5 Statistische Methoden im Frequenzbereich

5.1 Das Periodogramm

5.1

Periodizitäten in Zeitreihen

Der Datensatz enthält die in DE monatlich gezahlten Gemeinschaftssteuern in Mio. Euro, Jan. 1994 – Jan. 2000.

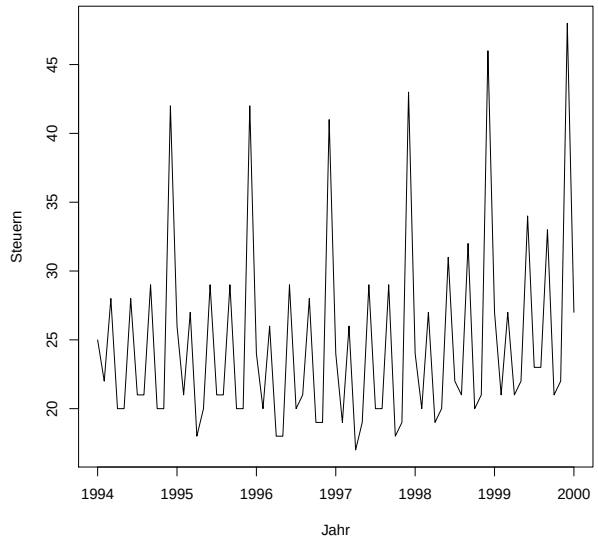

Abb. 5.1: Die Zeitreihe *Steuern*

Periodizitäten in Zeitreihen ▪ Die Frequenz

5.2

Die Zeitreihe *Steuern* weist zwei Arten von periodischen Schwankungen auf:

- Quartalsschwankungen mit der Periode $P = 3$
- jährliche Schwankungen mit der Periode $P = 12$.

Diese Periodizitäten haben jeweils die Frequenzen

- $\lambda = 1/3$, d.h. in einem Monat läuft ein drittel Quartalszyklus ab
- $\lambda = 1/12$, d.h. in einem Monat läuft ein zwölftel Jahreszyklus ab.

Periodizitäten in Zeitreihen ▪ Die Frequenz

5.3

Definition 49 (Frequenz)**.** Sei $f(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode P, d.h. $f(t+P) = f(t)$. Die **Frequenz** λ von $f(t)$ ist der Kehrwert von P

$$\lambda = \frac{1}{P}.$$

Eine periodische Zeitreihe (y_t) besteht aus sich nahezu identisch wiederkehrenden Teilsegmenten (Zyklen). Die Periode gibt die Länge eines Zyklus an, die Frequenz besagt, wieviele Zyklen in einer Zeiteinheit ablaufen.

Periodizitäten in Zeitreihen ▪ Die Frequenz

5.4

- Viele der folgenden Resultate erlauben eine besonders einfache Interpretation für die so genannten *Fourierfrequenzen*:
$$\lambda = \frac{k}{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
- Das Periodogramm $I(\lambda)$ ist eine Funktion der Frequenz λ. Mit dem Periodogramm können die Periodizitäten in einer Zeitreihe aufgedeckt werden. Ein Peak im Periodogramm bei einer Frequenz λ^* ist ein Hinweis auf eine mögliche Periodizität mit Frequenz λ^*.

Das Periodogramm

5.5

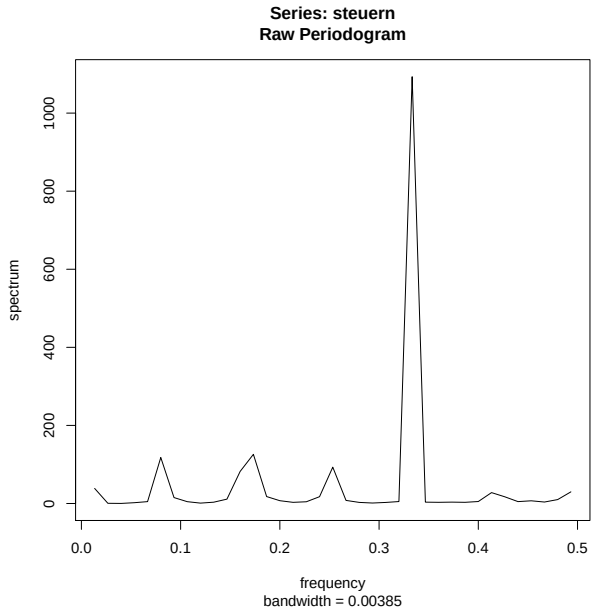

Abb. 5.2: Das Periodogramm der Reihe *Steuern*

Das Periodogramm

5.6

Definition 50 (Periodogramm)**.** Das **Periodogramm** oder Stichprobenspektrum der Zeitreihe (y_t) ist eine Funktion der Frequenz λ

$$I(\lambda) = N\left(C(\lambda)^2 + S(\lambda)^2\right)$$

mit $C(\lambda)$ die empirische Kovarianz der Zeitreihe (y_t) mit der Cosinuswelle $(\cos(2\pi\lambda t))$

$$C(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \overline{y})\cos(2\pi\lambda t).$$

und $S(\lambda)$ die empirische Kovarianz der Zeitreihe (y_t) mit der Sinuswelle $(\sin(2\pi\lambda t))$

$$S(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \overline{y})\sin(2\pi\lambda t).$$

Das Periodogramm

5.7

Die Kovarianzen $C(\lambda)$ und $S(\lambda)$ wurden mit der folgenden Formel für die Kovarianz ermittelt:

$$c_{YX} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \overline{y})\,x_t.$$

Die Gültigkeit dieser Formel ist leicht zu prüfen:

$$\begin{aligned} c_{YX} &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \overline{y})(x_t - \overline{x}) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y_t x_t - \overline{y}\,\overline{x} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y_t x_t - \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{y}x_t \\ &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \overline{y})\,x_t. \end{aligned}$$

Das Periodogramm ▪ Eigenschaften des Periodogramms

5.8

1. $I(0) = 0$
2. $I(-\lambda) = I(\lambda)$, d.h. das Periodogramm ist eine gerade Funktion von λ.

3. $I(\lambda+1) = I(\lambda)$, d.h. das Periodogramm ist periodisch mit $P = 1$.
4. $I(\lambda) \geq 0$

Aufgrund der Eigenschaften 2. und 3. ist es ausreichend, das Periodogramm im Intervall $[0, 0.5]$ zu betrachten.

Das Periodogramm 5.9

Das Periodogramm $I(\lambda)$ einer Zeitreihe (y_t) bemisst den Erklärungsgehalt einer harmonischen Schwingung mit der Frequenz λ für die zentrierte Zeitreihe $(y_t - \overline{y})$.

- Als *harmonische Schwingung* bezeichnen wir die Funktion

$$f(t) = a\cos(2\pi\lambda t) + b\sin(2\pi\lambda t)$$

mit a, $b \in \mathbb{R}$. Harmonische Schwingungen sind periodisch mit der Frequenz λ, bzw. mit der Periode $P = 1/\lambda$:

$$\begin{aligned} f\left(t+\frac{1}{\lambda}\right) &= a_1\cos\left(2\pi\lambda\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\right) + a_2\sin\left(2\pi\lambda\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)\right) \\ &= a_1\cos(2\pi\lambda t + 2\pi) + a_2\sin(2\pi\lambda t + 2\pi) \\ &= a_1\cos(2\pi\lambda t) + a_2\sin(2\pi\lambda t). \end{aligned}$$

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit einer harmonischen Schwingung 5.10

Wir betrachten das lineare Regressionsmodell

$$y_t - \overline{y} = a\cos(2\pi\lambda t) + b\sin(2\pi\lambda t) + \varepsilon_t. \tag{5.1}$$

In diesem Modell wird die zentrierte Reihe $(y_t - \overline{y})$ mit Hilfe lediglich einer harmonischen Schwingung der Frequenz λ erklärt. Das geschätzte Modell:

$$\widehat{y_t - \overline{y}} = \widehat{a}\cos(2\pi\lambda t) + \widehat{b}\sin(2\pi\lambda t).$$

Die Residuen:

$$\widehat{\varepsilon_t} = y_t - \overline{y} - \widehat{a}\cos(2\pi\lambda t) - \widehat{b}\sin(2\pi\lambda t).$$

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit einer harmonischen Schwingung 5.11

Für Fourierfreqeunzen $\lambda = k/N$ hat die OLS-Schätzung im Modell (5.1) eine besonders einfache Darstellung:

$$\widehat{a} = 2C(\lambda), \quad \widehat{b} = 2S(\lambda)$$

und

$$\begin{aligned} RSS &= \sum_{t=1}^{N} \widehat{\varepsilon}_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^{N} (y_t - \overline{y})^2 - 2N \left(C(\lambda)^2 + S(\lambda)^2 \right). \end{aligned}$$

Der Wert $N \left(C(\lambda)^2 + S(\lambda)^2 \right)$ in der Residuenquadratsumme entspricht dem Wert des Periodogramms an der Stelle λ, $I(\lambda)$. Daher: je höher der Wert des Periodogramms $I(\lambda)$ an der Stelle λ, umso besser die Anpassung im Modell (5.1). (Für Nichtfourierfrequenzen erlaubt $I(\lambda)$ eine ähnliche Interpretation.)

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit mehreren harmonischen Schwingungen 5.12

Wir betrachten das lineare Regressionsmodell

$$y_t - \overline{y} = \sum_{i=1}^{r} (a_i \cos(2\pi\lambda_i t) + b_i \sin(2\pi\lambda_i t)) + \varepsilon_t. \tag{5.2}$$

In diesem Modell wird die zentrierte Reihe $(y_t - \overline{y})$ mit Hilfe von r harmonischen Schwingungen der Frequenzen λ_i, $i = 1, \ldots, r$ erklärt. Das geschätzte Modell:

$$\widehat{y_t - \overline{y}} = \sum_{i=1}^{r} \left(\widehat{a}_i \cos(2\pi\lambda_i t) + \widehat{b}_i \sin(2\pi\lambda_i t) \right).$$

Die Residuen:

$$\widehat{\varepsilon}_t = y_t - \overline{y} - \sum_{i=1}^{r} \left(\widehat{a}_i \cos(2\pi\lambda_i t) + \widehat{b}_i \sin(2\pi\lambda_i t) \right).$$

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit mehreren harmonischen Schwingungen 5.13

Für Fourierfrequenzen λ_i hat die OLS-Schätzung im Modell (5.2) eine besonders einfache Darstellung:

$$\widehat{a}_i = 2C(\lambda_i), \quad \widehat{b}_i = 2S(\lambda_i)$$

und

$$\begin{aligned} RSS &= \sum_{t=1}^{N} \widehat{\varepsilon}_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^{N} (y_t - \overline{y})^2 - 2N \sum_{i=1}^{r} \left(C(\lambda_i)^2 + S(\lambda_i)^2 \right) \\ &= \sum_{t=1}^{N} (y_t - \overline{y})^2 - 2 \left[I(\lambda_1) + I(\lambda_2) + \ldots I(\lambda_r) \right] \end{aligned}$$

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit mehreren harmonischen Schwingungen 5.14

