2. Symposium des Hamburger Zentrums für Versicherungswissenschaft, 28./29.11.2007

Langlebigkeitsbonds

Neue Produkte zur Absicherung des Langlebigkeitsrisikos ?

Ralf Korn
Technische Universität Kaiserslautern
Fraunhofer ITWM Kaiserslautern

Fraunhofer Institut Techno- und Wirtschaftsmathematik

Technische Universität Kaiserslautern

Langlebigkeit – Was nun ?

Gliederung:

- **Mortalitätsmodellierung: Historischer Überblick**
- **Mortalität und Langlebigkeit: Einige Daten**
- **Mortalitätsmodellierung heute:**
  Dynamische stochastische Mortalitätsmodelle
- **Langlebigkeitsbonds, Langlebigkeitsindices und Co.**
- **Bewertung von Langlebigkeitsbonds**
- **Patentrezepte ?**

1. *Mortalitätsmodellierung: Ein historischer Überblick*

(unvollständig, basiert auf Pitaccio (2005) *Survival models in actuarial mathematics*)

Klassisches Problem eines Lebensversicherers:

„*Wie hoch sind die (im nächsten Jahr) an die Versicherten zu leistenden Zahlungen* ?"

„Antwort": Starkes Gesetz der großen Zahl

$\Rightarrow$ Ist p die Überlebenswahrscheinlichkeit eines „typischen Versicherten", so gilt

$$\boxed{Z \approx p \cdot N \cdot z} \quad (\pm\, 2\, p(1-p) z \sqrt{N}\,)$$

wobei N = Anzahl der Versicherten, z = jährliche (Renten-)Zahlung.

Aber:

Es gibt keinen typischen Versicherten, die Überlebensw-keit hängt stark vom Alter des einzelnen Versicherten ab !

Alterung, Lebensdauer und Mortalitätsmodellierung: *Ein historischer Überblick*

- 1662: Erste detaillierte Untersuchung der Sterblichkeit der Londoner (Graunt)
- 1693: **Halley** erstellt die erste Sterbetafel (von Breslau)
- 1746: Deparcieux versucht eine ***Steigerung der Lebenserwartung*** zu belegen
- 1766: **Bernoulli** untersucht Mortalitätsintensitäten $\mu(x)$
- 1772: Lambert drückt die „Exhaustion of man’s power“ in einer Formel aus
- 1798: Malthus entwickelt das Modell des exponentiellen Populationswachstums
- 1825: **Gompertz** schlägt exponentiell wachsende ***Mortalitätsintensitäten*** vor
- 1860: **Makeham** erlaubt „young mortality“ im Gompertz-Modell
- 1872: Thiele entwickelt ein erstes komplexes Lebenszeit-Modell für $\mu(x)$

Abstrakt:

Ein ***Mortalitätsgesetz*** ist ein mathematischer Ausdruck, der die Sterblichkeitsrate als Funktion des Alters des Individuums beschreibt.

$$ {}_i p_x = P\left(Individum \ überlebt \ die \ nächsten \ i \ Jahre \,\middle|\, Ind. \ hat \ das \ heutige \ Alter \ x \right) $$

Vorgehensweise: *Definiere* ***Mortalitätsraten*** *über* $\boxed{ {}_i p_x = exp\left(-\int_0^i \mu_{x+s} ds \right) }$:

$$ \mu_x^{(G)} = \alpha e^{ßx}, \ \alpha, \beta > 0 $$

Gompertz (1825)

$$ \mu_x^{(M)} = \alpha e^{ßx} + \gamma, \ \alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0, $$

Makeham (1860)

$$ \mu_x^{(T)} = \alpha_1 e^{-ß_1 x} + \alpha_2 e^{-ß_2 (x-\eta)^2} + \alpha_3 e^{ß_3 x}, \ \alpha_i, \beta_i, \eta \geq 0 $$

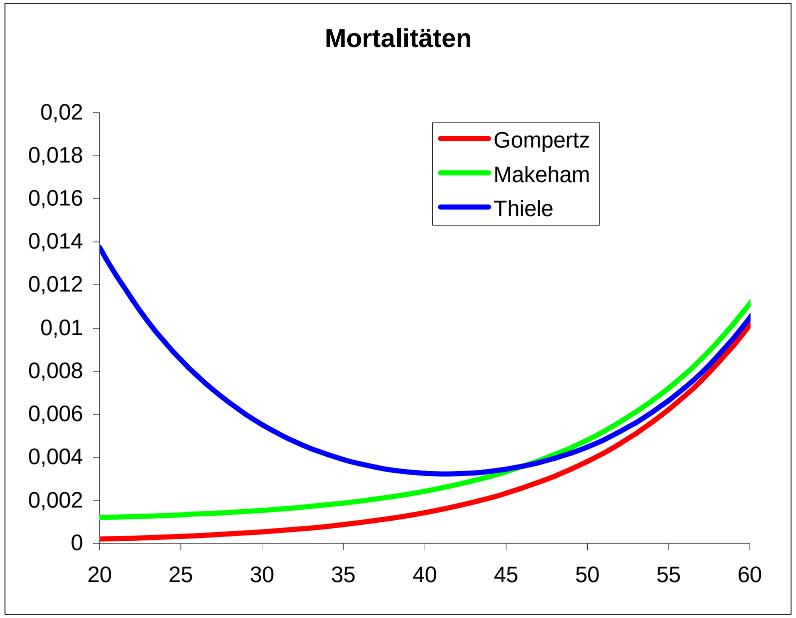
Thiele (1872)

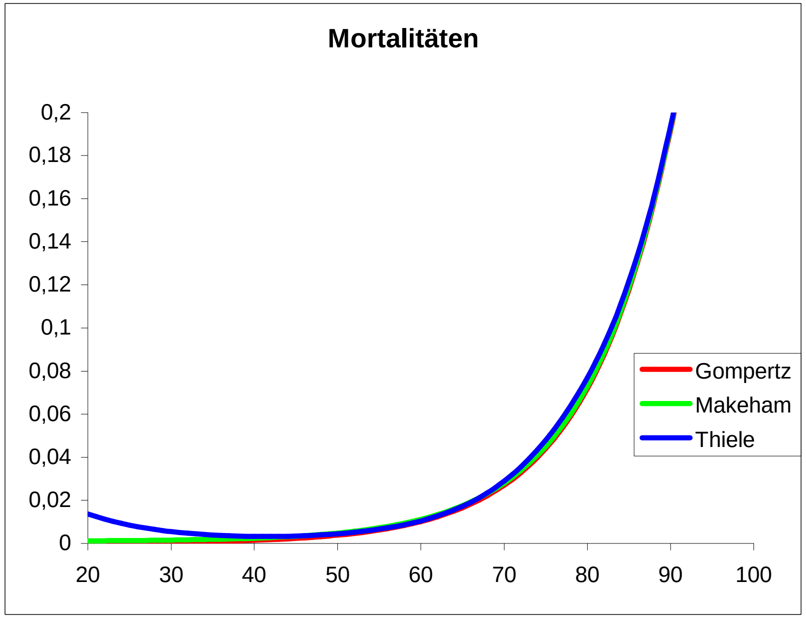
$$ \mu_x^{(P)} = \frac{\alpha e^{ßx} + \gamma}{1 + \delta e^{\beta x} + \varepsilon e^{-\beta x}}, \ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \geq 0 $$

