6 Regressionsmodelle für Zeitreihen

6.1 Das lineare Regressionsmodell

Das lineare Regressionsmodell 6.1

Das lineare Regressionsmodell:

$$Y_t = \theta_1 x_{t1} + \theta_2 x_{t2} + \ldots + \theta_k x_{tk} + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, N$$

oder in der Matrix-Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix}}_{=\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nk} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{pmatrix}}_{=\theta} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_{=\mathbf{u}}$$

bzw.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\theta + \mathbf{u}$$

mit Regressand $\mathbf{Y}$, Regressormatrix $\mathbf{X}$ und Parametervektor θ. [3]

Das lineare Regressionsmodell ▪ Modellannahmen 6.2

(i) $\mathbb{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}'] = \sigma^2 I_N = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2 \end{pmatrix}.$

(iii) $\mathbf{X}$ ist nicht-stochastisch mit $\mathrm{Rang}\,(\mathbf{X}) = k$.

(iv) Es gibt über θ und σ^2 keine Vorinformation.

Ggf. für die Anwendung der Maximum-Likelihood-Schätzmethode bzw. für das Testen ist die folgende Annahme erforderlich:

(v) u_t ist normalverteilt für alle $t = 1, 2, \ldots, N$.

Das lineare Regressionsmodell ▪ Modellannahme (ii) 6.3

Die Matrix $\mathbb{E}[\mathbf{uu}']$ aus der Annahme (ii) ist die Kovarianzmatrix (Varianz-Kovarianz-Matrix) $\mathrm{Cov}[\mathbf{u}]$ des Störterms $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\mathbf{u}] &= \mathbb{E}\big[(\mathbf{u}-\mathbb{E}[\mathbf{u}])\,(\mathbf{u}-\mathbb{E}[\mathbf{u}])'\big] \\ &\overset{\text{Annahme (i)}}{=} \mathbb{E}[\mathbf{uu}'] \,.\end{aligned}$$

Unter der Annahme (ii)

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{u}] = \mathbb{E}[\mathbf{uu}'] = \sigma^2 I_N$$

sprechen wir von einer *skalaren* Kovarianzmatrix, da nur die skalare Größe σ^2 unbekannt ist.

Das lineare Regressionsmodell ▪ Modellannahme (ii) 6.4

Die Annahme (ii) des linearen Regressionsmodells

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{u}] = \mathbb{E}[\mathbf{uu}'] = \sigma^2 I_N$$

besagt, dass

- die Störvariablen unkorreliert sind

$$\mathrm{Cov}[u_t u_s] = 0 \quad \forall t \neq s$$

  und dass

- die Varianz der Störvariablen konstant ist

$$\mathrm{Var}[u_t] = \mathbb{E}\big[u_t^2\big] = \sigma^2, \quad \forall t.$$

Das lineare Regressionsmodell ▪ Der OLS-Schätzer 6.5

Im linearen Regressionsmodell

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\theta + \mathbf{u}$$

schätzen wir den Parametervektor θ mit der Methode der kleinsten Quadrate (Ordinary Least Squares, OLS)

$$\widehat{\theta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Das lineare Regressionsmodell ▪ Statistische Eigenschaften des OLS-Schätzers 6.6

[3]Siehe Kapitel 8.3 „Annahmen im Rahmen des Datenmodells“ in Stahlecker, P., Kröh, P. und M. Breitig (2014), *Eine Einführung in das lineare Modell*, Skript, Version 2.0, Universität Hamburg, Hamburg.

- Der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}$ ist erwartungstreu: $\mathbb{E}\left[\widehat{\theta}\right] = \theta$.
- Der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}$ ist bester linearer unverzerrter Schätzer für θ. Die einzelnen OLS-Schätzer $\widehat{\theta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ haben *minimale Varianz* in der Klasse aller linearen unverzerrten Schätzer.

