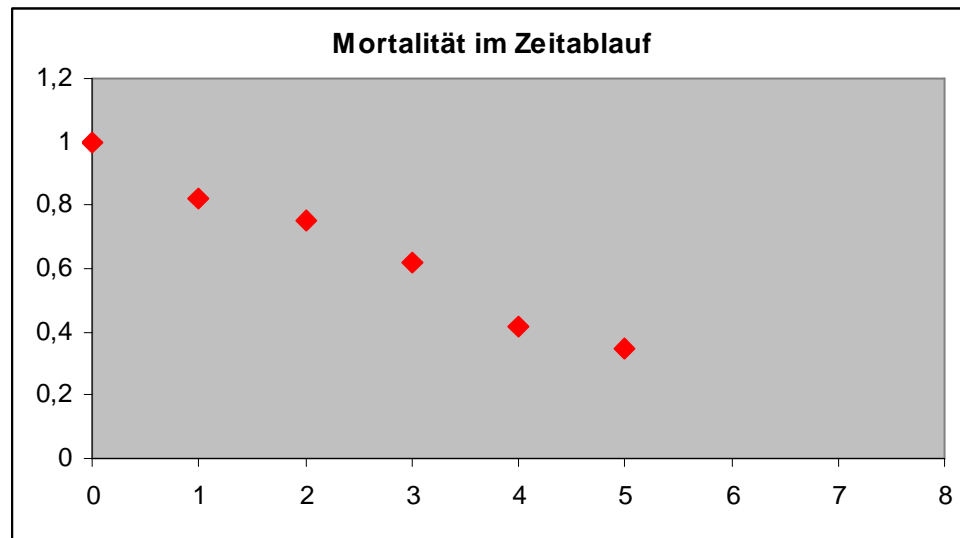
2. Approximiere die Funktion durch (z.B.) Spline- oder Polynominterpolation

3. Erhalte aus Interpolationsfunktion $f_x^{(i)}(.)$ (mit Extrapol.) die benötigten Schätzer

$$(2) \quad {}_i \hat{p}_x(0) = f_x^{(i)}(0), \quad i = 1, \dots, N$$

⇒ wird hier nicht weiter verfolgt (siehe Pitaccio (2005))

Weitere Möglichkeit: Stochastische Simulation



⇒ **Allgemeiner Algorithmus** (Grundidee nach Lee und Carter (1992))

Algorithmus: „**Stochastische Modellierung von Mortalitätsraten**“

0. Wähle eine *parametrisierte stochastische Form* für das zu verwendende Mortalitätsgesetz (bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeiten).
1. Bestimme aus vorhandenen Sterblichkeitsraten die *realisierten Mortalitätsraten* (bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten)
2. *Kalibriere den stochastischen Prozess*, der dem in 1. gewählten Mortalitätsgesetz zugrunde liegt, an die Zeitreihe der Mortalitätsraten (bzw. der Überlebenswahrscheinlichkeiten)
3. Verwende den Prozess zur *Simulation zukünftiger Mortalitätsraten*

Vorteile dieser Methode:

- zukünftige Mortalitätsszenarien durch Monte Carlo Simulationen beschreibbar
- Konfidenzintervalle für Überlebenswahrscheinlichkeiten

Modellansätze

1. Stochastisches Perks-Modell nach Cairns, Blake, Dowd (2005)

$p(t+1, t, t+1, x)$ = Anteil der in $t \geq 0$ lebenden Mitgliedern einer Kohorte, die zum Zeitpunkt 0 alle ein Alter von x hatten und auch $t+1$ erlebten.

Für jeden vergangenen Zeitpunkt t und alle vorhandenen Anfangsalter $x > 0$ bestimme die Werte $(A_1(t), A_2(t))$ mittels Kleinsten-Quadrate-Schätzung aus

$$\hat{p}(t+1, t, t+1, x) = \frac{1}{1 + e^{A_1(t+1) + A_2(t+1)(x+t)}}$$

wobei

$$A(t+1) = A(t) + v + CZ(t+1), \quad v \in \mathbb{R}^2, C \in \mathbb{R}^{2,2}, t = 0, 1, 2, \dots$$

C eine obere Dreiecksmatrix, Z -Prozess der Zuwächse einer zweidimensionalen Brownschen Bewegung zwischen t und $t+1$.