Perks (1932)

1. *Mortalitätsmodellierung: Ein historischer Überblick*

Bilder der Mortalitätskurven (reale Daten bei Gompertz und Makeham)

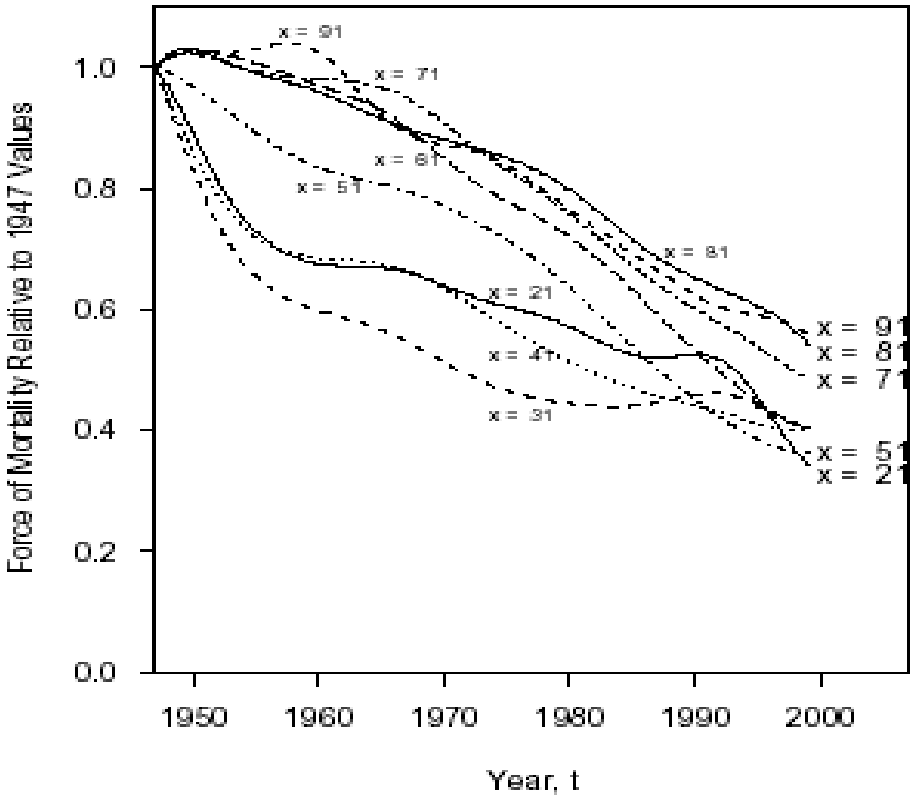




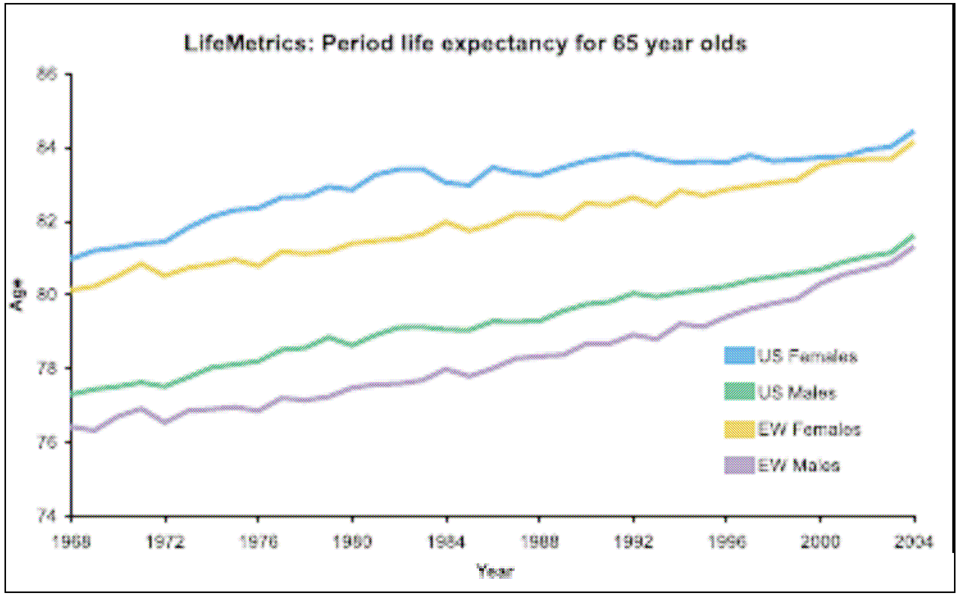
Beachte: „Zeit" heißt hier immer „***Alter***" und nicht „***Kalenderzeit***"

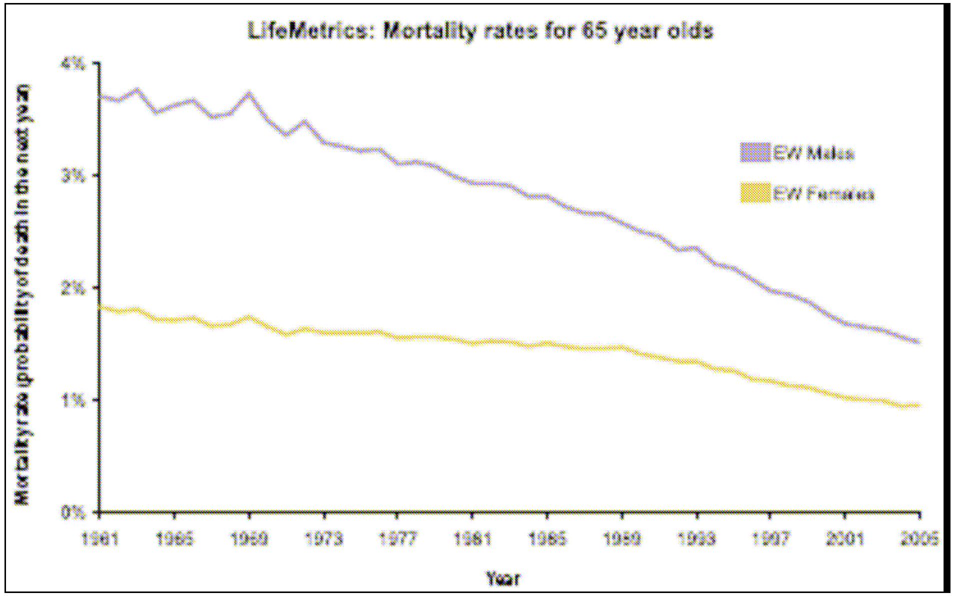
2. *Mortalitätsentwicklung: Einige Daten*

Beobachteter Trend: ***Langlebigkeit***
(Mortalität (versicherter) britischer Männer zwischen 1947 und 1999)



Daten aus: **JPMorgan „Pension Alert April 2007“**





<u>Eindeutige Tendenz:</u> Die Mortalitätsraten sind ***nicht konstant im Zeitablauf*** !