Das lineare Regressionsmodell ▪ Statistische Eigenschaften des OLS-Schätzers 6.7

- Der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}$ hat die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left[\widehat{\theta}\right] &= \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\operatorname{Cov}[\mathbf{Y}]\,\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\operatorname{Cov}[\mathbf{u}]\,\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&= \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']\,\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&\overset{\text{Annahme (ii)}}{=} \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

- Unter der Voraussetzung normalverteilter Störungen (u_t) gilt

$$\widehat{\theta} \sim N\left(\theta, \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right).$$

  Auf der Grundlage dieser Verteilung können wir im linearen Regressionsmodell testen.

Das lineare Regressionsmodell ▪ Statistische Eigenschaften des OLS-Schätzers 6.8

- Asymptotisch betrachtet ist der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}$ schwach konsistent. Diese Eigenschaft bedeutet, dass für alle $i = 1, 2, \ldots, k$ und für $\varepsilon > 0$ beliebig ausgewählt gilt

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[\left|\widehat{\theta}_i - \theta_i\right| > \varepsilon\right] = 0.$$

  Dafür wird zusätzlich die folgende Annahme benötigt:

(vi) $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbf{X} = Q$ mit Q positiv definit (p. d.)

Das lineare Regressionsmodell ▪ Zeitreihendaten 6.9

Annahme (ii) wird für Zeitreihendaten nicht eingehalten.

Im allgemeinen ist die Abhängigkeitsstruktur des Störterms *unbekannt*. Wir unterstellen lediglich, dass der Störterm stationär ist. [4]

[4] Siehe Kapitel 17 „Nichtskalare Varianz-Kovarianz-Matrix des Störterms u" in Stahlecker, P., Kröh, P. und M. Breitig (2014), *Eine Einführung in das lineare Modell*, Skript, Version 2.0, Universität Hamburg, Hamburg.

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{u}] = \mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}'] = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{N-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & & \gamma_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen

$$\Omega := \mathrm{Cov}[\mathbf{u}]\,.$$

Das lineare Regressionsmodell ▪ Zeitreihendaten 6.10

Konsequenzen für den OLS-Schätzer $\widehat{\theta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbf{Y}$:

- $\widehat{\theta}$ ist weiterhin erwartungstreu
- $\widehat{\theta}$ ist nicht mehr der beste lineare unverzerrte Schätzer für θ.

Das lineare Regressionsmodell ▪ Zeitreihendaten 6.11

- $\widehat{\theta}$ hat die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left[\widehat{\theta}\right] &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\,\mathrm{Cov}[\mathbf{Y}]\,\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\,\mathrm{Cov}[\mathbf{u}]\,\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']\,\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,. \end{aligned}$$

  Da wir $\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']$ nicht kennen, kennen wir auch $\mathrm{Cov}\left[\widehat{\theta}\right]$ nicht.

- Daher können wir nicht testen.
- **Lösung**: wir bestimmen die asymptotische Kovarianzmatrix $\lim_{N\to\infty}\mathrm{Cov}\left[\widehat{\theta}_N\right]$ und verwenden eine approximative asymptotische Testtheorie.

6.2 Der Newey-West-Schätzer

Der Newey-West-Schätzer 6.12

Sei $\widehat{\theta}_N$ der OLS-Schätzer auf der Grundlage eines Datensatzes der Länge N. $\widehat{\theta}_N$ hat die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left[\widehat{\theta}_N\right] &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']\,\mathbf{X}\,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']\,\mathbf{X}\left(\frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Matrix

$$J_N = \frac{1}{N} \mathbf{X}' \mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}'] \, \mathbf{X}.$$

Der Newey-West-Schätzer 6.13

1. Man kann zeigen, dass eine nicht-stochastische Matrix $J \in \mathbb{R}^{k \times k}$ existiert, so dass

$$\lim_{N \to \infty} J_N = J.$$

2. Der Newey-West-Schätzer ist ein schwach konsistenter Schätzer $\widehat{J}_N$ für J (Newey, W. K. und West, K. D. (1987), *A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix*).