Interpretation

- A_1 -Prozess: zeitliche Entwicklung der allg., altersunabhängigen Sterblichkeit
- A_2 -Prozess: zeitliche Entwicklung der altersabhängigen Sterblichkeit

Noch zu erledigen:

Schätze die Parameter ν und C aus ihren Eigenschaften als Erwartungswert, Varianz und Kovarianz der Zuwächse des A-Prozesses mit der Maximum-Likelihood-Methode (oder – unter der Annahme der Normalverteilung äquivalent dazu – der Kleinsten-Quadrate-Methode) und den Werten des A-Prozesses.

Referenzpopulation: deutsche Männer im Alter von 60-89 in den Jahren 1993-2004 (vom Statistischen Bundesamt veröffentlicht)

⇒

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} -0,03917 \\ 0,0001478 \end{pmatrix}, \quad \widehat{CC^T} = \begin{pmatrix} 0,002924269 & -0,00004349 \\ -0,00004349 & 0,000000690 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(2004) = \begin{pmatrix} -10,84976 \\ 0,105443 \end{pmatrix}$$

Beachte:

- Sehr guter Fit
- **$Corr(A_1(.), A_2(.)) = 0,98238$**

⇒

Evtl. ein stochastischer Faktor ausreichend !

Modellansätze

2. Stochastisches Stochastisches Gompertz-Modell (K., Natcheva, Zipperer (2006))

$$\mu_x^{SG}(t) = \alpha(t) e^{\beta(t)x}$$

mit

$$d\alpha(t) = -\kappa \alpha(t) dt, \quad \kappa > 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0$$

$$d\beta(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad \beta(0) = \beta_0$$

Schätzer für κ : $\hat{\kappa} = 0,0644$

Schätzer für (μ, σ) :

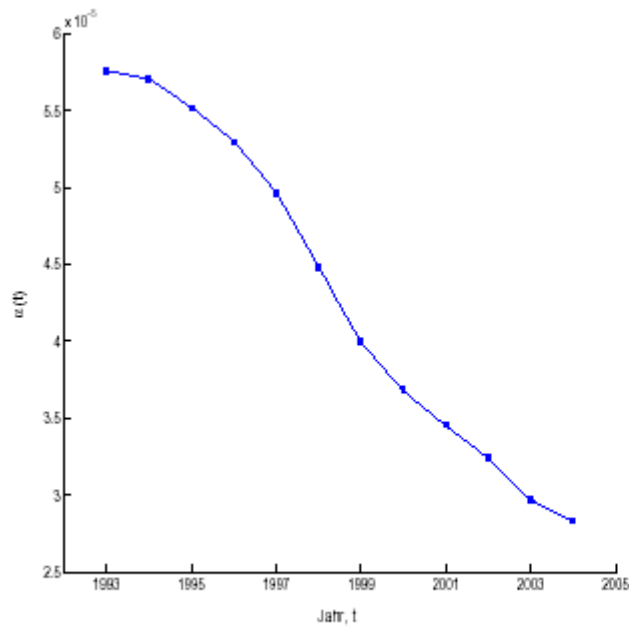
$$\hat{\mu} = \frac{1}{11} \sum_{i=1993}^{2003} \left(\hat{\beta}(t_{i+1}) - \hat{\beta}(t_i) \right) = 0.000521236$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1993}^{2003} \left(\hat{\beta}(t_{i+1}) - \hat{\beta}(t_i) \right)^2 = 0.000000141394$$

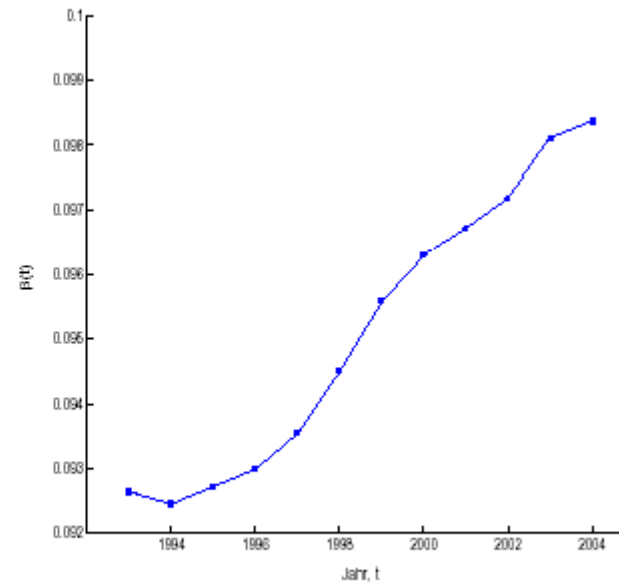
=> **Sehr gute Anpassung an (wenige !) deutsche Daten !**