Tatsächlich lässt sich die Zeitreihe *Steuern* mit Hilfe der harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen $\lambda_1 = 1/12$, $\lambda_2 = 1/6$, $\lambda_3 = 1/4$ und $\lambda_4 = 1/3$ gut approximieren. Das geschätzte Modell ist

$$\begin{aligned} \widehat{y_t - \overline{y}} &= 1.55 \cos(2\pi\lambda_1 t) - 2.09 \sin(2\pi\lambda_1 t) + \\ &\quad 0.99 \cos(2\pi\lambda_2 t) + 2.14 \sin(2\pi\lambda_2 t) + \\ &\quad 0.61 \cos(2\pi\lambda_3 t) + 2.35 \sin(2\pi\lambda_3 t) + \\ &\quad 7.89 \cos(2\pi\lambda_4 t) + 0.57 \sin(2\pi\lambda_4 t) . \end{aligned}$$

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit mehreren harmonischen Schwingungen 5.15

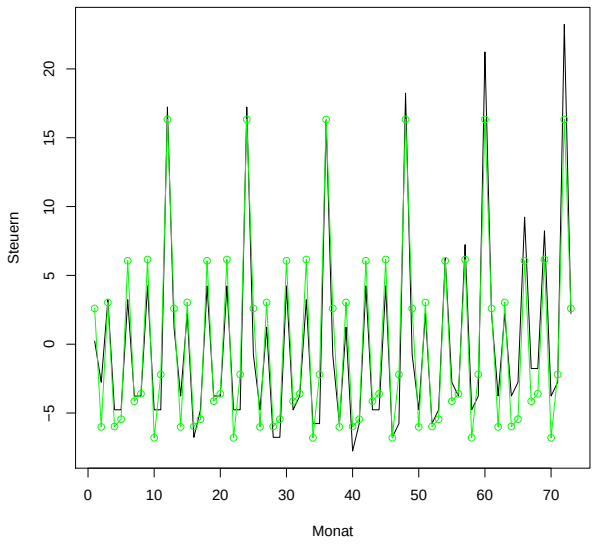

Abb. 5.3: Die harmonische Approximation für die Reihe *Steuern*

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit mehreren harmonischen Schwingungen 5.16

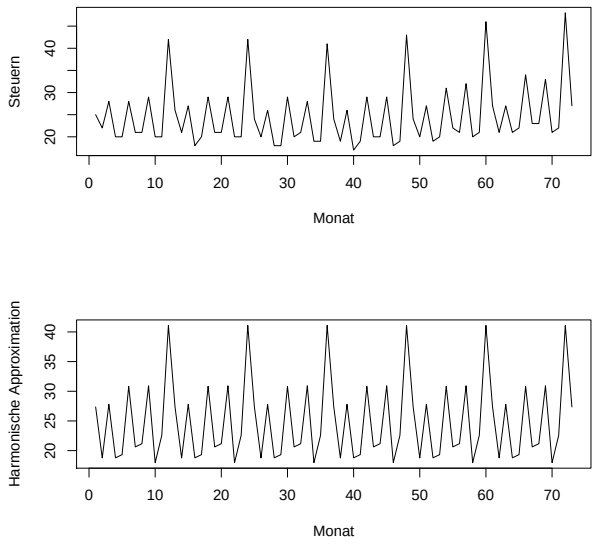

Abb. 5.4: Die harmonische Approximation für die Reihe *Steuern*

Das Periodogramm ▪ Das Regressionsmodell mit mehreren harmonischen Schwingungen 5.17

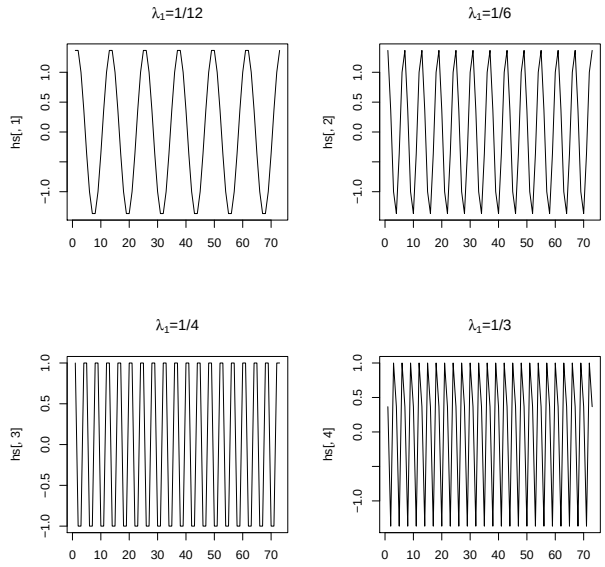

Abb. 5.5: Die Regressoren für die Approximation der Reihe *Steuern*

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms 5.18

Im Folgenden betrachten wir drei Phänomene, welche die Interpretation des Periodogramms erschweren. Diese Phänomene bezeichnen wir als

1. Aliasing (Maskierung)
2. Leakage (Durchsickern)
3. Harmonics (Oberschwingungen)

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Vorläufige Anmerkungen 5.19

- Wir bezeichnen eine Schwingung (oder allg. eine Periodizität) als
  - *kurzwellig*, wenn sie eine *kurze* Periode (kurze "Welle") und somit eine *hohe* Frequenz hat,
  - *langwellig*, wenn sie eine *lange* Periode (lange "Welle") und somit eine *niedrige* Frequenz hat.
- Sei (y_t) eine Zeitreihe mit einer Periodizität der Frequenz λ. Durch Anwendung der Periodogrammeigenschaften erhalten wir

$$I(\lambda) = I(k + \lambda), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

und

$$I(\lambda) = I(-\lambda) = I(k - \lambda), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dementsprechend haben λ und ihre so genannten *Aliases*

$$k + \lambda,\ k - \lambda, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

denselben Wert $I(\lambda)$ im Periodogramm. Diese Eigenschaft kann zu einer *Maskierung (Aliasing)* der tatsächlichen Periodizität der Frequenz λ führen.

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Aliasing 5.20

- *Aliasing (Maskierung)*: Eine Zeitreihe kann nicht kontinuierlich erfasst werden, sondern sie wird an diskreten Zeitpunkten abgetastet. Daher können tatsächliche Periodizitäten des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses oft nicht beobachtet werden. Stattdesen erscheinen sie als längerwellige Periodizitäten. Bspw. sei (y_t) eine Zeitreihe, die zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3, \ldots, N$ beobachtet wurde. In diesem Fall könnte eine nicht ganzzahlige Periodizität des zugrundeliegenden Prozesses mit Hilfe der Reihe (y_t) nicht aufgedeckt werden.

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Aliasing 5.21

- Beispiel: Sei (Y_t) ein kontinuierlicher stochastischer Prozess mit einer Periodizität der Periode $P = 7/6$, bzw. $\lambda = 6/7$. Diese Periodizität kann in einer Reihe (y_t) mit $t = 1, 2, 3, \ldots, N$ nicht erfasst werden. Sie hat jedoch die Aliases:

$$k + \lambda = \left\{\ldots, -\frac{15}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{13}{7}, \frac{20}{7}, \frac{27}{7}, \ldots\right\}$$

$$k - \lambda = \left\{\ldots, -\frac{27}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{7}, \frac{15}{7}, \ldots\right\}.$$

  Daher wird uns die Periodizität der Frequenz $\lambda = 6/7$ als langwellige Periodizität mit $\lambda = 1/7$, bzw. $P = 7$ erscheinen.

- *Hauptalias* (*principal alias*) nennen wir den Alias im Intervall $[0, 0.5]$. Im vorigen Beispiel ist $\lambda = 1/7$ der Hauptalias.

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Leakage 5.22

- *Leakage (Durchsickern)*: bei Vorliegen einer Periodizität der Frequenz λ in der Zeitreihe (y_t) ist der Wert des Periodogramms nicht nur an der Stelle λ, sondern auch in einer Umgebung von λ erhöht.

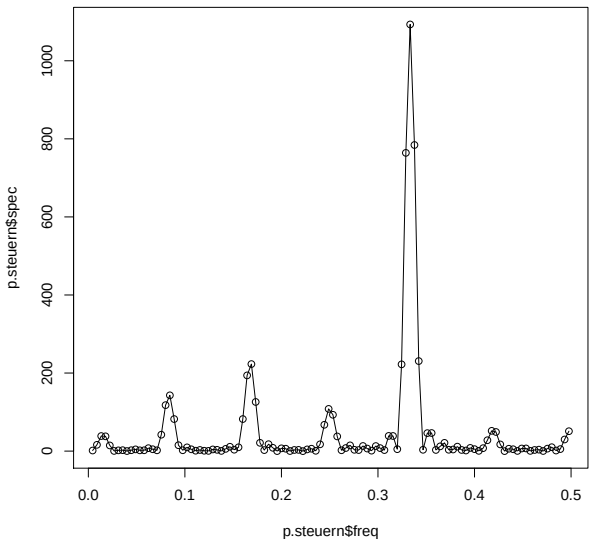

Abb. 5.6: Das Periodogramm der Reihe *Steuern*

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Oberschwingungen 5.23

- *Das Auftauchen von Oberschwingungen (harmonics)*: Sei (y_t) eine Zeitreihe mit *einer* Periodizität der Frequenz λ. Das Periodogramm von (y_t) wird einen Peak an der Stelle λ aufweisen, und zusätzlich auch an den Stellen 2λ, 3λ, $4\lambda, \ldots$ Dabei müssen die Frequenzen 2λ, 3λ, $4\lambda, \ldots$ keine eigentlichen Periodizitäten von (y_t) darstellen.

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Oberschwingungen 5.24

- Die harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen 2λ, 3λ, $4\lambda, \ldots$ werden als *Oberschwingungen* der harmonischen Schwingung mit der Frequenz λ bezeichnet.
- Sei (y_t) eine Zeitreihe mit einer Periodizität der Frequenz λ, bzw. mit der Periode $P = 1/\lambda$. Das Auftauchen von Oberschwingungen im Periodogramm von (y_t) ist darauf zurückzuführen, dass die harmonische Schwingung mit der Frequenz λ und ihre Oberschwingungen eine gemeinsame Periodizität mit der Periode $P = 1/\lambda$ haben. Daher werden sowohl die harmonische Schwingung der Frequenz λ als auch ihre Oberschwingungen einen Beitrag zu der Erklärung der Reihe (y_t) im linearen Modell leisten.

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Oberschwingungen 5.25

Der Datensatz enthält die monatliche Bierproduktion in Australien, im Zeitraum Januar 1956 – August 1995.