Der Newey-West-Schätzer ▪ Testtheorie auf der Grundlage des Newey-West-Schätzers 6.14

Der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}_N$ degeneriert asymptotisch:

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{Cov}\left[\widehat{\theta}_N\right] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} Q^{-1} J Q^{-1} = \mathbf{0}.$$

Daher betrachten wir die transformierte Größe $\sqrt{N}\left(\widehat{\theta}_N - \theta\right)$.

Diese Größe hat die Kovarianzmatrix

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{Cov}\left[\sqrt{N}\left(\widehat{\theta}_N - \theta\right)\right] = \lim_{N \to \infty} N \frac{1}{N} Q^{-1} J Q^{-1} = Q^{-1} J Q^{-1}.$$

Der Newey-West-Schätzer ▪ Testtheorie auf der Grundlage des Newey-West-Schätzers 6.15

Unter der Voraussetzung normalverteilter Störungen (u_t) gilt

$$\sqrt{N}\left(\widehat{\theta}_N - \theta\right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0}, Q^{-1} J Q^{-1}\right).$$

Der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}_N$ hat die approximative Verteilung für hinreichend großes N

$$\widehat{\theta}_N \dot{\approx} N\left(\theta, \frac{1}{N} Q^{-1} J Q^{-1}\right).$$

Auf der Grundlage dieser Verteilung können wir im linearen Regressionsmodell wieder testen.

Der Newey-West-Schätzer ▪ 1. Das asymptotische Verhalten von J_N 6.16

$$J_N = \frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{uu}']\,\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbb{E}[\mathbf{X}'\mathbf{uu}'\mathbf{X}] = \frac{1}{N}\mathbb{E}\big[\mathbf{X}'\mathbf{u}\,(\mathbf{X}'\mathbf{u})'\big]$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{Nk} \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' & \mathbf{x}_2' & \cdots & \mathbf{x}_N' \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \sum_{t=1}^{N} \mathbf{x}_t' u_t$$

Der Newey-West-Schätzer ▪ 1. Das asymptotische Verhalten von J_N 6.17

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{N}\mathbf{x}_t'u_t\left(\sum_{s=1}^{N}\mathbf{x}_s'u_s\right)'\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\mathbb{E}\big[\mathbf{x}_t'u_t\,(\mathbf{x}_s'u_s)'\big] \end{aligned}$$

Sei Γ_i die i-te Autokovarianzmatrix für den multivariaten stochastischen Prozess $(\mathbf{x}_t'u_t)_t$

$$\Gamma_i = \mathbb{E}\Big[\mathbf{x}_t'u_t\,\big(\mathbf{x}_{t+i}'u_{t+i}\big)'\Big]\,.$$

Der Newey-West-Schätzer ▪ 1. Das asymptotische Verhalten von J_N 6.18

$$\begin{aligned} J_N &= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \Gamma_0 & +\Gamma_1 & +\Gamma_2 & +\ldots & +\Gamma_{N-1} \\ +\Gamma_{-1} & +\Gamma_0 & +\Gamma_1 & +\ldots & +\Gamma_{N-2} \\ +\Gamma_{-2} & +\Gamma_{-1} & +\Gamma_0 & +\ldots & +\Gamma_{N-3} \\ +\ldots & & & & \\ +\Gamma_{-N+1} & +\Gamma_{-N+2} & +\Gamma_{-N+3} & +\ldots & +\Gamma_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N}\left(N\Gamma_0 + \sum_{i=1}^{N-1}(N-i)\,(\Gamma_i + \Gamma_{-i})\right) \\ &= \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{N-i}{N}\,(\Gamma_i + \Gamma_{-i}) \end{aligned}$$

Der Newey-West-Schätzer ▪ 1. Das asymptotische Verhalten von J_N 6.19

Man kann zeigen, dass der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Gamma_i = J,$$

wobei $J = f(\mathbf{0})$ gilt, mit $f(\mathbf{0})$ die spektrale Dichtematrix von $(\mathbf{x}_t' u_t)_t$ an der Stelle Null (weitere Ausführungen dazu in Kapitel „Statistische Methoden im Frequenzbereich“).