Empirische Daten:

$$\mu_x^{SG}(t) = \alpha(t) e^{\beta(t)x}$$

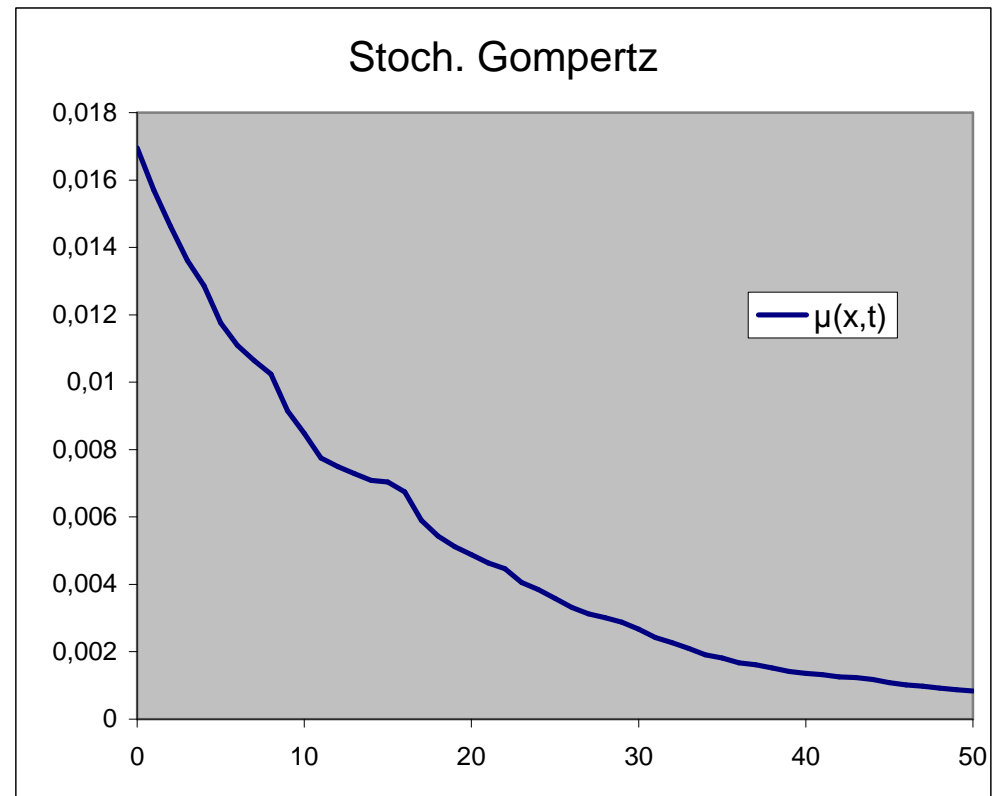


(a) Geschätzter Wert von $\hat{\alpha}(t)$.



(b) Geschätzter Wert von $\hat{\beta}(t)$.

Simulierte zukünftige Entwicklung der Mortalitätsrate eines $\mu(65,t)$ eines 65-jährigen deutschen Mannes:



Weitere Modellansätze

3. CIR-Modell nach Dahl und Møller (2006)

(sehr detailliert ausgearbeitet, technisch anspruchsvoll !)

4. Zeitabhängiges Gompertz-Modell nach Milevski und Promislow (2001)

„Falsche“ Gompertz-Variante:

$$\mu_x^G(t) = \alpha e^{\beta x + \sigma Y(t)} = \alpha(t) e^{\beta x}, \quad \alpha, \beta, \sigma \geq 0$$

mit $dY(t) = -\nu Y(t)dt + dW(t)$, $Y(0) = 0$, $\nu \geq 0$

⇒ Nur die allgemeine (!) Sterblichkeit ändert sich im Zeitablauf

4. Langlebigkeitsbonds, Langlebigkeitsindices und Co.

Probleme:

- Zukünftige Rentenzahlungen steigen
- Kauf entsprechender Annuitäten ist zu teuer („Nur Lebende erhalten Rente“)