Was ist zu tun ?

3. *Mortalitätsmodellierung heute:*
Dynamische (stochastische) Mortalitätsmodelle

Ziel:

Finde eine Modellierung der Mortalitätsraten, die den Trend zur Langlebigkeit darstellen kann

Eine Möglichkeit:

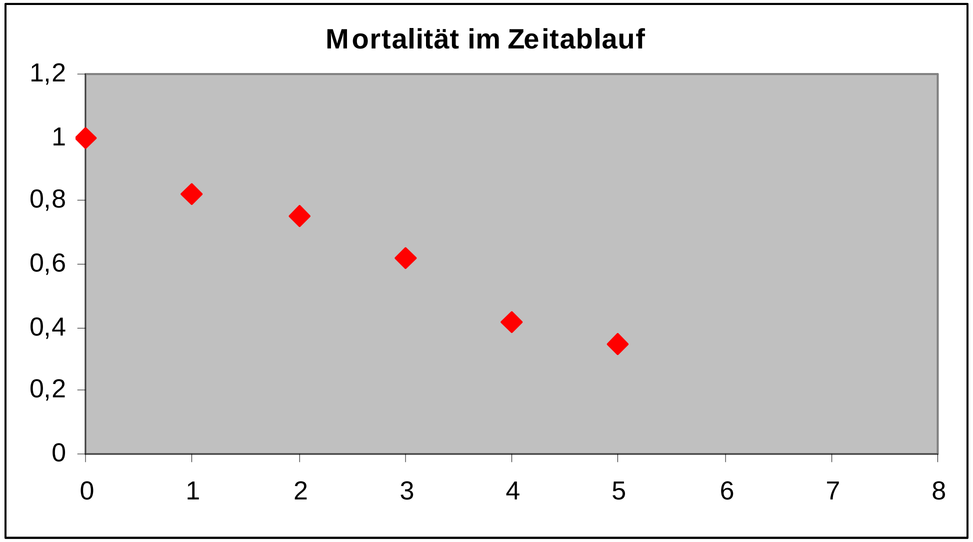
Finde ein Modell, in dem sich die Mortalitätsraten mit der **KALENDER**-Zeit ändern

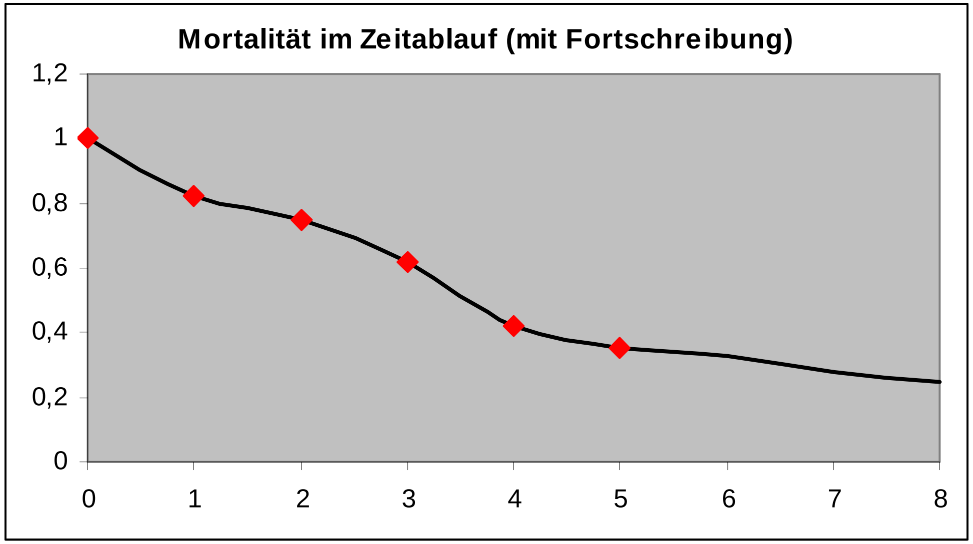
$\Rightarrow$ **Dynamische Mortalität**

Eine Alternative (bzw. Konsequenz !):

$\Rightarrow$ **Generationssterbetafeln**

Einfache Möglichkeit: Fortschreibung („***Extrapolation***“)





Modellierung dynamischer Mortalitätsraten mittels Extrapolation

1. Fasse „***realisierte Überlebenswahrscheinlichkeiten***“

(1) $${}_i p_x(t) = \frac{Anz.der\ zur\ Zeit\ t+i\ (x+i)\!-\!Jähr.}{Anz.der\ zur\ Zeit\ t\ \ x\!-\!Jährigen},\ t \in \{-(i+1), -(i+2), \ldots, -N_i\}$$

als Werte einer Funktion der Zeit auf

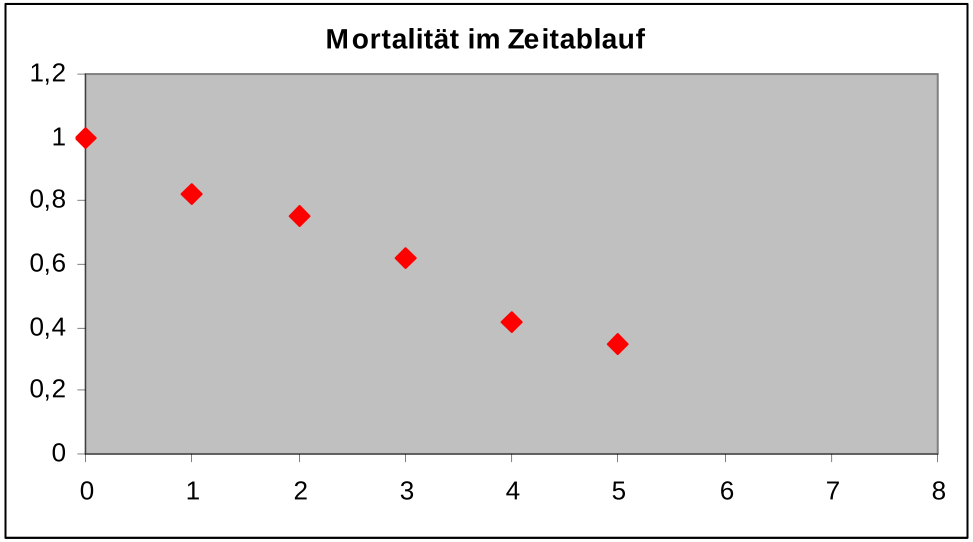
2. Approximiere die Funktion durch (z.B.) Spline- oder Polynominterpolation