Der Newey-West-Schätzer ▪ 2. Das Schätzverfahren 6.20

Die Autokovarianzmatrizen haben die Eigenschaft $\Gamma_{-i} = \Gamma_i'$. Daher können wir schreiben

$$J = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Gamma_i = \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_i + \Gamma_i') .$$

Der Newey-West-Schätzer ist

$$\widehat{J}_N = \widehat{\Gamma}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\widehat{\Gamma}_i + \widehat{\Gamma}_i'\right) \omega_i$$

mit so genannten Bartlett-Gewichten

$$\omega_{i,N} = \begin{cases} 1 - \frac{i}{b_N+1}, & 1 \leq i \leq b_N + 1 \\ 0, & i > b_N + 1 \end{cases}$$

und Bandbreite $b_N \geq 0$.

6.3 Das Schätzverfahren nach Cochrane und Orcutt

Das Schätzverfahren nach Cochrane und Orcutt 6.21

Dieses Schätzverfahren stammt aus Cochrane, D. und Orcutt, G. H. (1949), *Application of least squares regression to relationships containing autocorrelated error terms.* [5]

Wir betrachten das lineare Regressionsmodell

$$Y_t = \theta_1 x_{t1} + \theta_2 x_{t2} + \ldots + \theta_k x_{tk} + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, N,$$

[5]Siehe Kapitel 5.5 in Shumway und Stoffer (2006).

wobei die Abhängigkeitsstruktur von (u_t) mit Hilfe eines ARMA$[p, q]$-Modells beschrieben wird

$$\alpha(\mathrm{B})\, u_t = \beta(\mathrm{B})\, \varepsilon_t.$$

Das Schätzverfahren nach Cochrane und Orcutt 6.22

Wir schätzen abwechselnd die Parameter θ, bzw. α und β in den folgenden Schritten:

1. Berechnen der OLS-Schätzung $\widehat{\theta}$ für den Parametervektor θ, unter den klassischen Annahmen (als wären die Störungen u_t unkorreliert). Berechnen der OLS-Residuen $\widehat{u}_t$.
2. Anpassung eines ARMA$[p, q]$-Modells an die Residuenreihe $(\widehat{u}_t)$. ML-Schätzung der Parameter α und β mit den Schätzfunktionen $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$.
3. Berechnen der Schätzung $\widehat{\theta}$ für den Parametervektor θ mit der generalisierten Methode der kleinsten Quadrate (Generalized Least Squares, GLS).
4. Anpassung eines ARMA$[p, q]$-Modells an die neue Residuenreihe $(\widehat{u}_t)$. ML-Schätzung der Parameter α und β mit den Schätzfunktionen $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$.

Die Schritte 3. und 4. können wiederholt werden, bis sich die Lösungen $\widehat{\theta}$, $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$ stabilisiert haben.

Das Schätzverfahren nach Cochrane und Orcutt ▪ Das GLS-Schätzverfahren 6.23

Wir wollen die Parameter θ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ im linearen Modell

$$Y_t = \theta_1 x_{t1} + \theta_2 x_{t2} + \ldots + \theta_k x_{tk} + u_t \quad \text{mit} \quad \alpha(\mathrm{B})\, u_t = \beta(\mathrm{B})\, \varepsilon_t$$

schätzen. Durch Invertieren des linearen Filters $\beta(\mathrm{B})$ erhalten wir

$$c(\mathrm{B})\, u_t = \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad c(\mathrm{B}) = \frac{\alpha(\mathrm{B})}{\beta(\mathrm{B})}$$

und weiter

$$\begin{aligned} c(\mathrm{B})\, Y_t &= \theta_1 c(\mathrm{B})\, x_{t1} + \theta_2 c(\mathrm{B})\, x_{t2} + \ldots + \theta_k c(\mathrm{B})\, x_{tk} + c(\mathrm{B})\, u_t \Longleftrightarrow \\ \widetilde{Y}_t &= \theta_1 \widetilde{x}_{1t} + \theta_2 \widetilde{x}_{2t} + \ldots + \theta_k \widetilde{x}_{kt} + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Im linearen Modell (6.1) wird Annahme (ii) wieder eingehalten. Der OLS-Schätzer $\widehat{\theta}$ im Modell (6.1) ist der GLS-Schätzer für das Ausgangsmodell.