Moderne Zutaten aus der Finanzwelt –1- : *Langlebigkeitsbonds*

- Annuitäten, deren Zahlungen an die Überlebensfunktion (der Versicherten) angepasst sind
- Beispiel: EIB/BNP-Longevity Bond
 - Nennwert 540 Mio €, 25 Jahre Laufzeit
 - Idee: Annuität, deren Zinszahlung $S(t)$ mit dem Anteil der zur Zeit t noch Lebenden der in 2004 65-Jährigen multipliziert wird
 - Angeboten im Dezember 2004
 - Geringe Nachfrage und dann 2005 zurück gezogen
 - Hauptproblem: Wie ist der L-Bond zu verbuchen ?

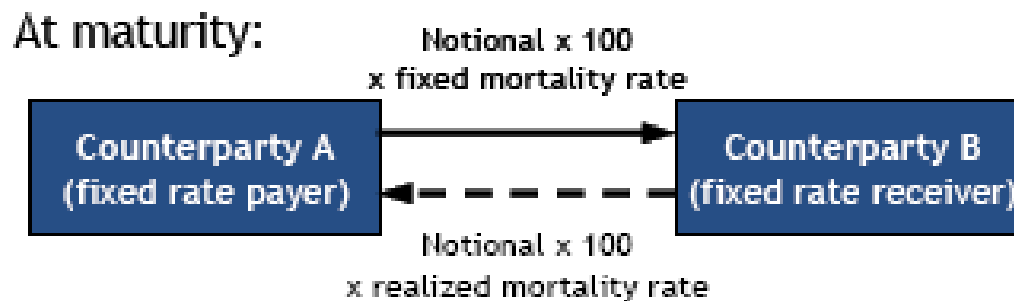
Was darf ein solcher Bond kosten ?

Moderne Zutaten aus der Finanzwelt –2- : *LifeMetrics*SM

März 2007: JPMorgan stellt das Konzept *LifeMetrics*SM vor

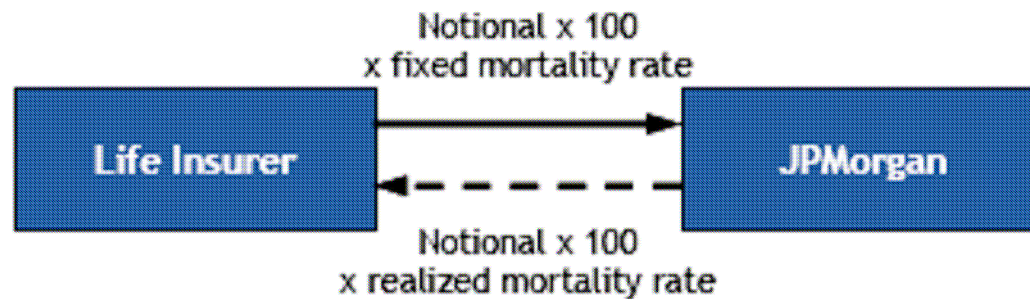
- *LifeMetrics Index* (Aus Mortalitätsdaten von USA und England & Wales, differenziert nach Land, Geschlecht, Alter, jährliche Neuberechnung aus öffentlich zugänglichen Daten) als Grundlage für einen funktionsfähigen Markt
- *Longevity/Mortality Derivatives* (Handel geeigneter Derivate auf den LifeMetrics Index zum Hedgen der Langlebigkeits-/Mortalitätsrisiken)
- *Angebot von JPMorgan: q-Forwards*

Funktionsweise eines q-Forwards:



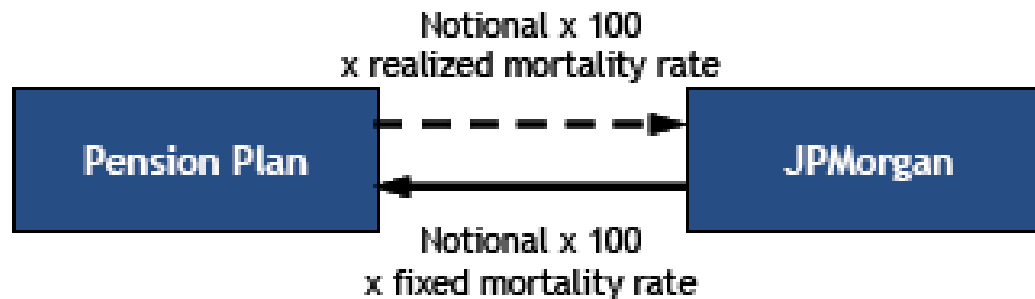
(aus JPMorgan, Coughan e.a.)