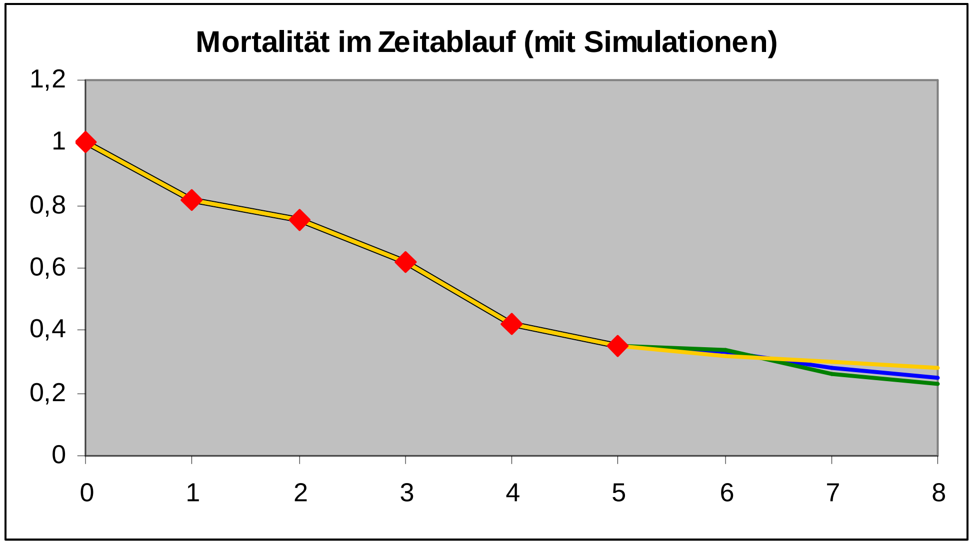
3. Erhalte aus Interpolationsfunktion $f_x^{(i)}(.)$ (mit Extrapol.) die benötigten Schätzer

(2) $${}_i \hat{p}_x(0) = f_x^{(i)}(0),\ \ i = 1, \ldots, N$$

⇒ **wird hier nicht weiter verfolgt** (siehe Pitaccio (2005))

Weitere Möglichkeit: Stochastische Simulation





⇒ **Allgemeiner Algorithmus** (Grundidee nach Lee und Carter (1992))

Algorithmus: **„Stochastische Modellierung von Mortalitätsraten“**

0. Wähle eine ***parametrisierte stochastische Form*** für das zu verwendende Mortalitätsgesetz (bzw. die Überlebenswahrscheinlichkeiten).

1. Bestimme aus vorhandenen Sterblichkeitsraten die ***realisierten Mortalitätsraten*** (bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten)

2. ***Kalibriere den stochastischen Prozess***, der dem in 1. gewählten Mortalitätsgesetz zugrunde liegt, an die Zeitreihe der Mortalitätsraten (bzw. der Überlebenswahrscheinlichkeiten)

3. Verwende den Prozess zur ***Simulation zukünftiger Mortalitätsraten***

Vorteile dieser Methode:

- zukünftige Mortalitätsszenarien durch Monte Carlo Simulationen beschreibbar
- Konfidenzintervalle für Überlebenswahrscheinlichkeiten

Modellansätze

1. Stochastisches Perks-Modell nach Cairns, Blake, Dowd (2005)

$p(t+1, t, t+1, x)$ = Anteil der in $t \geq 0$ lebenden Mitgliedern einer Kohorte, die zum Zeitpunkt 0 alle ein Alter von x hatten und auch $t+1$ erlebten.

Für jeden vergangenen Zeitpunkt t und alle vorhandenen Anfangsalter $x > 0$ bestimme die Werte $(A_1(t), A_2(t))$ mittels Kleinster-Quadrate-Schätzung aus

$$\hat{p}(t+1,t,t+1,x) = \frac{1}{1+e^{A_1(t+1)+A_2(t+1)(x+t)}}$$

wobei

$$A(t+1) = A(t) + \nu + CZ(t+1),\ \nu \in IR^2, C \in IR^{2,2},\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

C eine obere Dreiecksmatrix, Z-Prozess der Zuwächse einer zweidimensionalen Brownschen Bewegung zwischen t und $t+1$.

Interpretation

- A_1-Prozess: zeitliche Entwicklung der allg., altersunabhängigen Sterblichkeit
- A_2-Prozess: zeitliche Entwicklung der altersabhängigen Sterblichkeit

Noch zu erledigen:

Schätze die Parameter ν und C aus ihren Eigenschaften als Erwartungswert, Varianz und Kovarianz der Zuwächse des A-Prozesses mit der Maximum-Likelihood-Methode (oder – unter der Annahme der Normalverteilung äquivalent dazu – der Kleinsten-Quadrate-Methode) und den Werten des A-Prozesses.

Referenzpopulation: deutsche Männer im Alter von 60-89 in den Jahren 1993-2004 (vom Statistischen Bundesamt veröffentlicht)

$\Rightarrow$

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} -0{,}03917 \\ 0{,}0001478 \end{pmatrix}, \quad \widehat{CC^T} = \begin{pmatrix} 0{,}002924269 & -0{,}00004349 \\ -0{,}00004349 & 0{,}000000690 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(2004) = \begin{pmatrix} -10{,}84976 \\ 0{,}105443 \end{pmatrix}$$

Beachte:

- Sehr guter Fit
- ***Corr*(*A*$_1$(.), *A*$_2$(.)) = 0,98238**

$\Rightarrow$

Evtl. ein stochastischer Faktor ausreichend !

Modellansätze

2. Stochastisches Stochastisches Gompertz-Modell (K., Natcheva, Zipperer (2006))

$$\boxed{\mu_x^{SG}(t) = \alpha(t)e^{\beta(t)x}}$$

mit

$$d\alpha(t) = -\kappa\alpha(t)dt, \quad \kappa > 0, \ \alpha(0) = \alpha_0$$

$$d\beta(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t), \qquad \beta(0) = \beta_0$$

Schätzer für κ: $\hat{\kappa} = 0{,}0644$

Schätzer für (μ, σ):

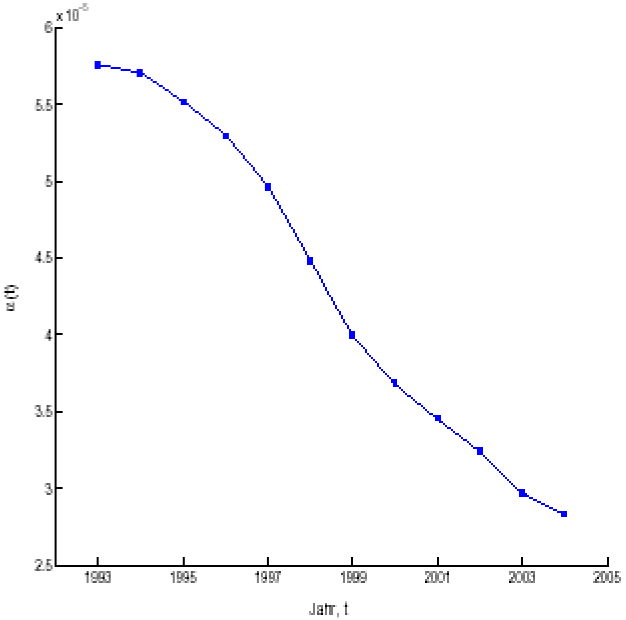
$$\hat{\mu} = \tfrac{1}{11}\sum_{i=1993}^{2003}\left(\hat{\beta}(t_{i+1}) - \hat{\beta}(t_i)\right) = 0.000521236$$

$$\hat{\sigma}^2 = \tfrac{1}{10}\sum_{i=1993}^{2003}\left(\hat{\beta}(t_{i+1}) - \hat{\beta}(t_i)\right)^2 = 0.000000141394$$