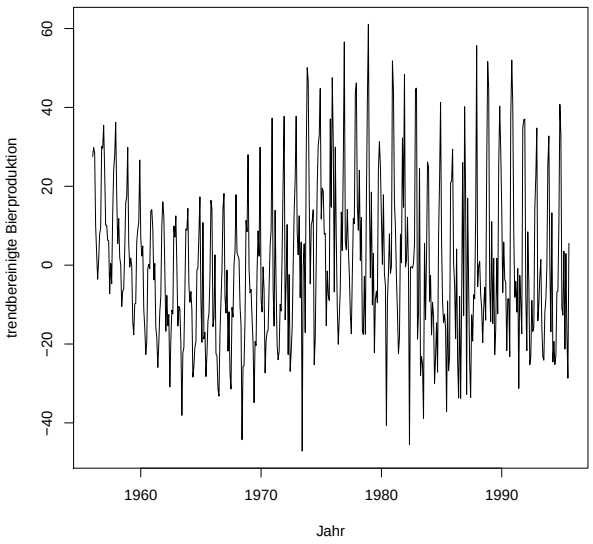

Abb. 5.7: Die Zeitreihe *Bier*

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Oberschwingungen 5.26

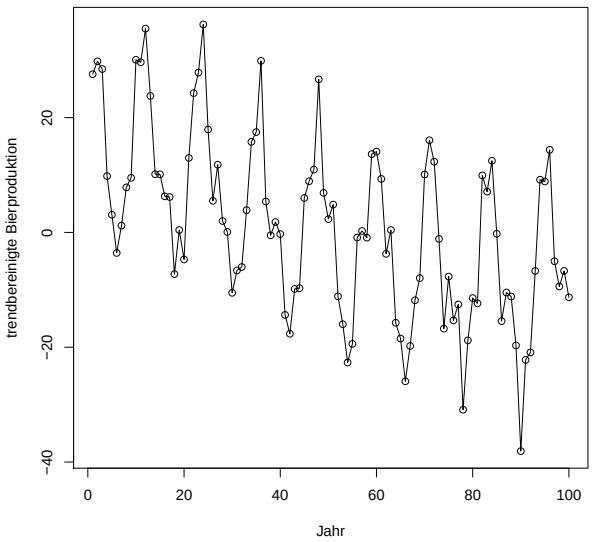

Abb. 5.8: Die Periodizität der Reihe *Bier*

Probleme bei der Interpretation des Periodogramms ▪ Oberschwingungen 5.27

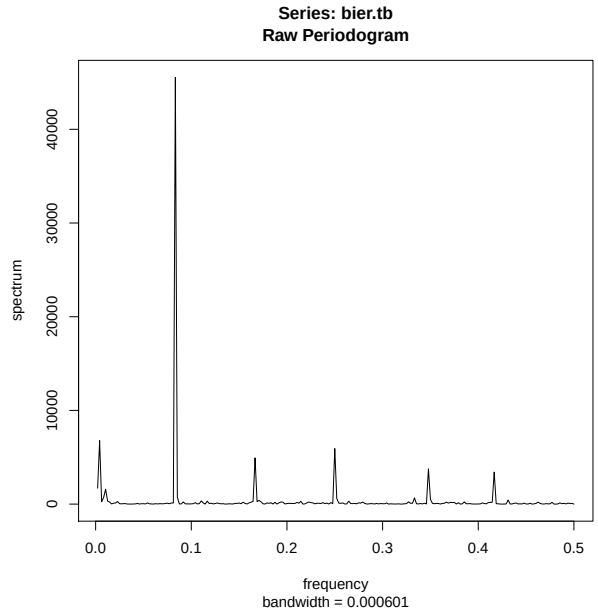

Abb. 5.9: Das Auftauchen von Oberschwingungen dargestellt an der Reihe *Bier*

5.2 Fouriertransformationen für Zeitreihen

Fouriertransformation 5.28

Definition 51 (Fouriertransformierte)**.** Sei (a_t) eine absolut summierbare Folge. Die **Fouriertransformierte** von (a_t) ist die Funktion der Frequenz $\lambda \in \mathbb{R}$

$$F(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} a_t e^{i2\pi\lambda t}. \tag{5.3}$$

Die Transformation von (a_t) in $F(\lambda)$ heißt Fouriertransformation.

Theorem 52 (Inverse Fouriertransformierte)**.** *Sei (a_t) eine absolut summierbare Folge mit der Fouriertransformierten $F(\lambda)$. Es gilt die folgende Umkehrung der Fouriertransformation für jedes $t \in \mathbb{Z}$*

$$a_t = \int_{-0.5}^{0.5} F(\lambda)\, e^{-i2\pi\lambda t}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Die Transformation von $F(\lambda)$ in (a_t) heißt inverse Fouriertransformation.

Fouriertransformation 5.29

- Die Darstellung einer Folge im „Zeitbereich“ anhand (a_t) ist äquivalent zu ihrer Darstellung im „Frequenzbereich“ anhand $F(\lambda)$.

- Die Fouriertransformierte $F(\lambda)$ kann als „Bild“ der Folge (a_t) im „Frequenzbereich“ interpretiert werden.

Hinweis: Die Fouriertransformation kann mit dem Algorithmus der schnellen Fouriertransformation (Fast Fourier Transform, FFT) zeiteffizient durchgeführt werden.

Fouriertransformation ▪ Eigenschaften der Fouriertransformierten 5.30

1. $F(0) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} a_t$, d.h. $F(0)$ ist die Summe der Folgeglieder.
2. $F(-\lambda) = \overline{F(\lambda)}$, d.h. $F(-\lambda)$ ist die komplex Konjugierte von $F(\lambda)$.
3. $F(\lambda + 1) = F(\lambda)$, d.h. $F(\lambda)$ ist periodisch mit der Periode 1.

Aufgrund der Eigenschaften 2. und 3. ist es ausreichend, die Fouriertransformierte $F(\lambda)$ im Intervall $[0, 0.5]$ zu betrachten.

Fouriertransformation 5.31

In der Zeitreihenanalyse sind die folgenden Fouriertransformierten wichtig:

- die Fouriertransformierte $F(\lambda)$ einer Zeitreihe (y_t)

und

- die Fouriertransformierte $I(\lambda)$ der empirischen Autokovarianzfunktion (c_τ).

Die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion 5.32

Theorem 53 (Zusammenhang zwischen $c(\tau)$ und $I(\lambda)$)**.** *Sei (y_t) eine Zeitreihe mit der empirischen Autokovarianzfunktion (c_τ). Zwischen der Autokovarianzfunktion (c_τ) und dem Periodogramm $I(\lambda)$ besteht der folgende Zusammenhang*

$$I(\lambda) = c_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{N-1} c_\tau \cos(2\pi\lambda\tau)$$

oder, äquivalent dazu, in der komplexen Darstellung

$$I(\lambda) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} c_\tau e^{i2\pi\lambda\tau}.$$

Dieser Satz besagt, dass das Periodogramm $I(\lambda)$ die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion (c_τ) ist.

Die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion 5.33

Theorem 54 (Parseval'sches Theorem)**.** *Sei (y_t) eine Zeitreihe mit der empirischen Autokovarianzfunktion (c_τ) und dem Periodogramm $I(\lambda)$. Mit Hilfe der Umkehrung der Fouriertransformation erhalten wir*

$$c_\tau = \int_{-0,5}^{0,5} I(\lambda)\, e^{-i2\pi\lambda\tau}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Speziell für $\tau = 0$ erhalten wir die empirische Varianz der Zeitreihe (y_t)

$$c_0 = \int_{-0,5}^{0,5} I(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{5.4}$$

Gleichung (5.4) entspricht einer Verteilung der empirischen Varianz c_0 der Reihe (y_t) auf Schwingungskomponenten mit Frequenzen $-0.5 \leq \lambda \leq 0.5$.

Literaturhinweise 5.34

Schlittgen und Streitberg (1999), Zeitreihenanalyse: Kapitel 1.6

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 6.1, 6.2, 6.3

5.3 Das Spektrum

Die Spektraldichtefunktion 5.35

Das theoretische Gegenstück zum Periodogramm $I(\lambda)$ ist die Spektraldichtefunktion $f(\lambda)$.

Definition 55. Sei (Y_t) ein stationärer stochastischer Prozess mit absolut summierbarer Autokovarianzfunktion (γ_τ). Die Spektraldichtefunktion oder kurz das Spektrum $f(\lambda)$ von (Y_t) ist die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion

$$f(\lambda) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_\tau e^{i2\pi\lambda\tau} = \gamma_0 + 2\sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma_\tau \cos(2\pi\lambda\tau).$$

Beispiel: Das Spektrum eines White-Noise-Prozesses (ε_t) mit Varianz $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$ ist konstant

$$f(\lambda) = \sigma^2.$$

Die Spektraldichtefunktion ▪ Eigenschaften der Spektraldichtefunktion 5.36

1. $f(0) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_\tau$
2. $f(-\lambda) = \overline{f(\lambda)}$
3. $f(\lambda + 1) = f(\lambda)$

4. $f(\lambda) \geq 0$
5. $f(\lambda)$ stetig

Aufgrund der Eigenschaften 2. und 3. ist es ausreichend, das Spektrum im Intervall $[0, 0.5]$ zu betrachten.

Die Spektraldichtefunktion 5.37

Theorem 56 (Parseval'sches Theorem für die theoretische Autokovarianzfunktion)**.** *Sei (Y_t) ein stationärer stochastischer Prozess mit der Autokovarianzfunktion (γ_τ) und der Spektraldichtefunktion $f(\lambda)$. Mit Hilfe der Umkehrung der Fouriertransformation erhalten wir*

$$\gamma_\tau = \int_{-0,5}^{0,5} f(\lambda) e^{-i2\pi\lambda\tau} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Speziell für $\tau = 0$ erhalten wir die Prozessvarianz γ_0

$$\gamma_0 = \int_{-0,5}^{0,5} f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda. \tag{5.5}$$

Gleichung (5.5) entspricht einer Zerlegung der Prozessvarianz γ_0 in Frequenzanteile.

5.4 Lineare Filter im Frequenzbereich

Lineare Filter im Frequenzbereich 5.38

Theorem 57. *Sei (X_t) ein stationärer Prozess mit absolut summierbarer Autokovarianzfunktion $\gamma_X(\tau)$ und Spektraldichtefunktion $f_X(\lambda)$. Sei (Y_t) der Output eines absolut summierbaren linearen Filters (a_u) angewendet auf (X_t)*

$$Y_t = \sum_u a_u X_{t-u}.$$

Dann hat (Y_t) das Spektrum

$$f_Y(\lambda) = |F_a(\lambda)|^2 f_X(\lambda)$$

mit $F_a(\lambda)$ die Fouriertransformierte der Folge (a_u).

Die Fouriertransformierte $F_a(\lambda)$ eines linearen Filters (a_u) heißt Transferfunktion. $|F_a(\lambda)|$ ist die so genannte Gainfunktion des Filters:

$$G_a(\lambda) = |F_a(\lambda)|.$$

Spektrum autoregressiver Prozesse 5.39

Sei (ε_t) ein White-Noise-Prozess mit Varianz $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$ und (Y_t) ein AR$[p]$-Prozess

$$\alpha\left(\mathrm{B}\right) Y_t = \varepsilon_t, \quad \alpha\left(\mathrm{B}\right) = 1 - \alpha_1\,\mathrm{B} - \ldots - \alpha_p\,\mathrm{B}^p.$$

Die Spektraldichtefunktion des AR$[p]$-Prozesses ist

$$f_Y\left(\lambda\right) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{u=1}^{p} \alpha_u e^{i2\pi\lambda u}\right|^2}.$$

Spektrum autoregressiver Prozesse ▪ Der Übergang von einem stationären AR$[1]$-Modell zu einem Random-Walk 5.40