Einsatz eines q-Forwards zum Hedgen von Mortalität:



(aus JPMorgan, Coughan e.a.)

Einsatz eines q-Forwards zum Hedgen von Langlebigkeit:



(aus JPMorgan, Coughan e.a.)

Nachteil:

Basisrisiko bleibt

Derivate

Vorteil:

Markt erleichtert die Bewertung geeigneterer

5. Bewertung von Langlebigkeitsbonds

Einige einfache Überlegungen:

$$S(i) = \frac{\text{Anzahl der Überlebenden der Kohorte zur Zeit } i}{\text{Kohortengröße zur Zeit } 0}$$

$$p(t, T_0, T_1, x) = P(\text{Ind. lebt in } T_1 \mid \text{Ind. lebt in } T_0, \text{Ind. hat in } 0 \text{ Alter } x, f_t)$$

Gilt zusätzlich die Annahme

(U) *Zins- und Mortalitätsentwicklung sind unabhängig*

so ist der heutige Barwert („der Preis“) der Kuponzahlung $z_i = zS(i)$ zur Zeit i gleich

$$E\left(\exp\left(-\int_0^i r(s) ds\right) z S(i)\right) = P(0, i) z E(S(i)) = P(0, i) z p(0, 0, i, x)$$

Hauptproblem:

Nur die Zinskomponente des Langlebigkeitsbonds ist handelbar !

Es sollen gelten:

$$(B) \quad P(t, T) = E_Q \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| f_t \right)$$

(U) *Zins- und Mortalitätsentwicklung sind unabhängig* (unter Q ...)

\Rightarrow

Möglicher Preis für den Langlebigkeitsbond (mit $z = 1$)

$$P^{(L)}(t) = E_Q \left(\sum_{i=1}^N \exp \left(- \int_t^i r(s) ds \right) S(i) 1_{(t \leq i)} \middle| f_t \right) = \sum_{i=1}^N P(t, i) E_Q (S(i) | f_t) 1_{(t \leq i)},$$

aber: Ist eine solche Bewertung zu rechtfertigen ?

„Mortalitätskompatible“ Bewertung:

$$P^{(L)}(t) = \sum_{i=1}^N P(t, i) E_P(S(i) | f_t) 1_{(t \leq i)},$$

wobei P das zur Mortalitätsentwicklung gehörende Maß ist.

- identisch zu obigem Ansatz, wenn P die „Mortalitätskomponente“ von Q ist.
- Tatsächlich sind Marktpreise $P_M^{(L)}(t)$ höher !

Mögliche Erklärungen:

1. Anwendung versicherungsmathematischer Bewertungsprinzipien

$$P_M^{(L)}(t) = (1 + \delta) P^{(L)}(t), \quad \delta > 0, \quad \text{Erwartungswertprinzip}$$

2. Risikoneutrale Bewertung im unvollständigen Markt

- Langlebigkeit nicht handelbar \Rightarrow kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß
- Marktpreis des Risikos

zu „2. Risikoneutrale Bewertung im unvollständigen Markt“

Preisdifferenz lässt sich durch Verwendung des Maßes P_λ statt P zur Bewertung des Mortalitätsrisikos erklären, wobei λ durch

$$(PG) \quad P_M^{(L)}(0) = P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0) = \sum_{i=1}^N P(0,i) E_{P(\lambda)}(S(i))$$

bestimmt ist (aber evtl. nicht eindeutig !)

Beispiel 1: CDB-Perks-Modell

- Übergang P zu $P_\lambda \cong$ Übergang ν zu $\nu - C\lambda$
- Bestimme λ , so dass (PG) gilt (muss nicht unbedingt existieren !)