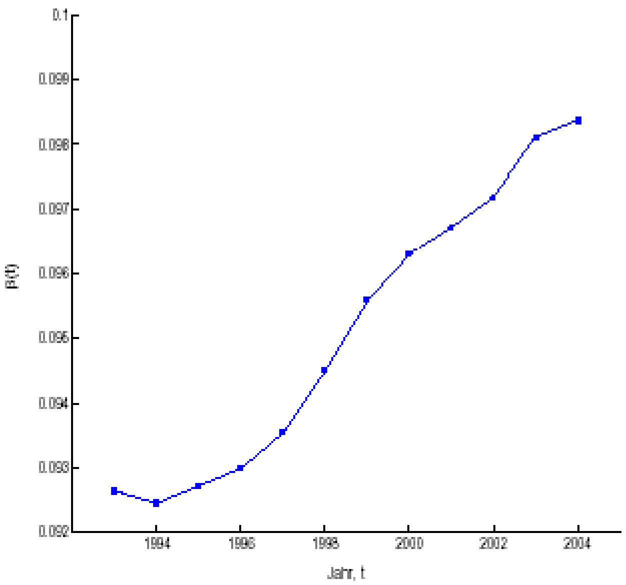
=> **Sehr gute Anpassung an (**wenige !**) deutsche Daten !**

Empirische Daten:

$$\boxed{\mu_x^{SG}(t) = \alpha(t) e^{\beta(t)x}}$$

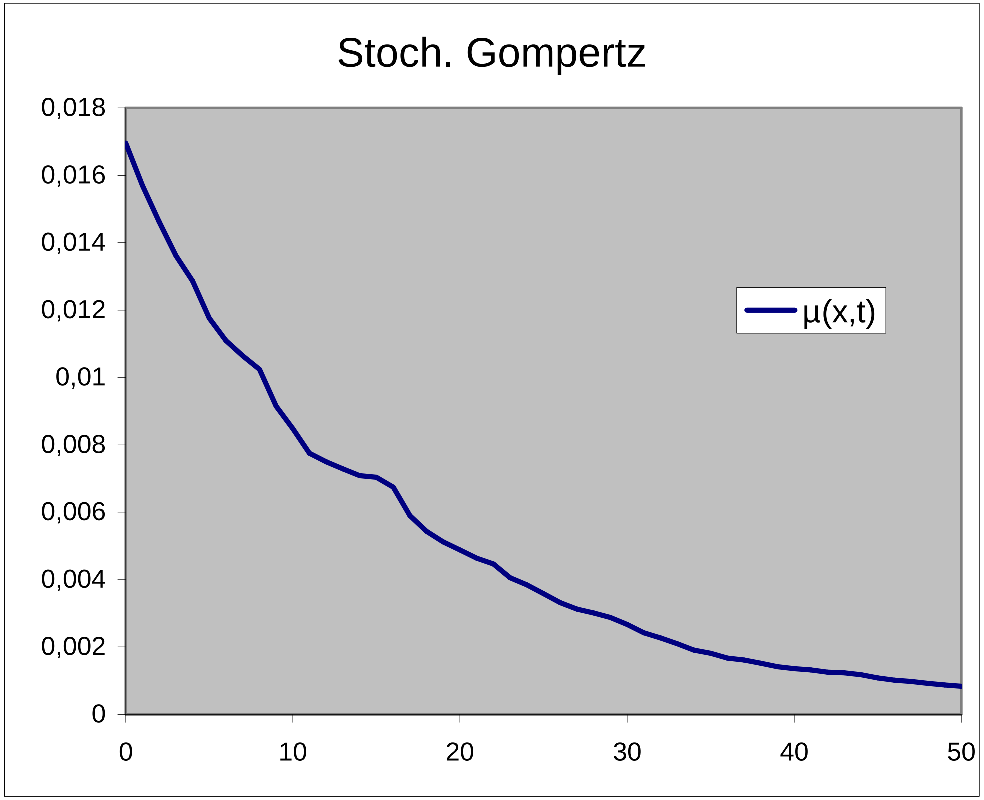


(a) Geschätzter Wert von $\hat{\alpha}(t)$.



(b) Geschätzter Wert von $\hat{\beta}(t)$.

Simulierte zukünftige Entwicklung der Mortalitätsrate eines $\mu(65,t)$ eines 65-jährigen deutschen Mannes:



Weitere Modellansätze

3. CIR-Modell nach Dahl und Møller (2006)

(sehr detailliert ausgearbeitet, technisch anspruchsvoll !)

4. Zeitabhängiges Gompertz-Modell nach Milevski und Promislow (2001)

„Falsche“ Gompertz-Variante:

$$\mu_x^G(t) = \alpha e^{\beta x + \sigma Y(t)} = \alpha(t) e^{\beta x}, \quad \alpha, \beta, \sigma \geq 0$$

mit $dY(t) = -\nu Y(t)\,dt + dW(t),\ Y(0) = 0,\ \nu \geq 0$

$\Rightarrow$ Nur die allgemeine (!) Sterblichkeit ändert sich im Zeitablauf

4. *Langlebigkeitsbonds, Langlebigkeitsindices und Co.*

Probleme:

- Zukünftige Rentenzahlungen steigen
- Kauf entsprechender Annuitäten ist zu teuer („Nur Lebende erhalten Rente“)

Moderne Zutaten aus der Finanzwelt –1- : *Langlebigkeitsbonds*

- Annuitäten, deren Zahlungen an die Überlebensfunktion (der Versicherten) angepasst sind
- Beispiel: EIB/BNP-Longevity Bond
    - Nennwert 540 Mio €, 25 Jahre Laufzeit
    - Idee: Annuität, deren Zinszahlung $S(t)$ mit dem Anteil der zur Zeit t noch Lebenden der in 2004 65-Jährigen multipliziert wird
    - Angeboten im Dezember 2004
    - Geringe Nachfrage und dann 2005 zurück gezogen
    - Hauptproblem: Wie ist der L-Bond zu verbuchen ?