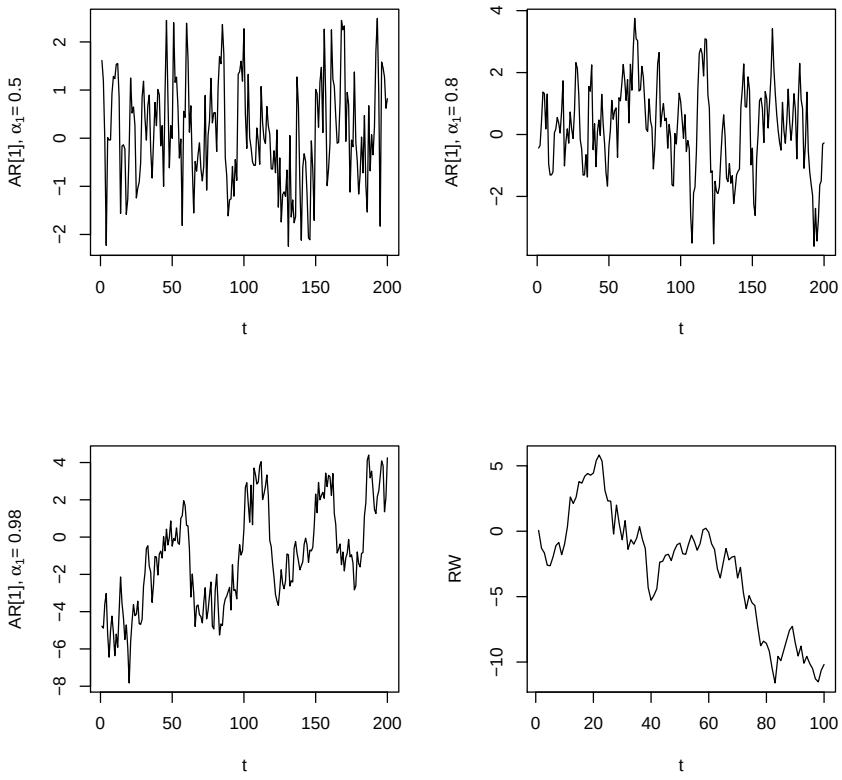

Abb. 5.10: Realisationen von AR-Prozessen und einem Random-Walk

Spektrum autoregressiver Prozesse ▪ Der Übergang von einem stationären AR$[1]$-Modell zu einem Random-Walk 5.41

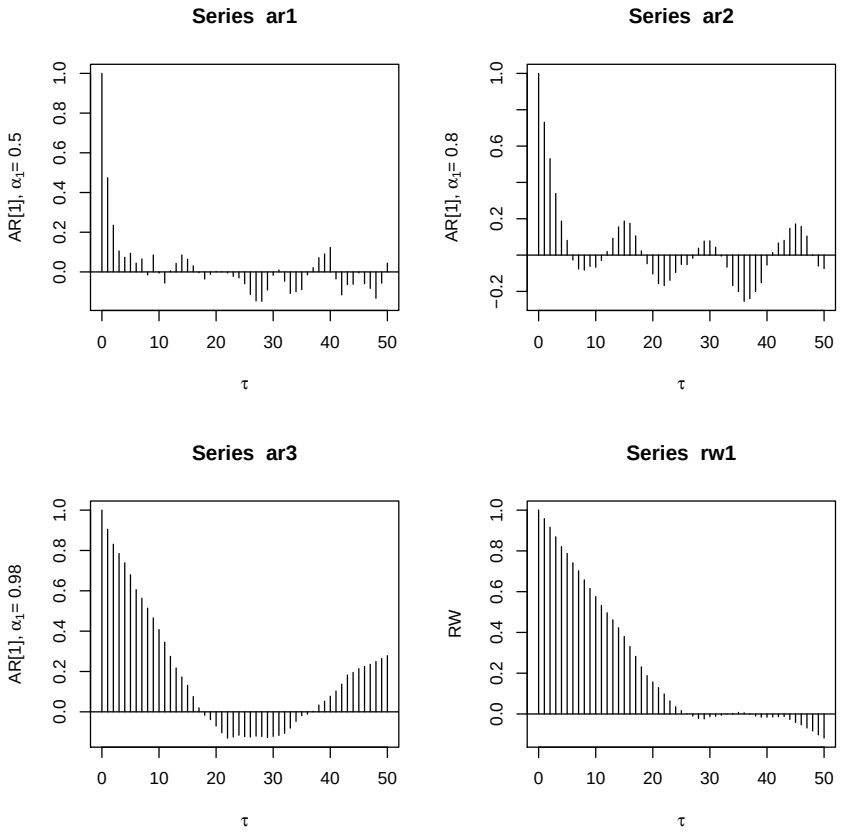

Abb. 5.11: Die empirischen ACF

Spektrum autoregressiver Prozesse ■ Der Übergang von einem stationären AR[1]-Modell zu einem Random-Walk 5.42

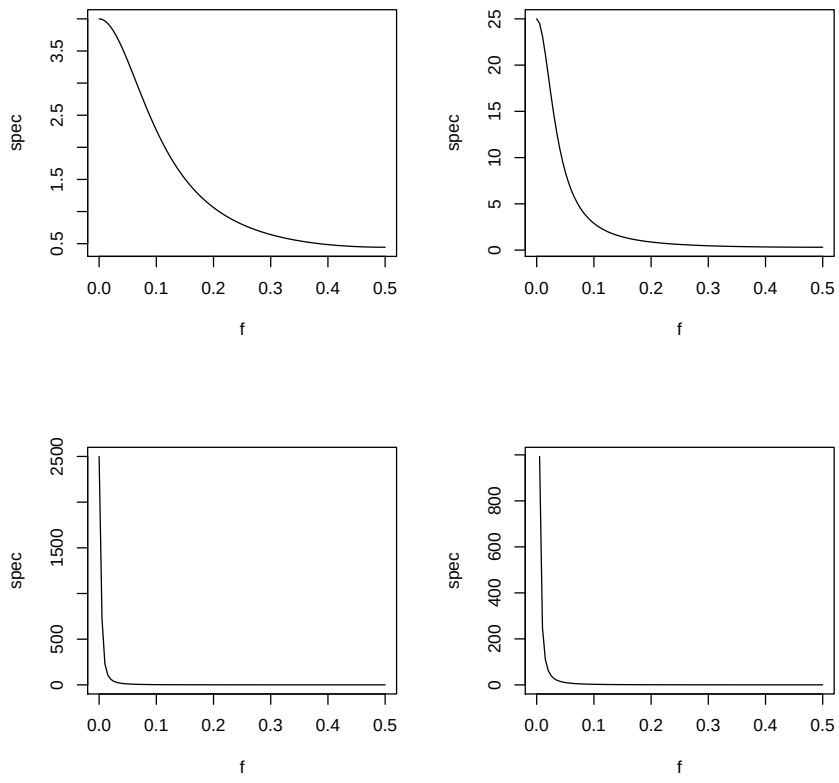

Abb. 5.12: Die theoretischen Spektren der zugrundeliegenden Prozesse

Spektrum autoregressiver Prozesse

5.43

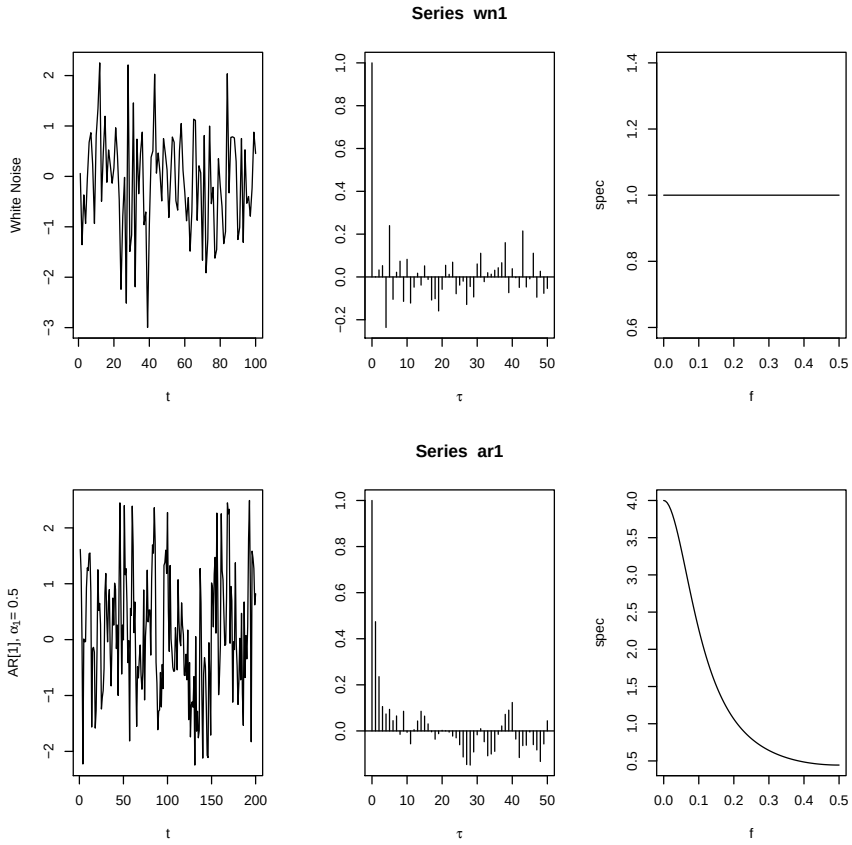

Abb. 5.13:

Spektrum autoregressiver Prozesse

5.44

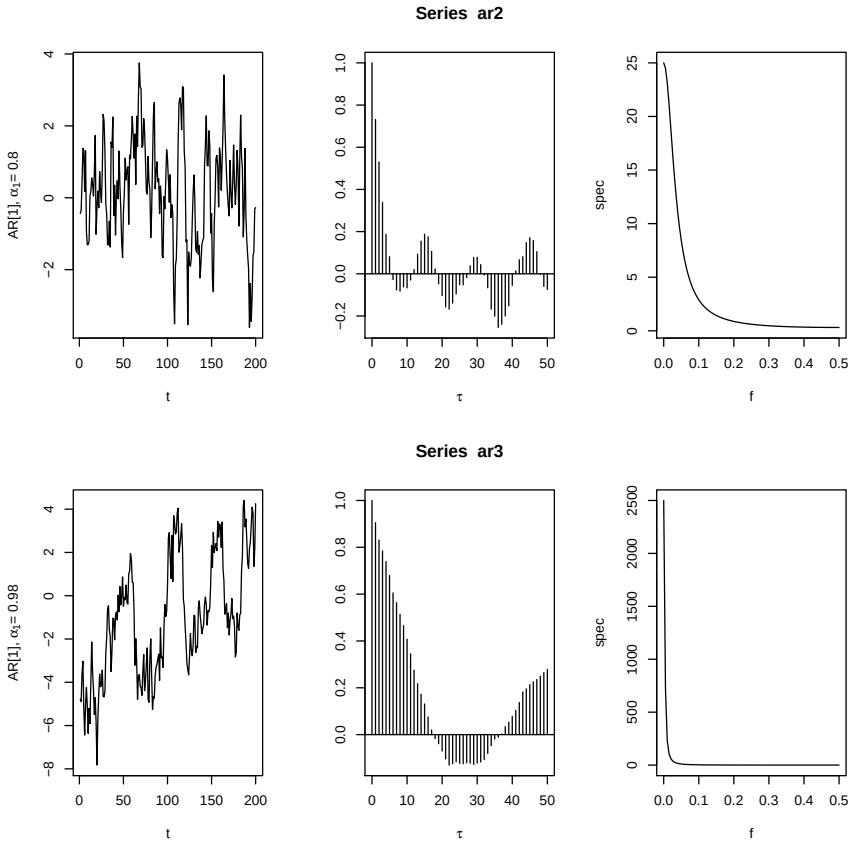

Abb. 5.14:

Spektrum autoregressiver Prozesse

5.45

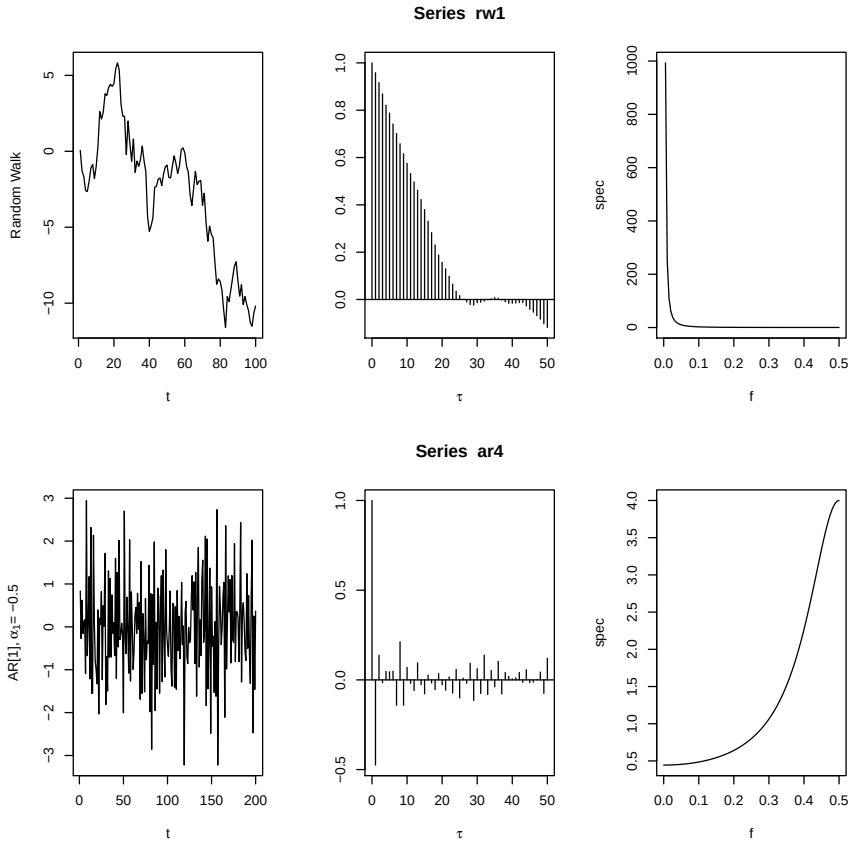

Abb. 5.15:

Spektrum autoregressiver Prozesse

5.46

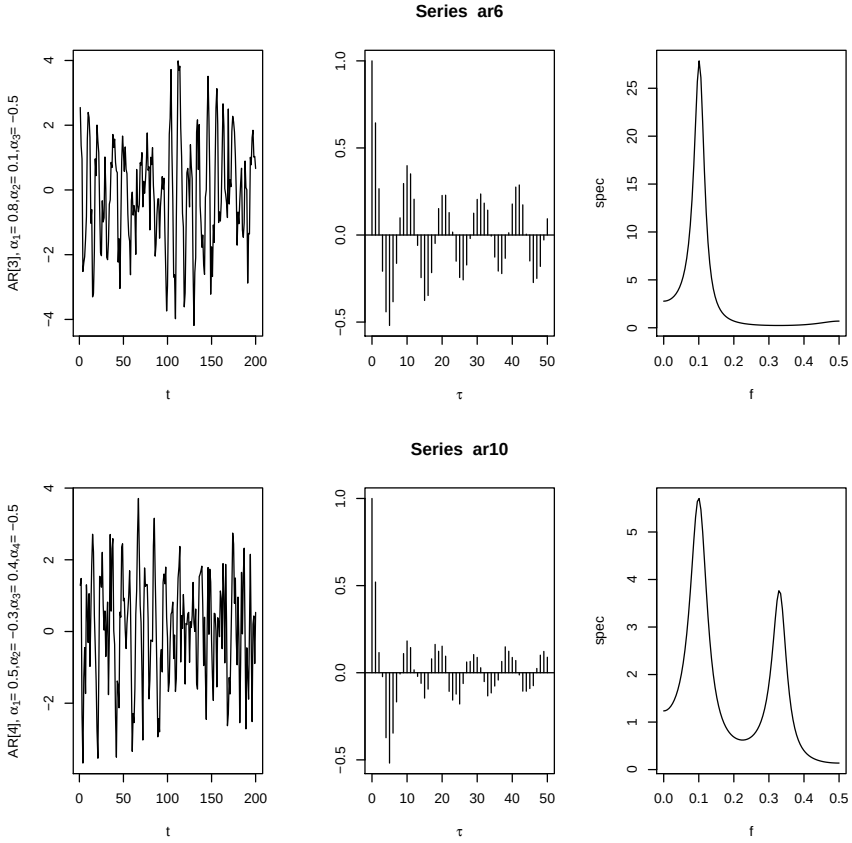

Abb. 5.16:

Spektrum MA$[q]$-Prozesse 5.47

Sei (ε_t) ein White-Noise-Prozess mit Varianz $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$ und (Y_t) ein MA$[q]$-Prozess

$$Y_t = \beta\left(\mathrm{B}\right)\varepsilon_t, \quad \beta\left(\mathrm{B}\right) = 1 - \beta_1\,\mathrm{B} - \ldots - \beta_q\,\mathrm{B}^q.$$

Die Spektraldichtefunktion des MA$[q]$-Prozesses lautet

$$f_Y\left(\lambda\right) = \left|1 - \sum_{u=1}^{q} \beta_u e^{i2\pi\lambda u}\right|^2 \sigma^2.$$

Spektrum ARMA$[p, q]$-Prozesse 5.48

Sei (ε_t) ein White-Noise-Prozess mit Varianz $\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$ und (Y_t) ein ARMA$[p, q]$-Prozess

$$\alpha\left(\mathrm{B}\right) Y_t = \beta\left(\mathrm{B}\right)\varepsilon_t,$$

mit

$$\alpha\left(\mathrm{B}\right) = 1 - \alpha_1\,\mathrm{B} - \ldots - \alpha_p\,\mathrm{B}^p, \quad \beta\left(\mathrm{B}\right) = 1 - \beta_1\,\mathrm{B} - \ldots - \beta_q\,\mathrm{B}^q.$$

Die Spektraldichtefunktion des ARMA$[p, q]$-Prozesses lautet

$$f_Y(\lambda) = \frac{\left|1 - \sum_{u=1}^{q} \beta_u e^{i2\pi\lambda u}\right|^2}{\left|1 - \sum_{u=1}^{p} \alpha_u e^{i2\pi\lambda u}\right|^2} \sigma^2.$$

Spektrum MA$[q]$- und ARMA$[p, q]$-Prozesse 5.49

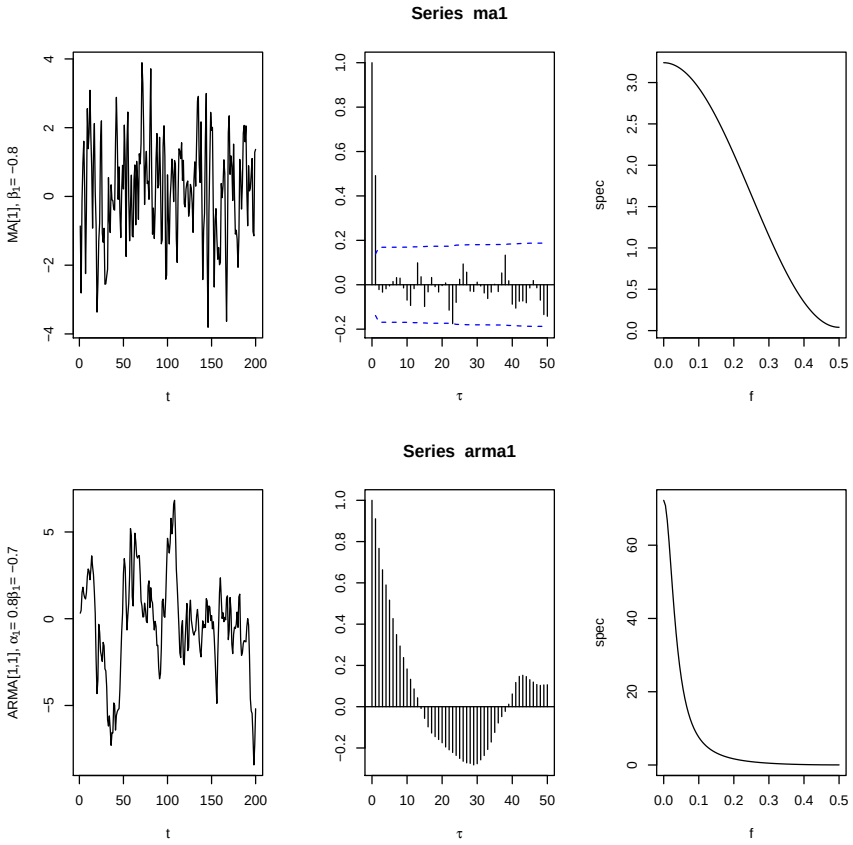

Abb. 5.17:

Der Differenzenfilter im Frequenzbereich 5.50

Sei (Y_t) ein stochastischer Prozess und (ΔY_t) seine ersten Differenzen

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}, \quad t = 2, 3, \ldots, N.$$

Die Spektraldichtefunktion für die ersten Differenzen ist

$$f_{\Delta Y}(\lambda) = 4 \sin^2(\pi\lambda) f_Y(\lambda).$$

Der Differenzenfilter im Frequenzbereich ▪ Die Auswirkung auf das Random-Walk-Modell 5.51

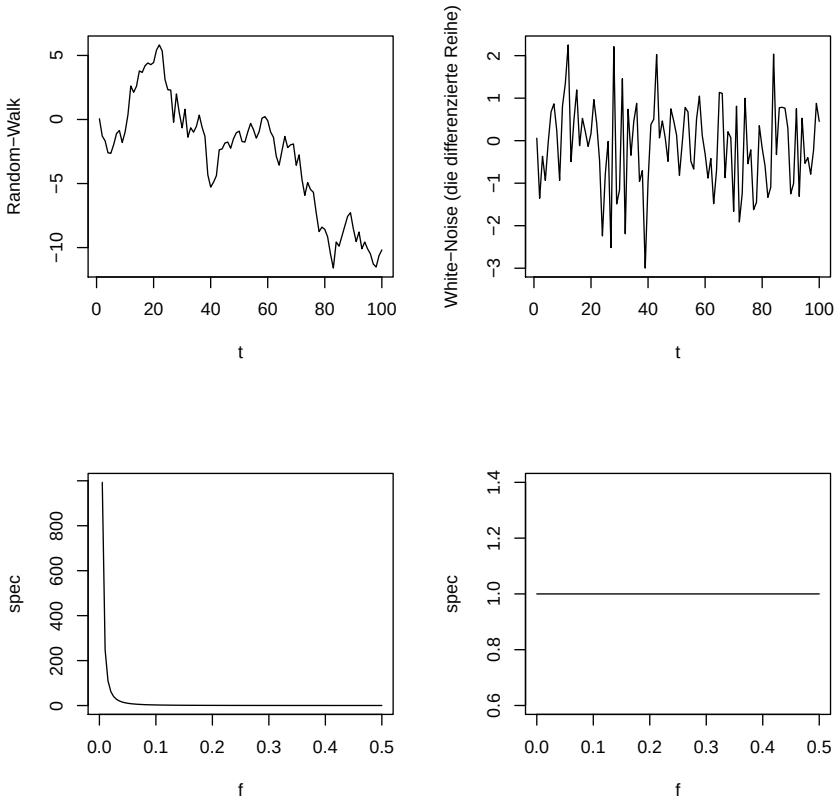

Abb. 5.18:

Der Differenzenfilter im Frequenzbereich ▪ Die Auswirkung auf die Reihe *globtemp* 5.52

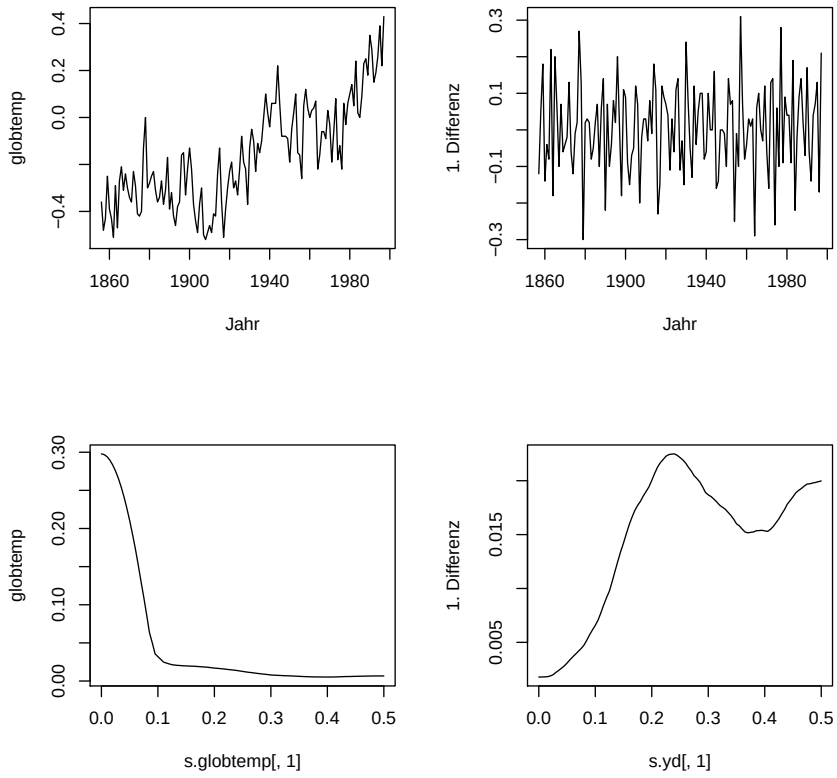

Abb. 5.19:

5.5 Spektralschätzung

Spektralschätzung

5.53

Gesucht ist ein konsistenter Schätzer für die Spektraldichtefunktion $f(\lambda)$. **Zur Erinnerung**:

- Sei $\widehat{\beta}_N$ ein allgemeiner Schätzer für einen Parameter β. Der Schätzer $\widehat{\beta}_N$ heißt **konsistent**, falls
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\widehat{\beta}_N - \beta\right)^2\right] = 0.$$
- Sei $\widehat{\beta}_N$ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für β. Der Schätzer $\widehat{\beta}_N$ ist dann und nur dann konsistent wenn gilt
$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}\left[\widehat{\beta}_N\right] = 0.$$

5.5.1 Das Periodogramm als Spektralschätzer

Nicht konsistente Spektralschätzung mit dem Periodogramm 5.54

Das Periodogramm zeigt ein sehr unruhiges Bild.

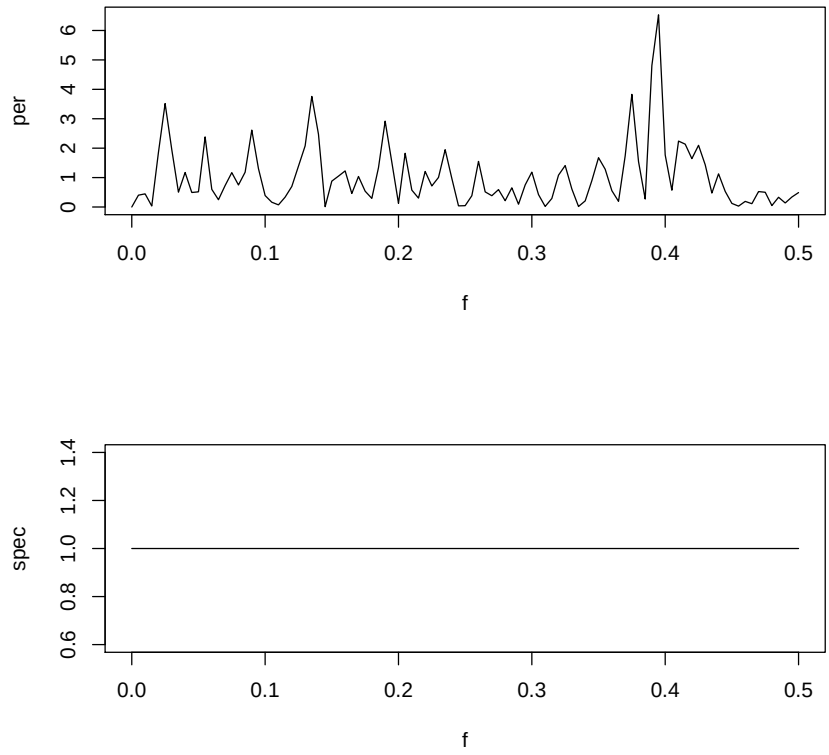

Abb. 5.20: Das Periodogramm der Reihe *wn1* und das Spektrum des White-Noise-Modells

Nicht konsistente Spektralschätzung mit dem Periodogramm 5.55

Die Größenordnung und die Lage von Hauptpeaks werden falsch geschätzt.

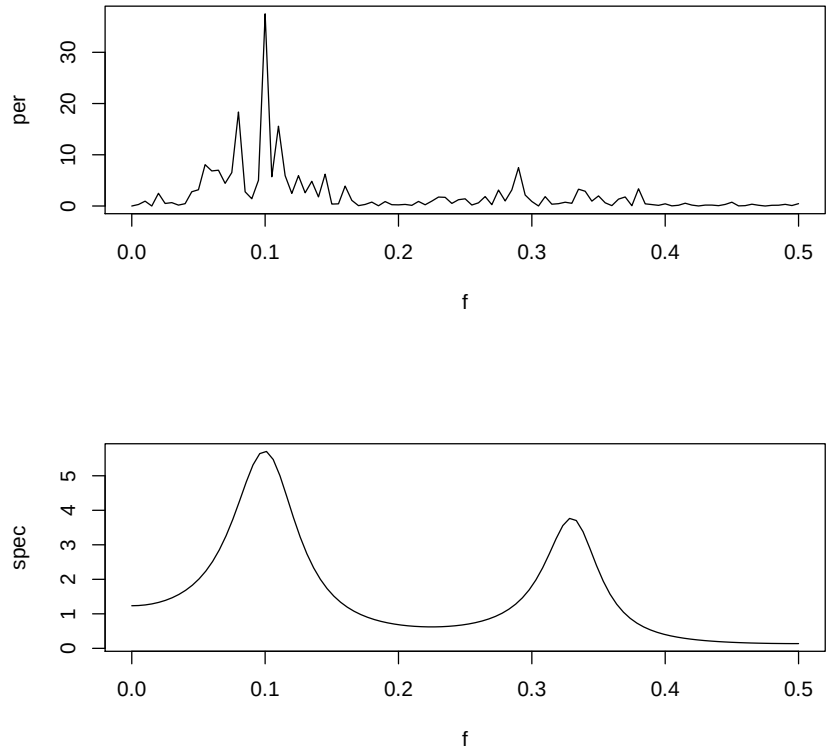

Abb. 5.21: Das Periodogramm der Reihe *ar10* und das Spektrum des zugrundeliegenden AR-Modells

Nicht konsistente Spektralschätzung mit dem Periodogramm 5.56

Die Schätzung durch das Periodogramm ist nicht besser, wenn N größer gewählt wird.

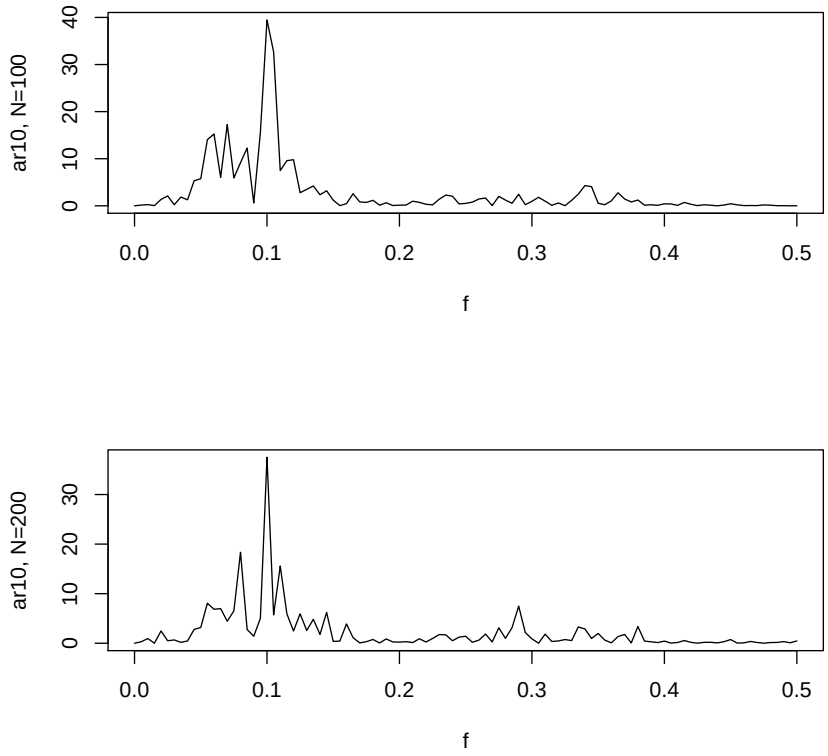

Abb. 5.22: Das Periodogramm der Reihe *ar10* für $N = 100$ (oben) und $N = 200$ (unten)

Nicht konsistente Spektralschätzung mit dem Periodogramm 5.57

Theorem 58. *Sei (Y_t) ein stochastischer Prozess mit dem Spektrum $f(\lambda)$ und $I(\lambda) = I_N(\lambda)$ das von einer Realisation (y_t) von (Y_t) der Länge N berechnete Periodogramm. Das Periodogramm $I(\lambda)$ ist asymptotisch erwartungstreu:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[I(\lambda)] = f(\lambda) \quad \textit{für} \quad \lambda \in (0, 0.5].$$

Das Periodogramm $I(\lambda)$ hat die asymptotische Varianz

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}[I(\lambda)] = \begin{cases} f^2(\lambda) & 0 < \lambda < 0.5 \\ 2f^2(\lambda) & \lambda = 0.5 \end{cases}.$$

Es gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Cov}[I(\lambda), I(\alpha)] = 0 \textit{ für } \lambda \neq \alpha.$$

Nicht konsistente Spektralschätzung mit dem Periodogramm 5.58

- Das Periodogramm $I(\lambda)$ ist asymptotisch erwartungstreu. Daher wäre das über mehrere Realisationen des zugrundeliegenden Prozesses gemittelte Periodogramm $\overline{I(\lambda)}$ ein zuverlässiger Schätzer der Spektraldichtefunktion.
- Die Varianz verschwindet für $N \to \infty$ nicht. Daher ist das Periodogramm $I(\lambda)$ kein konsistenter Schätzer für die Spektraldichtefunktion.
- Die Streuung des Periodogramms ist von der Größenordnung des Spektrums selbst. Daher sind die Schätzfehler teilweise erheblich.
- Das Spektrum $f(\lambda)$ ist eine stetige Funktion. Jedoch zeigt das Periodogramm $I(\lambda)$ ein sehr unruhiges Bild, wodurch falsche Peaks vorgetäuscht werden können. Das liegt an der Unkorreliertheit der Periodogrammordinaten.