Numerisches Beispiel:

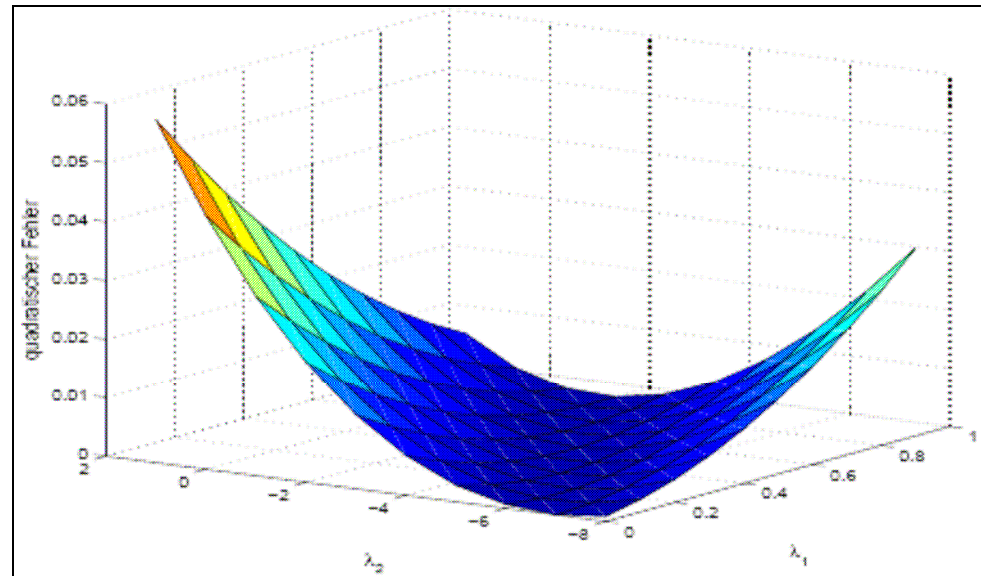


Abbildung 2: Fläche der quadrierten Differenzen zwischen $P_M^{(L)}(0)$ und $P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0)$

⇒ Lösungslinie !

⇒ Welches „Lösungsmaß“ wählt man ?

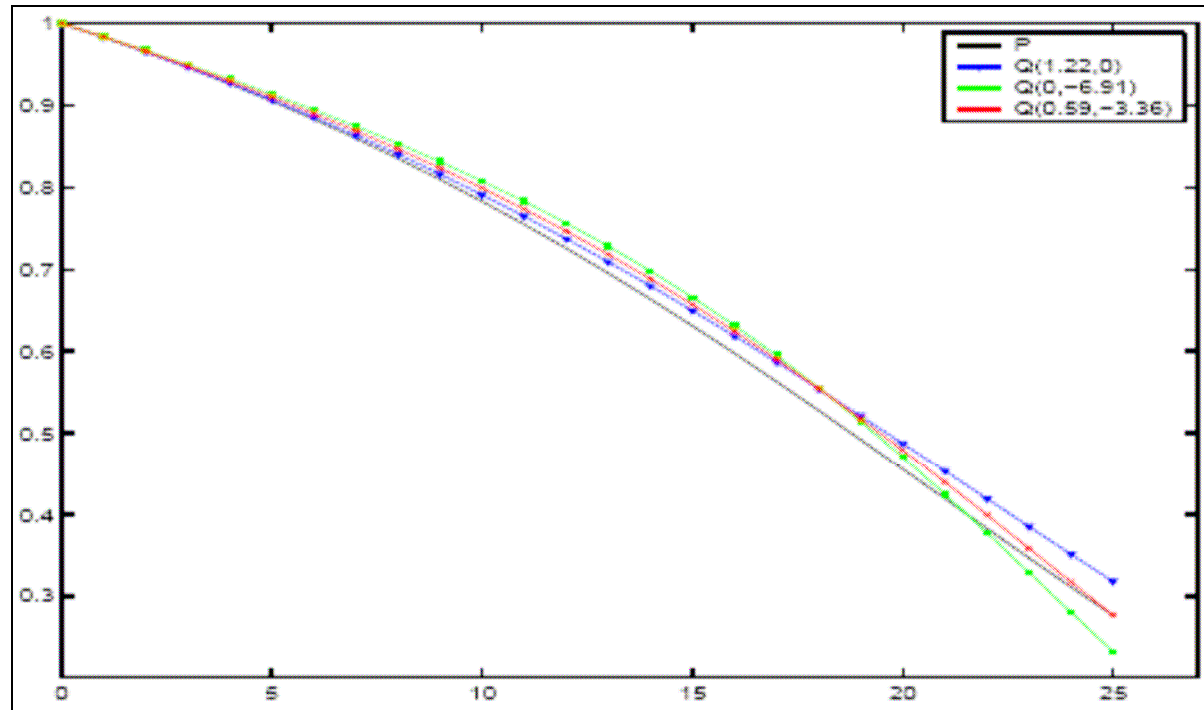


Abbildung 3: Schätzungen für $E(S(t))$ für deutsche Männer im Alter von 60-89 im Cairns e.a. Modell für P , $Q(1.22, 0)$, $Q(0, -6.91)$, $Q(0.59, -3.36)$. Daten aus 1993-2004, 5000 MC Simulationen

⇒ Will man „konservativ“ bewerten, so fällt $Q(0, -6.91)$ weg !