Literaturhinweise 6.24

Stahlecker, P., Kröh, P. und M. Breitig (2018), Eine Einführung in das lineare Modell, Skript, Version 2.0, Universität Hamburg, Hamburg, Kapitel 8.3, 17

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 2.3, 9.1

Shumway und Stoffer (2011), Time Series Analysis and Its Applications, Kapitel 5.6

6.4 Transferfunktionsmodelle

Transferfunktionsmodelle 6.25

Ein Transferfunktionsmodell ist ein lineares Regressionsmodell mit *stochastischen Regressoren* und *autokorrelierten Störungen*. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden das Modell mit nur *einem* stochastischen Regressor, dem stochastischen Prozess (X_t). Sowohl X_t als auch seine zeitlichen Verzögerungen X_{t-u}, $u \geq 1$ üben Einfluss auf Y_t aus.

$$\begin{aligned} Y_t &= \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \ldots + u_t \Leftrightarrow \\ Y_t &= \nu(\mathrm{B})\, X_t + u_t \end{aligned}$$

Transferfunktionsmodelle 6.26

- Die Folge der Gewichte (ν_u) heißt *Transferfunktion*. Diese kann endlich: $(\nu_u)_{0\leq u\leq o}$ oder unendlich: $(\nu_u)_{u\geq 0}$ sein. Die Entscheidung für eine endliche oder eine unendliche Transferfunktion und ggf. die Bestimmung der Ordnung o erfolgen im Rahmen der Identifikation. In dieser Vorlesung werden nur endliche Transferfunktionen $(\nu_u)_{0\leq u\leq o}$ betrachtet.
- (X_t) und (u_t) werden als stochastisch unabhängig angenommen.
- (X_t) ist ein ARMA$[p, q]$-Prozess, $\alpha(\mathrm{B})\, X_t = \beta(\mathrm{B})\, \varepsilon_t$.
- (u_t) ist ein ARMA$[p^*, q^*]$-Prozess, $\alpha^*(\mathrm{B})\, u_t = \beta^*(\mathrm{B})\, \varepsilon_t^*$.
- (Y_t) nennen wir auch *Output* und (X_t) *Input* der Transformation $\nu(\mathrm{B})$.

Das Schätzverfahren 6.27

Wir schätzen abwechselnd die Parameter $\nu = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \ldots & \nu_o \end{pmatrix}$, bzw. $\alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \ldots & \alpha_{p^*}^* \end{pmatrix}$ und $\beta^* = \begin{pmatrix} \beta_1^* & \beta_2^* & \ldots & \beta_{q^*}^* \end{pmatrix}$ in den folgenden Schritten:

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion (ν_u). Berechnung der Residuen $\widehat{u}_t = y_t - \widehat{\nu}(\mathrm{B})\, x_t$.

II. Anpassung eines ARMA$[p^*, q^*]$-Modells an die Residuenreihe $(\widehat{u}_t)$. Schätzung der Parameter α^* und β^*.

III. Gesamtschätzung des Transferfunktionsmodells unter Berücksichtigung der Struktur der Transferfunktion (ν_u) gemäß I. und des ARMA$[p^*, q^*]$-Modells für (u_t) gemäß II.