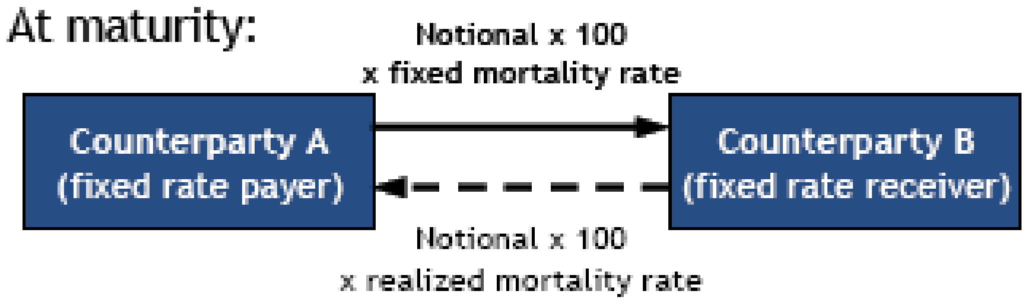
Was darf ein solcher Bond kosten ?

Moderne Zutaten aus der Finanzwelt –2- : ***LifeMetrics***SM

März 2007: JPMorgan stellt das Konzept ***LifeMetrics***SM vor

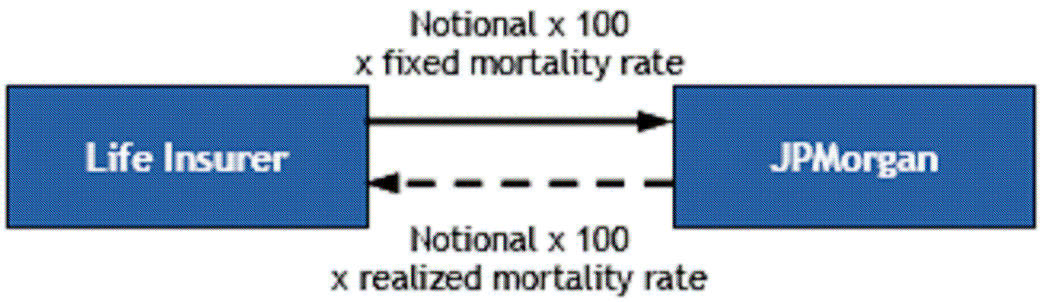
- ***LifeMetrics Index*** (Aus Mortalitätsdaten von USA und England & Wales, differenziert nach Land, Geschlecht, Alter, jährliche Neuberechnung aus öffentlich zugänglichen Daten) als Grundlage für einen funktionsfähigen Markt
- ***Longevity/Mortality Derivatives*** (Handel geeigneter Derivate auf den LifeMetrics Index zum Hedgen der Langlebigkeits-/Mortalitätsrisiken)
- ***Angebot von JPMorgan:*** **q-Forwards**

Funktionsweise eines q-Forwards:



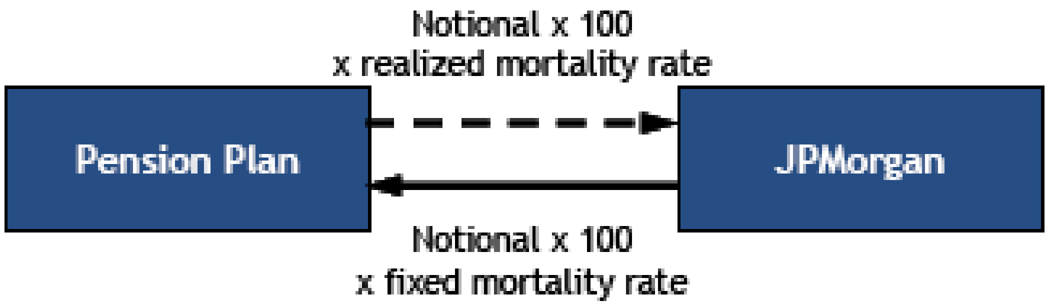
(aus JPMorgan, Coughan e.a.)

Einsatz eines q-Forwards zum Hedgen von Mortalität:



(aus JPMorgan, Coughan e.a.)

Einsatz eines q-Forwards zum Hedgen von Langlebigkeit:



(aus JPMorgan, Coughan e.a.)

Nachteil:

Basisrisiko bleibt

Vorteil:

Markt erleichter die Bewertung geeigeneterer

Derivate

5. Bewertung von Langlebigkeitsbonds

Einige einfache Überlegungen:

$$S(i) = \frac{Anzahl\ der\ Überlebenden\ der\ Kohorte\ zur\ Zeit\ i}{Kohortengröße\ zur\ Zeit\ 0}$$

$$p(t,T_0,T_1,x) = P\left(Ind.\ lebt\ in\ T_1 \middle| Ind.\ lebt\ in\ T_0, Ind.\ hat\ in\ 0\ Alter\ x, f_t\right)$$

Gilt zusätzlich die Annahme

(U) ***Zins- und Mortalitätsentwicklung sind unabhängig***

so ist der heutige Barwert („der Preis“) der Kuponzahlung $z_i = zS(i)$ zur Zeit i gleich

$$E\left(exp\left(-\int_0^i r(s)ds\right) z\,S(i)\right) = P(0,i)\,z\,E\left(S(i)\right) = P(0,i)\,z\,p(0,0,i,x)$$

Hauptproblem:
Nur die Zinskomponente des Langlebigkeitsbonds ist handelbar !

Es sollen gelten:

(B) $$P(t,T) = E_Q\left(exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds \right) \middle| f_t \right)$$

(U) ***Zins- und Mortalitätsentwicklung sind unabhängig*** (unter Q ...)

$\Rightarrow$

Möglicher Preis für den Langlebigkeitsbond (mit z = 1)

$$P^{(L)}(t) = E_Q\left(\sum_{i=1}^{N} exp\left(-\int_t^i r(s)\,ds \right) S(i) 1_{(t \le i)} \middle| f_t \right) = \sum_{i=1}^{N} P(t,i) E_Q\left(S(i) \middle| f_t \right) 1_{(t \le i)}\,,$$

aber: Ist eine solche Bewertung zu rechtfertigen ?

„Mortalitätskompatible“ Bewertung:

$$P^{(L)}(t) = \sum_{i=1}^{N} P(t,i) E_P\left(S(i) \middle| f_t\right) 1_{(t \le i)},$$

wobei P das zur Mortalitätsentwicklung gehörende Maß ist.

- identisch zu obigem Ansatz, wenn P die „Mortalitätskomponente“ von Q ist.
- Tatsächlich sind Marktpreise $P_M^{(L)}(t)$ höher !

<u>Mögliche Erklärungen:</u>

1. Anwendung versicherungsmathematischer Bewertungsprinzipien

   $P_M^{(L)}(t) = (1+\delta) P^{(L)}(t), \quad \delta > 0,$ ***Erwartungswertprinzip***

2. Risikoneutrale Bewertung im unvollständigen Markt
   - Langlebigkeit nicht handelbar $\Rightarrow$ kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß
   - Marktpreis des Risikos

zu „2. Risikoneutrale Bewertung im unvollständigen Markt"

Preisdifferenz lässt sich durch Verwendung des Maßes P_λ statt P zur Bewertung des Mortalitätsrisikos erklären, wobei λ durch

$$\text{(PG)} \qquad P_M^{(L)}(0) = P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0) = \sum_{i=1}^{N} P(0,i)\, E_{P(\lambda)}\big(S(i)\big)$$

bestimmt ist (aber evtl. nicht eindeutig !)