Insgesamt ist eine Beurteilung über die Periodizitäten in einer Zeitreihe mit Hilfe des Periodogramms unzuverlässig.

5.59

Nicht konsistente Spektralschätzung mit dem Periodogramm

Theorem 59. *Sei (Y_t) ein stationärer stochastischer Prozess, der sich als MA$[\infty]$-Prozess $Y_t = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u \varepsilon_{t-u}$ darstellen lässt, wobei $\sum_{u=0}^{\infty} (1+|u|)\,|\beta_u| < \infty$ gilt. Seien $f(\lambda)$ das Spektrum von (Y_t) und $I(\lambda) = I_N(\lambda)$ das von einer Realisation (y_t) von (Y_t) der Länge N berechnete Periodogramm. Wir betrachten die Fourierfrequenzen $\lambda = \lambda_k = k/N$, $k \in \mathbb{Z}$ im Intervall $0 \leq \lambda < 0.5$.*

- *Das Periodogramm $I(\lambda)$ ist asymptotisch exponentiell verteilt mit dem Erwartungswert $f(\lambda)$*
$$I(\lambda) \xrightarrow{d} Exp[f(\lambda)].$$
- *Für Fourierfrequenzen $\lambda \neq \alpha$ sind $I(\lambda)$ und $I(\alpha)$ stochastisch unabhängig.*

5.5.2 Direkte Spektralschätzer

Direkte Spektralschätzer 5.60

Für eine zuverlässige Schätzung der Spektraldichtefunktion wird das Periodogramm mit Hilfe eines *gleitenden Durchschnitts* geglättet.

Definition 60. Sei (y_t) eine Zeitreihe mit dem Periodogramm $I(\lambda)$. Wir bezeichnen als direkten Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ der Schätzer

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_u \omega_u I\left(\lambda - \frac{u}{N}\right).$$

Die Folge der Gewichte $(\omega_u)_{u\in\mathbb{Z}}$ heißt diskretes Periodogrammfenster.

- Beispiel: das Daniell-Fenster

$$\omega_u = \begin{cases} \frac{1}{2q+1}, & \text{für } -q \leq u \leq q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Direkte Spektralschätzer ▪ Asymptotische Eigenschaften 5.61

Theorem 61. *Sei (Y_t) ein stationärer stochastischer Prozess, der sich als MA$[\infty]$-Prozess $Y_t = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u \varepsilon_{t-u}$ darstellen lässt, wobei $\sum_{u=0}^{\infty} (1+|u|)\,|\beta_u| < \infty$ gilt. Seien $f(\lambda)$ das Spektrum von (Y_t) und $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}_N(\lambda)$,*

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{u=-q}^{q} \omega_u I\left(\lambda - \frac{u}{N}\right)$$

ein von einer Realisation (y_t) von (Y_t) der Länge N berechneter direkter Spektralschätzer mit dem diskreten Periodogrammfenster (ω_u), $\omega_u = 0$ für $|u| > q$. Wir betrachten die Fourierfrequenzen $\lambda = \lambda_k = k/N$, $k \in \mathbb{Z}$ im Intervall $0 \leq \lambda < 0.5$. Dann $\widehat{f}(\lambda)$ hat

- *den asymptotischen Erwartungswert*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\widehat{f}(\lambda)\right] = f(\lambda) \sum_u \omega_u$$

Direkte Spektralschätzer ▪ Asymptotische Eigenschaften 5.62

Theorem 62.

- *die asymptotische Varianz*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}\left[\widehat{f}(\lambda)\right] = f(\lambda)^2 \sum_u \omega_u^2.$$

- *$\widehat{f}(\lambda)$ ist die gewichtete Summe von asymptotisch unabhängigen Periodogrammwerten $I\left(\lambda - \frac{u}{N}\right)$ mit*

$$I\left(\lambda - \frac{u}{N}\right) \xrightarrow{d} Exp\left[f(\lambda)\right].$$

Direkte Spektralschätzer ▪ Asymptotische Eigenschaften 5.63

- Durch die Wahl der Gewichte (ω_u) können *asymptotisch erwartungstreue* und *konsistente* Schätzer $\widehat{f}(\lambda)$ konstruiert werden. Es gibt insgesamt $b = 2q+1$ Gewichte $(\omega_u)_{-q\leq u\leq q}$ ungleich Null, die bestimmt werden müssen.

- Direkte Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ sind asymptotisch erwartungstreu, wenn gilt

$$\sum_{u=-q}^{q} \omega_u = 1.$$

Beispiel: der Daniell-Schätzer.

Direkte Spektralschätzer ▪ Asymptotische Eigenschaften 5.64

- Um konsistente direkte Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ zu erhalten, ist es wichtig, dass die Anzahl $b = 2q + 1$ der Gewichte ω_u ungleich Null eine Funktion des Umfangs N ist, $b = b_N$. Die Größe $b = b_N$ ist die so genannte Bandbreite des Periodogrammfensters. Direkte Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ sind asymptotisch erwartungstreu und konsistent für Periodogrammfenster (ω_u) mit

$$\lim_{N\to\infty} b_N = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{b_N}{N} = 0.$$

Direkte Spektralschätzer ▪ Asymptotische Eigenschaften 5.65

Bspw. sind die direkten Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ mit einem der folgenden Periodogrammfenster und entsprechend gewählter Bandbreite $b_N = 2q_N + 1$ konsistent

- das Daniell-Fenster

$$\omega_u = \begin{cases} \frac{1}{2q_N+1} & \text{für } -q_N \leq u \leq q_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- das Bartlett-Priestley-Fenster

$$\omega_u = \begin{cases} \frac{3q_N}{4q_N^2-1}\left(1 - \left(\frac{u}{q_N}\right)^2\right) & \text{für } -q_N \leq u \leq q_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Die beiden direkten Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ haben dieselben asymptotischen Eigenschaften. Jedoch unterscheiden sie sich in ihren Eigenschaften in *endlichen* Stichproben.

Direkte Spektralschätzer ▪ Eigenschaften für endliche Stichproben 5.66

Definition 63. Sei $\widehat{f}(\lambda)$ ein direkter Spektralschätzer mit dem Periodogrammfenster (ω_u) mit $\sum_u \omega_u = 1$. Wir bezeichnen als äquivalente Bandbreite (EBW) die Größe

$$EBW\left[\widehat{f}(\lambda)\right] = \frac{1}{N\sum_u \omega_u^2}.$$

Interpretation: Die EBW gibt den Abstand zweier Peaks im Spektrum $f(\lambda)$ an, welche vom Schätzer $\widehat{f}(\lambda)$ noch getrennt werden können.

- Schätzer mit geringer EBW haben eine hohe Auflösungsfähigkeit und somit einen geringen Bias in endlichen Stichproben. Die EBW ist ein Maß für den Bias in endlichen Stichproben.

Direkte Spektralschätzer ▪ Eigenschaften für endliche Stichproben 5.67

Für festes N gilt

$$\text{Bandbreite} \cdot \text{Varianz} = \text{Konstante}$$

oder genauer dargestellt

$$EBW\left[\widehat{f}(\lambda)\right] \cdot \operatorname{Var}\left[\widehat{f}(\lambda)\right] \approx \frac{f^2(\lambda)}{N}.$$

Das Zielkonflikt der Spektralschätzung: die Bandbreite (und somit der Bias) und die Varianz können nicht gleichzeitig minimiert werden.

- Nachteil des Daniell-Schätzers: er hat eine sehr geringe Varianz, dafür einen hohen Bias.
- Der direkte Bartlett-Priestley-Schätzer ist aufgrund seines ausgewogenen Verhältnisses zwischen Bias und Varianz zu bervorzugen.

Direkte Spektralschätzer ▪ Eigenschaften für endliche Stichproben 5.68

Schätzprozedur:

- Wir wählen ein diskretes Periodogrammfenster (ω_u) mit einem ausgewogenen Verhältnis zwischen Bias und Varianz in endlichen Stichproben aus, z.B. das Bartlett-Priestley-Periodogrammfenster.
- Wir schätzen das Spektrum $f(\lambda)$ für verschiedene EBW-Werte.
- Wir bestimmen den EBW-Wert in Abhängigkeit von den gewünschten Auflösung und Glattheit des geschätzten Spektrums $\widehat{f}(\lambda)$.

Direkte Spektralschätzer 5.69

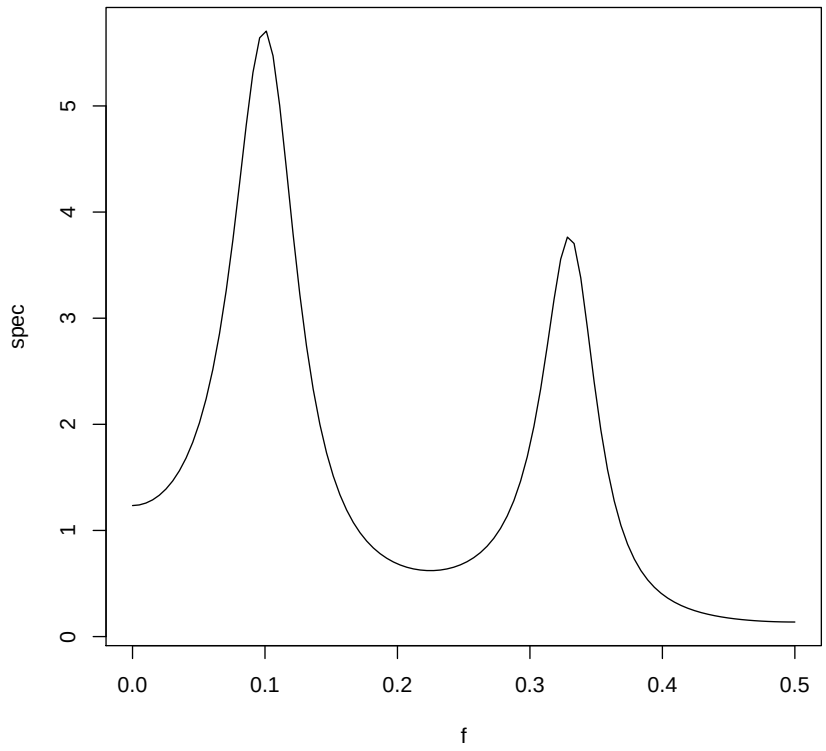

Abb. 5.23: Das theoretische Spektrum für das der Reihe *ar10* zugrundeliegende Modell