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion ▪ Kreuzkovarianz- und Kreuzkorrelationsfunktion 6.28

Die theoretischen Momente:

- die theoretische Kreuzkovarianzfunktion

$$\gamma_{XY}(\tau) = \mathbb{E}[(X_{t+\tau} - \mu_X)(Y_t - \mu_Y)]$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}(-\tau) &= \mathbb{E}[(X_{t-\tau} - \mu_X)(Y_t - \mu_Y)] = \mathbb{E}[(Y_t - \mu_Y)(X_{t-\tau} - \mu_X)] \\ &= \mathbb{E}[(Y_{t+\tau} - \mu_Y)(X_t - \mu_X)] = \gamma_{YX}(\tau)\,.\end{aligned}$$

- die theoretische Kreuzkorrelationsfunktion (CCF)

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{\gamma_{XY}(\tau)}{\sqrt{\gamma_X(0)\,\gamma_Y(0)}} \quad \text{mit} \quad \rho_{XY}(-\tau) = \rho_{YX}(\tau)\,.$$

Wir betrachten nur *gemeinsam stationäre* Prozesse (X_t), (Y_t), für welche die theoretischen Kreuzmomente vom Lag τ, jedoch nicht vom Zeitpunkt t abhängig sind.

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion ▪ Kreuzkovarianz- und Kreuzkorrelationsfunktion 6.29

Die empirischen Momente:

- die empirische Kreuzkovarianzfunktion

$$\widehat{\gamma}_{XY}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-\tau}(x_{t+\tau} - \overline{x})(y_t - \overline{y})\,, & \tau \geq 0 \\ \frac{1}{N}\sum_{t=1-\tau}^{N}(x_{t+\tau} - \overline{x})(y_t - \overline{y})\,, & \tau < 0 \end{cases}$$

- die empirische Kreuzkorrelationsfunktion (CCF)

$$\widehat{\rho}_{XY}(\tau) = \frac{\widehat{\gamma}_{XY}(\tau)}{\sqrt{\widehat{\gamma}_X(0)\,\widehat{\gamma}_Y(0)}}$$

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion ▪ White-Noise-Input 6.30

Die Transferfunktion (ν_u) für ein Modell mit Input (ε_t) White-Noise kann mit Hilfe der theoretischen CCF zwischen dem Input und dem Output bestimmt werden:

$$\nu_\tau = \frac{\sigma_Y}{\sigma_\varepsilon}\rho_{\varepsilon Y}(-\tau)\,.$$

Dementsprechend kann (ν_u) aus den Daten $(\widehat{\varepsilon}_t)$ und (y_t) geschätzt werden

$$\widehat{\nu}_\tau = \frac{\widehat{\sigma}_Y}{\widehat{\sigma}_\varepsilon} \widehat{\rho}_{\varepsilon Y}(-\tau).$$

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion ▪ White-Noise-Input 6.31

- Wenn $(\varepsilon_{t+\tau})$ und (Y_t) unkorreliert sind, so hat die CCF $\widehat{\rho}_{\varepsilon Y}(\tau)$ die folgende approximative Verteilung für N hinreichend groß

$$\widehat{\rho}_{\varepsilon Y}(\tau) \dot{\approx} N\left(0, \frac{1}{N}\right).$$

  In diesem Fall liegen die Realisationen von $\widehat{\rho}_{\varepsilon Y}(\tau)$ mit 95% Vertrauenswahrscheinlichkeit innerhalb des approximativen Schwankungsintervals $\pm 1.96 \Big/ \sqrt{N}$ und wir schätzen $\widehat{\nu}_\tau = 0$.

- Eine Realisation von $\widehat{\rho}_{\varepsilon Y}(\tau)$ außerhalb vom Interval $\pm 1.96 \Big/ \sqrt{N}$ deutet auf einen statistisch signifikanten Einfluss des Inputs $(\varepsilon_{t+\tau})$ auf (Y_t) (5% Irrtumswahrscheinlichkeit). In diesem Fall schätzen wir $\widehat{\nu}_\tau = \frac{\widehat{\sigma}_Y}{\widehat{\sigma}_\varepsilon} \widehat{\rho}_{\varepsilon Y}(\tau) \neq 0$.