<u>Beispiel 1:</u> CDB-Perks-Modell

- Übergang P zu P_λ $\cong$ Übergang ν zu ν-$C\lambda$
- Bestimme λ, so dass (PG) gilt (muss nicht unbedingt existieren !)

Numerisches Beispiel:

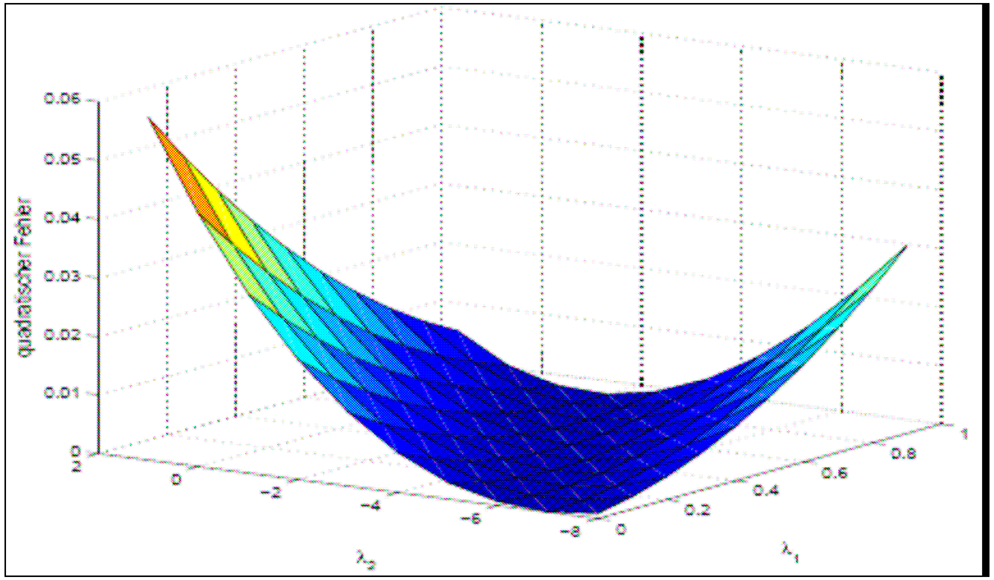


Abbildung 2: Fläche der quadrierten Differenzen zwischen $P_M^{(L)}(0)$ und $P_{Q(\lambda)}^{(L)}(0)$

$\Rightarrow$ Lösungslinie !

$\Rightarrow$ Welches „Lösungsmaß“ wählt man ?

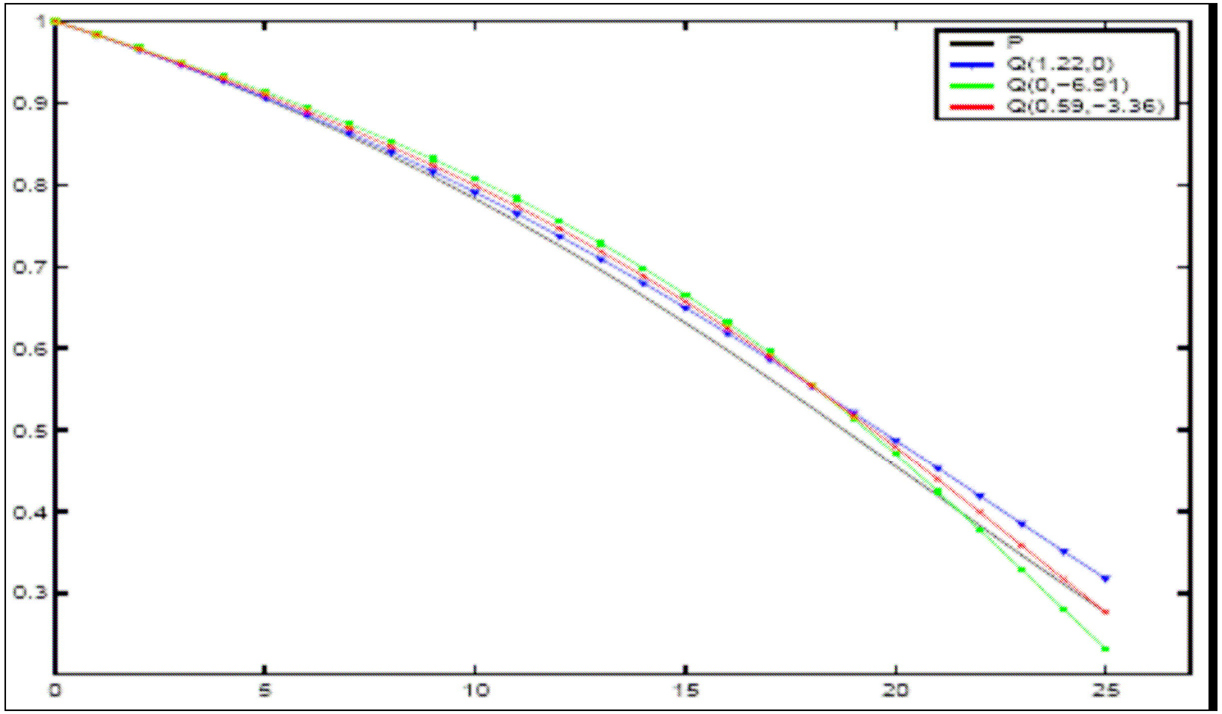


Abbildung 3: Schätzungen für *E* (*S* (*t*)) für deutsche Männer im Alter von 60-89 im Cairns e.a. Modell für P, Q(1.22, 0), Q(0,-6.91), Q(0.59,-3.36). Daten aus 1993-2004, 5000 MC Simulationen

$\Rightarrow$ Will man „konservativ“ bewerten, so fällt Q(0,-6.91) weg !

Beispiel 2: KNZ-Gompertz-Modell

-Übergang P zu P_λ $\cong$ Übergang μ zu μ $-\sigma\lambda$

-Bestimme λ, so dass (PG) gilt (muss nicht unbedingt existieren !)