Beispiel 2: KNZ-Gompertz-Modell

-Übergang P zu $P_\lambda \cong$ Übergang μ zu $\mu - \sigma\lambda$

-Bestimme λ , so dass (PG) gilt (muss nicht unbedingt existieren !)

$\Rightarrow \lambda = 0.20$, „konservative“ Bewertung

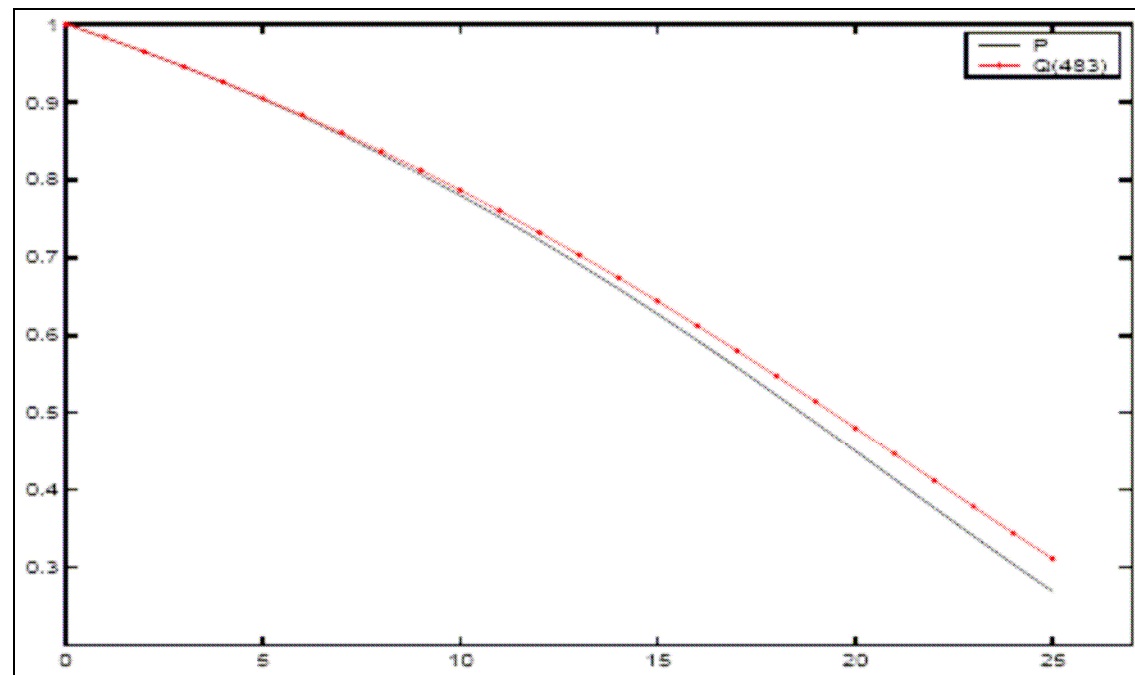


Abbildung 4: Schätzungen für $E[S(t)]$ für deutsche Männer im Alter von 60-89 im stochastischen Gompertz-Modell für die Maße P und $Q(483)$: Daten aus 1993-2004. 5000 MC-Simulationen.