Direkte Spektralschätzer

5.70

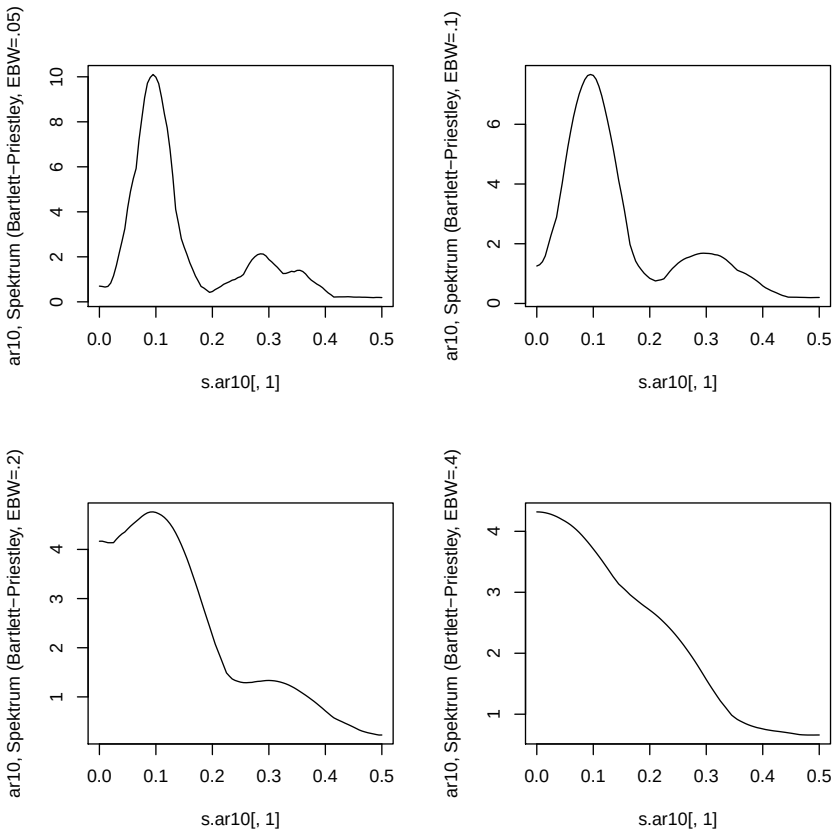

Abb. 5.24: Direkte Spektralschätzungen für die Reihe *ar10*, mit dem Bartlett-Priestley-Periodogrammfenster und unterschiedlichen EBW-Werte

Literaturhinweise 5.71

Schlittgen und Streitberg (1999), Zeitreihenanalyse: Kapitel 3.1, 3.2, 3.3, 7.1, 7.4.1, 7.4.2

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 6.4, 6.5

Literaturhinweise ▪ Wiederholung trigonometrische Funktionen und komplexe Zahlen 5.72

Schlittgen und Streitberg (1999), Zeitreihenanalyse: Anhänge A, B

Direkte Spektralschätzer ▪ Konfidenzintervall 5.73

Laut Satz (61) ist $\widehat{f}(\lambda)$ die gewichtete Summe von asymptotisch exponentialverteilten und stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen. Wir können eine Linearkombination von exponentialverteilten und stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen mit Hilfe des s-fachen einer χ^2-verteilten

Zufallsvariablen nach dem *Verfahren von Satterthwaite* approximieren. Wir erhalten die Approximation

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{f}(\lambda) \approx sZ \quad \text{mit} \quad Z \sim \chi^2_r$$

mit

$$s = \frac{f(\lambda)}{2} \cdot \frac{\sum_u \omega_u^2}{\sum_u \omega_u}, \quad r = 2 \cdot \frac{\left(\sum_u \omega_u\right)^2}{\sum_u \omega_u^2},$$

bzw. für einen asymptotisch erwartungstreuen direkten Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$

$$s = \frac{f(\lambda)}{2} \cdot \sum_u \omega_u^2, \quad r = \frac{2}{\sum_u \omega_u^2}.$$

Direkte Spektralschätzer ▪ Konfidenzintervall 5.74

Sei (Y_t) ein stationärer stochastischer Prozess, der sich als MA[∞]-Prozess $Y_t = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u \varepsilon_{t-u}$ darstellen lässt, wobei $\sum_{u=0}^{\infty} (1+|u|)\,|\beta_u| < \infty$ gilt. Seien $f(\lambda)$ das Spektrum von (Y_t) und $\widehat{f}(\lambda)$ ein asymptotisch erwartungstreuer direkter Spektralschätzer für $f(\lambda)$. Sei $\lambda = k/N$, $k \in \mathbb{Z}$ eine Fourierfrequenz im Intervall $0 \leq \lambda < 0.5$. Wir konstruieren ein $(1-\alpha)\times 100\%$-Konfidenzintervall für $f(\lambda)$ wie folgt

$$\left[\lim_{N\to\infty} \widehat{f}(\lambda) \cdot \frac{r}{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}, \quad \lim_{N\to\infty} \widehat{f}(\lambda) \cdot \frac{r}{\chi^2_{\alpha/2,r}}\right]$$

mit

$$r = \frac{2}{\sum_u \omega_u^2}.$$

Direkte Spektralschätzer ▪ Konfidenzintervall 5.75

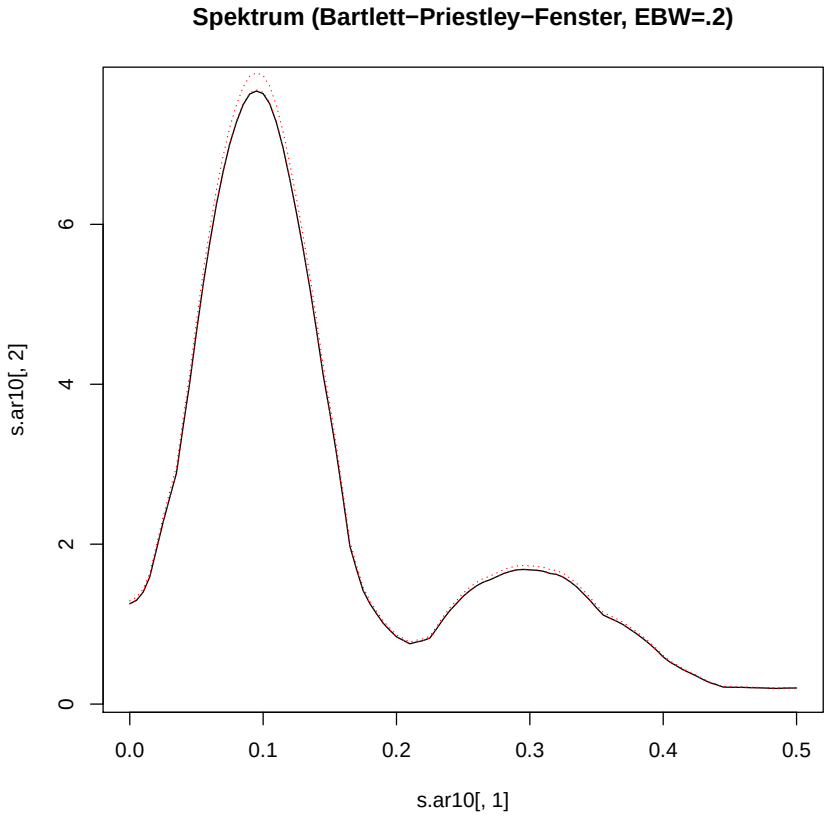

Abb. 5.25: Direkte Spektralschätzung für die Reihe *ar10*, mit Konfidenzband ($\alpha = 0.05$)

5.5.3 Indirekte Spektralschätzer

Indirekte Spektralschätzer 5.76

Seien (Y_t) ein stationärer stochastischer Prozess mit der Spektraldichtefunktion $f(\lambda)$ und (y_t) eine Realisation von (Y_t). Laut Satz (53) besteht der folgende Zusammenhang zwischen dem Periodogramm $I(\lambda)$ und der empirischen Autokovarianzfunktion (c_τ)

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= c_0 + 2\sum_{\tau=1}^{N-1} c_\tau \cos(2\pi\lambda\tau) \\ &= \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} c_\tau \cos(2\pi\lambda\tau)\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Indirekte Spektralschätzer 5.77

- Ein direkter Spektralschätzer ist ein gewichteter Mittelwert des Periodogramms $I(\lambda)$

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{u} \omega_u I\left(\lambda - \frac{u}{N}\right)$$

mit Gewichten (diskretem Periodogrammfenster) (ω_u).

- Alternativ können *indirekte Spektralschätzer* durch die Gewichtung der Autokovarianzen (c_τ) in (5.6) konstruiert werden

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \kappa_\tau c_\tau \cos(2\pi\lambda\tau).$$

Die Gewichte (κ_τ) bilden das so genannte *Lagfenster*.

Indirekte Spektralschätzer ▪ Der Newey-West-Schätzer - Ergänzung 5.78

In Abschnitt 5.2 haben wir das lineare Regressionsmodell

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\theta + \mathbf{u} \tag{5.7}$$

mit autokorrelierten Störungen

$$\mathrm{Cov}[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{N-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & & \gamma_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Sei $\widehat{\theta}_N$ der OLS-Schätzer im Modell (5.7). Die asymptotische Kovarianzmatrix von $\widehat{\theta}_N$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Cov}\left[\widehat{\theta}_N\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']\,\mathbf{X}\left(\frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

kann mit Hilfe des Newey-West-Schätzers für die Größe

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u}\mathbf{u}']\,\mathbf{X}$$

geschätzt werden.

Indirekte Spektralschätzer ▪ Der Newey-West-Schätzer - Ergänzung 5.79

Es wurde gezeigt, dass

$$J_N = \Gamma_0 + \sum_{\tau=1}^{N-1} \frac{N-\tau}{N}\left(\Gamma_\tau + \Gamma_{-\tau}\right)$$

gilt, mit Γ_τ die Autokovarianzmatrix vom Lag τ für den multivariaten stochastischen Prozess $(\mathbf{x}_t' u_t)_t$

$$\Gamma_\tau = \mathbb{E}\left[\mathbf{x}_t' u_t \left(\mathbf{x}_{t+\tau}' u_{t+\tau}\right)'\right].$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \Gamma_\tau = f(\mathbf{0}),$$

mit $f(\mathbf{0})$ die spektrale Dichtematrix von $(\mathbf{x}_t' u_t)_t$ an der Stelle Null.

Indirekte Spektralschätzer ▪ Der Newey-West-Schätzer - Ergänzung 5.80

Der Newey-West-Schätzer ist der indirekte Spektralschätzer

$$\widehat{f}(\mathbf{0}) = \widehat{\Gamma}_0 + \sum_{\tau=1}^{N-1} \left(\widehat{\Gamma}_\tau + \widehat{\Gamma}_\tau'\right) \kappa_\tau$$

mit Bartlett-Lagfenster

$$\kappa_{\tau,N} = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{b_N+1}, & 1 \le \tau \le b_N + 1 \\ 0, & \tau > b_N + 1 \end{cases}$$

und Bandbreite des Lagfensters $b_N \ge 0$.

5.5.4 Parametrische Spektralschätzer

Parametrische Spektralschätzer 5.81

Schätzprozedur:

- Anpassung eines ARMA$[p,q]$-Modells

  $$\alpha(\mathrm{B})\, Y_t = \beta(\mathrm{B})\, \varepsilon_t$$

  an die Realisation (y_t) von (Y_t) und Schätzung der Modellparameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$ und der Varianz des Störterms σ^2.
- Den parametrischen Spektralschätzer $\widehat{f}(\lambda)$ erhalten wir durch das Einsetzen der Schätzwerte $\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_p, \widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_q$ und $\widehat{\sigma}^2$ in die theoretische Spektraldichtefunktion für den ARMA$[p,q]$-Prozess

  $$\widehat{f}(\lambda) = \frac{\left|1 - \sum_{u=1}^{q} \widehat{\beta}_u e^{i2\pi\lambda u}\right|^2}{\left|1 - \sum_{u=1}^{p} \widehat{\alpha}_u e^{i2\pi\lambda u}\right|^2} \widehat{\sigma}^2.$$

Literaturhinweise 5.82

Schlittgen und Streitberg (1999), Zeitreihenanalyse: Kapitel 7.2, 7.4.2

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 6.5