$\Rightarrow$ $\lambda = 0.20$, „konservative" Bewertung

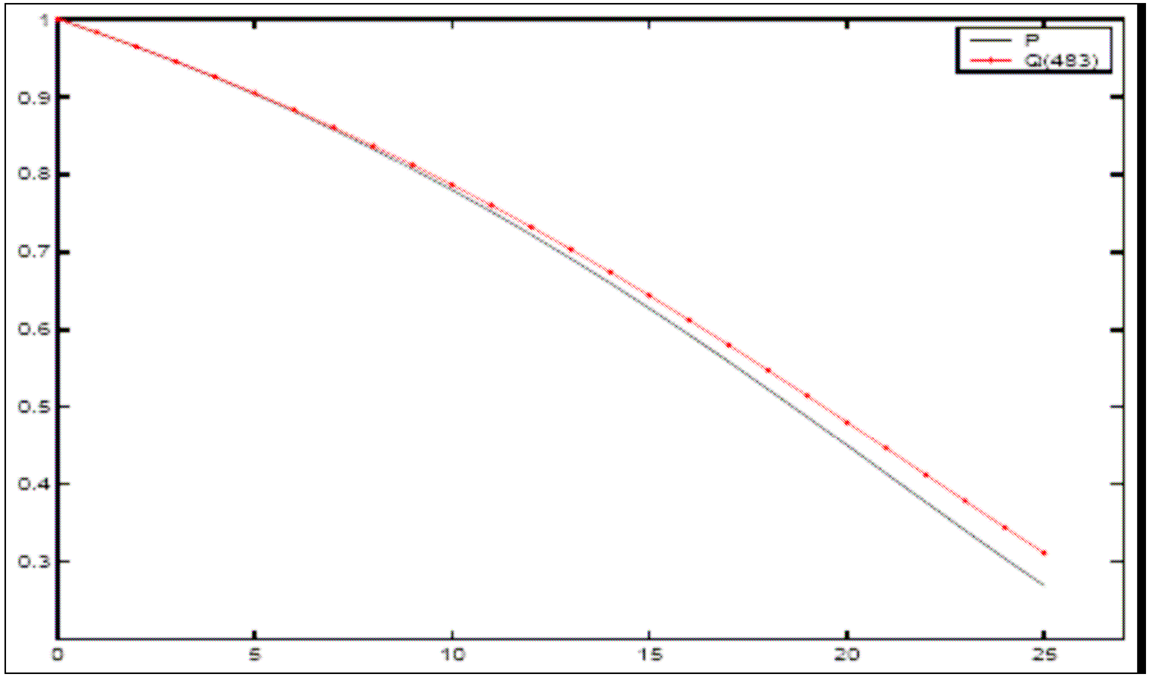


Abbildung 4: Schätzungen für $E\,[S\,(t)]$ für deutsche Männer im Alter von 60-89 im stochastischen Gompertz-Modell für die Maße P und Q (483): Daten aus 1993-2004. 5000 MC-Simulationen.

Modellvergleich:

- Simuliere mit den kalibrierten Parametern in die Zukunft
- Berechnete $E(S(i))$ und Preise länger laufender Bonds

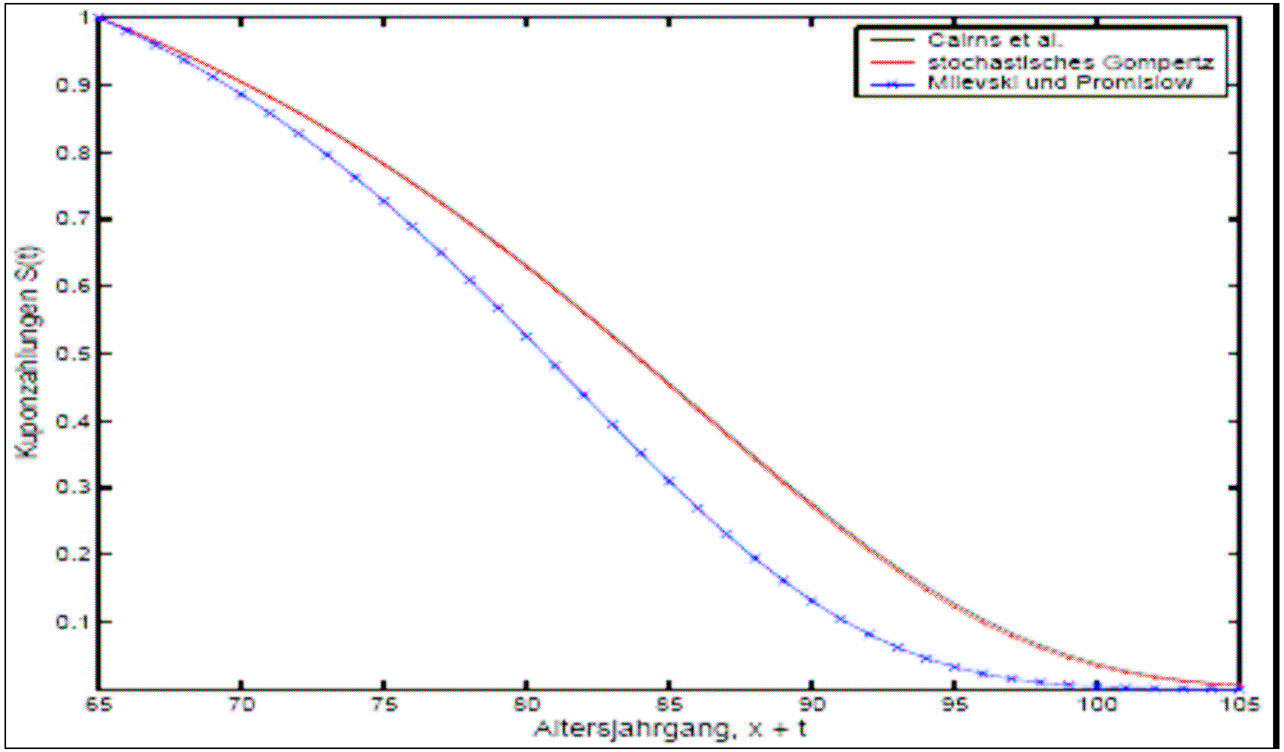


Abbildung 5: Schätzungen von $E^P[S\ (t)]$ für deutsche Männer mit Hilfe der Modelle von Cairns et al., Milevsky and Promislow und stochastischen Gompertz-Modell. Daten aus 1993-2004. 5000 MC Simulationen.

Preisvergleich:

Bewerte den EIB/BNP-Langlebigkeitsbond mittels MC-Simulation

$\Rightarrow$

Modellart:	$P^L(0)$
Cairns e.a.	**11.388**
Milevski und Promislow	**10.328**
Stoch. Gompertz	**11.338**

Konsequenzen:

- Cairns e.a. und stochastsischer Gompertz sind nahezu identisch
- MP liefert zu hohe Mortalitätsraten (=> zu niedrige Preise)

6. Was ist das Patentrezept ?

Fakten:

- Langlebigkeit ist vorhanden (und erfreulich …), aber auch nicht neu !
- Konzepte hierfür sind notwendig
- Noch gibt es keinen großen Markt zum Handel von Langlebigkeit/Mortalität

Hilfe aus dem Finanzbereich (?):

- Erste Produktüberlegungen sind interessant (aber noch nicht vom Markt so eingestuft …)
- Die üblichen Mechanismen der Finanzmärkte starten (LifeMetrics^{SM}, …)
- Angebot und Nachfrage der Produkte sind noch unklar
- Mathematische Modellierung steht noch am Anfang, aber die notwendigen Techniken sind vorhanden

Weitere Aspekte:

- Konsequenzen für den „Generationenvertrag“ ? Nachträgliche Anpassung ?
- Der Finanzmarkt allein wird das Problem nicht lösen !