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion ▪ White-Noise-Input 6.32

Für allgemeine Transferfunktionsmodelle mit beliebigem Input (X_t) muss der Input (X_t) so gefiltert werden, dass ein White-Noise-Prozess ensteht. Dies erfolgt durch Anpassung eines ARMA$[p,q]$-Modells, $\alpha(\mathrm{B}) X_t = \beta(\mathrm{B}) \varepsilon_t$ und anschließende Filtration:

$$c(\mathrm{B}) X_t = \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad c(\mathrm{B}) = \frac{\alpha(\mathrm{B})}{\beta(\mathrm{B})}.$$

Analog wird das Transferfunktionsmodell transformiert:

$$\begin{aligned} Y_t &= \nu(\mathrm{B}) X_t + u_t \Leftrightarrow \\ c(\mathrm{B}) Y_t &= \nu(\mathrm{B}) c(\mathrm{B}) X_t + c(\mathrm{B}) u_t. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Das transformierte Modell (6.2) hat den Output $(c(\mathrm{B}) Y_t)$ und den Input $(c(\mathrm{B}) X_t)$ White-Noise. Wir bestimmen (ν_u) im Rahmen des transformierten Modells (6.2) auf der Grundlage der CCF zwischen Input und Output.

I. Identifikation und vorläufige Schätzung der Transferfunktion 6.33

1. Anpassung eines ARMA$[p,q]$-Modells an die *zentrierte* Reihe (x_t), $\alpha(\mathrm{B}) X_t = \beta(\mathrm{B}) \varepsilon_t$. Der ARMA$[p,q]$-Prozess (X_t) hat die MA$[\infty]$-Darstellung

$$c(\mathrm{B}) X_t = \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad c(\mathrm{B}) = \frac{\alpha(\mathrm{B})}{\beta(\mathrm{B})}.$$

2. Filtern der Reihe (x_t) mit dem Filter $c\,(\mathrm{B})$. Diese Transformation wird als *Prewhitening* bezeichnet. (Die gefilterte Reihe (x_t) entspricht den Residuen aus 1.: $\widehat{c}\,(\mathrm{B})\,x_t = \widehat{\varepsilon}_t$.)
3. Filtern der Output-Reihe (y_t) mit dem Filter $c\,(\mathrm{B})$: $\widehat{c}\,(\mathrm{B})\,y_t = \widetilde{y}_t$.
4. Bestimmen der CCF von $(\widehat{\varepsilon}_t)$ und $(\widetilde{y}_t)$ und Schätzung der Transferfunktion

$$\widehat{\nu}_\tau = \frac{\widehat{\sigma}_{\widetilde{Y}}}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\varepsilon}}} \widehat{\rho}_{\widehat{\varepsilon}\widetilde{Y}}\,(-\tau)\,.$$

II. Anpassung eines ARMA$[p^*, q^*]$-Modells an die Residuenreihe $(\widehat{u}_t)$ 6.34

- Wir bilden die Residuen
$$\widehat{u}_t = y_t - \widehat{\nu}\,(\mathrm{B})\,x_t.$$
- Wir passen ein ARMA$[p^*, q^*]$-Modell
$$\alpha^*\,(\mathrm{B})\,\widehat{u}_t = \beta^*\,(\mathrm{B})\,\varepsilon_t^*$$
an $(\widehat{u}_t)$ an und schätzen die Parameter α^* und β^*.

III. Gesamtschätzung des Transferfunktionsmodells 6.35

Wir schätzen die Parameter ν, α^* und β^* im gesamten Modell

$$Y_t = \nu\,(\mathrm{B})\,X_t + u_t \quad \text{mit} \quad \alpha^*\,(\mathrm{B})\,u_t = \beta^*\,(\mathrm{B})\,\varepsilon_t^*$$

unter Berücksichtigung der Spezifikation für die Transferfunktion (ν_u) aus I. und des unter II. spezifizierten ARMA$[p^*, q^*]$-Modells für die Störungen(u_t).

Literaturhinweise 6.36

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 9.3