Modellvergleich:

- Simuliere mit den kalibrierten Parametern in die Zukunft
- Berechnete $E(S(i))$ und Preise länger laufender Bonds

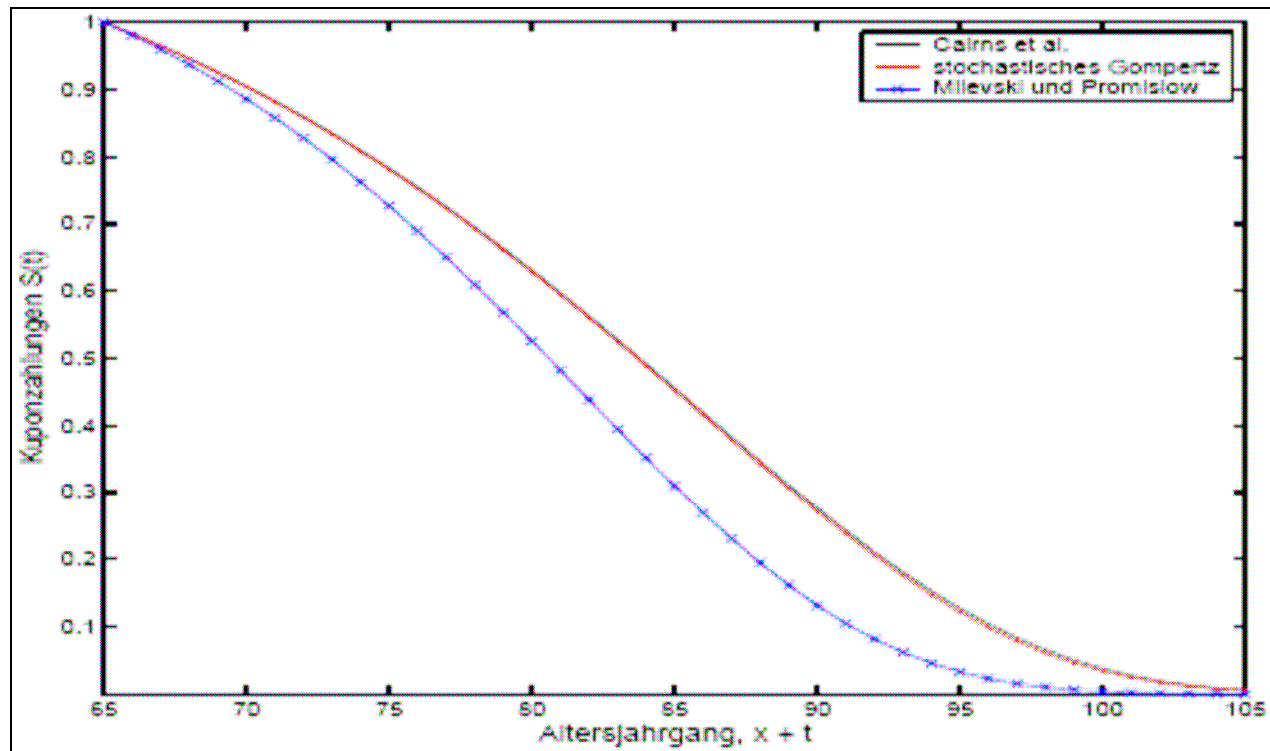


Abbildung 5: Schätzungen von $E^P[S(t)]$ für deutsche Männer mit Hilfe der Modelle von Cairns et al., Milevsky and Promislow und stochastischen Gompertz-Modell. Daten aus 1993-2004. 5000 MC Simulationen.

Preisvergleich:

Bewerte den EIB/BNP-Langlebigkeitsbond mittels MC-Simulation

⇒

Modellart:	$P^L(0)$
Cairns e.a.	11.388
Milevski und Promislow	10.328
Stoch. Gompertz	11.338

Konsequenzen:

- Cairns e.a. und stochastischer Gompertz sind nahezu identisch
- MP liefert zu hohe Mortalitätsraten (=> zu niedrige Preise)

6. Was ist das Patentrezept ?

Fakten:

- Langlebigkeit ist vorhanden (und erfreulich ...), aber auch nicht neu !
- Konzepte hierfür sind notwendig
- Noch gibt es keinen großen Markt zum Handel von Langlebigkeit/Mortalität

Hilfe aus dem Finanzbereich (?):

- Erste Produktüberlegungen sind interessant (aber noch nicht vom Markt so eingestuft ...)
- Die üblichen Mechanismen der Finanzmärkte starten (LifeMetricsSM, ...)
- Angebot und Nachfrage der Produkte sind noch unklar
- Mathematische Modellierung steht noch am Anfang, aber die notwendigen Techniken sind vorhanden

Weitere Aspekte:

- Konsequenzen für den „Generationenvertrag“ ? Nachträgliche Anpassung ?
- Der Finanzmarkt allein wird das Problem nicht lösen !