3.4 Saisonale ARIMA-Modelle

Saisonale ARIMA-Modelle ▪ Saisonale Differenzen 3.88

Im Rahmen der Datentransformation kann

- der Trend durch das d-fache Bilden von einfachen Differenzen

$$\Delta^d Y_t = (1-B)^d \, Y_t$$

- die Saisonkomponente durch das D-fache Bilden von saisonalen Differenzen

$$\Delta_s Y_t = Y_t - Y_{t-s} = Y_t - B^s Y_t = (1-B^s)\, Y_t$$
$$\Delta_s^D Y_t = (1-B^s)^D \, Y_t$$

eliminiert werden.

Saisonale ARIMA-Modelle ▪ Saisonale Differenzen 3.89

Einen Hinweis auf das Vorliegen einer Saisonkomponente liefern die ACF und PACF, wenn sie signifikante Werte für kleine Lags sowie für die Lags um die Saisonperiode s, $2s$,... aufweisen. Gleichzeitig sind die dazwischen liegenden Lags nicht singnifikant von Null verschieden.

Saisonale ARIMA-Modelle ▪ Saisonale Differenzen 3.90

Oft ist es nötig, beide Trend und Saisonkomponente zu bereinigen

$$(1-B)^d \, (1-B^s)^D \, Y_t.$$

Wir entscheiden über die Anzahle d und D der Differenzenbildungen mit Hilfe der Methode der *variaten Differenzen*. Wir wählen das Paar (d, D) mit der kleinsten empirischen Varianz der transformierten Zeitreihe $(1-B)^d \, (1-B^s)^D \, y_t$ aus.

Saisonale ARIMA-Modelle 3.91

Definition 39 (SARIMA$[p,d,q] \times [P,D,Q]_s$-Prozess)**.** Ein stochastischer Prozess (Y_t) heißt **saisonaler Autoregressiver-Integrierter-Moving-Average-Prozess der Ordnungen** $[p,d,q]$ **und** $[P,D,Q]_s$, kurz SARIMA$[p,d,q] \times [P,D,Q]_s$-Prozess, wenn er der Gleichung

$$\alpha(B)\,\eta(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\,Y_t = \beta(B)\,\theta(B^s)\,\varepsilon_t$$

mit (ε_t) ein White-Noise-Prozess genügt.

Literaturhinweise 3.92

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Abschnitt *Saisonale ARIMA-Modelle* in Kapitel 3.4 und Abschnitt *Lineare Filterung von Zeitreihen* in Kapitel 2.5

3.5 Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle

Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle 3.93

Wir unterscheiden zwischen

- einem *deterministischen* Trend, z.B. dem polynomialen Trend. Ein lineares Modell mit deterministischem Trend bezeichnen wir als *trendstationär*.

und

- einem *stochastischen* Trend, welcher im Rahmen eines instationären linearen Modells der Klasse ARIMA entsteht. Ein lineares Modell mit stochastischem Trend bezeichnen wir als *differenzenstationär*.

Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle 3.94

Sei (ε_t) ein White-Noise-Prozess und (y_t) die zur Verfügung stehende Zeitreihe. Wir betrachten das lineare Modell

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 t + Z_t \quad \text{mit} \quad (1 - \alpha\,\mathrm{B})\, Z_t = \varepsilon_t.$$

1. $|\alpha| < 1$, (Z_t) ist stationär, (Y_t) ist trendstationär.

   Die fehlerhafte Behandlung der Zeitreihe (y_t) als Realisation eines differenzenstationären Prozesses hat vertretbare Konsequenzen für die Modellschätzung und für das Testen.

2. $\alpha = 1$, (Z_t) ist nicht stationär, (Y_t) ist (zumindest) differenzenstationär.

   Die fehlerhafte Behandlung der Zeitreihe (y_t) als Realisation eines trendstationären und nicht differenzenstationären Prozesses hat gravierende Konsequenzen für die Modellschätzung und für das Testen.

(3.) $|\alpha| > 1$, ökonomisch nicht relevant.

Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle ▪ Der DF-Test 3.95

Der Einheitswurzeltest (Unit-Root-Test) von Dickey und Fuller erfolgt im Modell

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \pi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

mit

$$\begin{cases} \mu = \theta_0 (1-\alpha) + \alpha\theta_1 \\ \beta = \theta_1 (1-\alpha) \\ \pi = \alpha - 1 \end{cases} .$$

Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle ▪ Der ADF-Test 3.96

Der erweiterte (*augmented*) Einheitswurzeltest von Dickey und Fuller erfolgt im Modell

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

mit

$$\begin{cases} \mu = \theta_0 (1-\alpha) + \alpha\theta_1 \\ \beta = \theta_1 (1-\alpha) \\ \pi = \alpha - 1 \end{cases} .$$

Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle ▪ Der ADF-Test 3.97

Modell: $\Delta Y_t = \mu + \beta t + \pi Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t$ **Testhypothesen**:

$$H_0 : \beta = \pi = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \beta \neq 0 \vee \pi \neq 0$$

Teststatistik: Die Teststatistik ist die übliche F-Teststatistik. Ihre Verteilung unter H_0 wurde von Dickey und Fuller (1981) tabelliert. **Testentscheidung** (unter Berücksichtigung der jeweilligen Fehlerwahrscheinlichkeiten):

- H_0 beibehalten: die Hypothese eines differenzenstationären und nicht-trendstationären Modells kann nicht abgelehnt werden.
- H_0 ablehnen: die Hypothese eines differenzenstationären Modells wird abgelehnt. In diesem Fall können wir mit dem Ausgangsmodell wieder arbeiten und die Trendstationarität des Modells mit einem Standardtestverfahren überprüfen.

Differenzen- vs. trendstationäre lineare Modelle ▪ Der ADF-Test 3.98

Modell: $Y_t = \theta_0 + \theta_1 t + Z_t$, mit $\alpha(\mathrm{B}) Z_t = \varepsilon_t$, Z_t stationär. **Testhypothesen**:

$$H_0 : \theta_1 = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \theta_1 \neq 0$$

Teststatistik:

$$z = \frac{\widehat{\theta}_1}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_1}} \sim t_{N-2} \,|H_0$$

Testentscheidung (unter Berücksichtigung der jeweilligen Fehlerwahrscheinlichkeiten):

- H_0 beibehalten: die Hypothese eines nicht-trendstationären Modells kann nicht abgelehnt werden. **Insgesamt**: die Hypothese eines *stationären Modells* kann nicht abgelehnt werden.
- H_0 ablehnen: die Hypothese eines nicht-trendstationären Modells wird abgelehnt. **Insgesamt**: Hinweis auf ein *trendstationäres und nicht-differenzenstationäres Modell*.

Achtung! Der Störterm (Z_t) ist autokorreliert. Dazu noch mehr in Kapitel „Regressionsmodelle für Zeitreihen".

Literaturhinweise 3.99

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 4

Literaturhinweise ▪ Weiterführende Literatur 3.100

Kapitel 3.1, 3.2, 5.1 in

Pfaff, B. (2008), *Analysis of integrated and cointegrated time series with R*, 2. Auflage, Springer Verlag, New York