

## 3 Lineare Modelle

### 3.1 Lineare Filter

#### Lineare Filter

3.1

**Definition 11** (Backshift-Operator  $B$ ). Die Transformation  $B$  mit

$$BY_t = Y_{t-1}.$$

bezeichnen wir als **Backshift-Operator**.

Die Transformation  $B$  verschiebt den stochastischen Prozess um eine Zeiteinheit. Hintereinanderausführungen von  $B$  schreiben wir als Potenzen; allgemein ist

$$B^2 Y_t = B(BY_t) = BY_{t-1} = Y_{t-2},$$

und damit rekursiv

$$B^p Y_t = Y_{t-p}.$$

#### Lineare Filter

3.2

**Definition 12** (Linearer Filter). Eine lineare Transformation eines stochastischen Prozesses  $(X_t)$  in einen anderen  $(Y_t)$  gemäß

$$Y_t = \sum_{u=-r}^s a_u X_{t-u}$$

wird als **linearer Filter** bezeichnet. Ein Filter wird durch seine Gewichte

$$(a_u)_{u=-r, \dots, s}$$

eindeutig definiert. Alternativ kann er als gewichtete Summe von Shiftoperatoren dargestellt werden

$$A(B) = \sum_{u=-r}^s a_u B^u.$$

Dann schreiben wir für  $Y_t$

$$Y_t = A(B) X_t.$$

#### Lineare Filter

3.3

Wir bezeichnen die Anwendung eines Filters auf einen stochastischen Prozess  $(X_t)$  als Filtration des Prozesses,  $(X_t)$  als Input und den gefilterten Prozess  $(Y_t)$  als Output des Filters.

**Definition 13** (*kausaler Filter*). Ein linearer Filter mit der Gewichtsfolge  $(a_u)$  heißt *kausal*, wenn  $a_u = 0$  für  $u < 0$  ist, d.h. wenn

$$A(B) = \sum_{u=0}^{\infty} a_u B^u.$$

**Definition 14** (*absolut summierbarer Filter*). Ein Filter heißt *absolut summierbar*, wenn seine Gewichtsfolge  $(a_u)$  absolut summierbar ist.

### Lineare Filter

3.4

**Theorem 15** (Unendliche lineare Filter). Sei  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ein stochastischer Prozess mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}[X_t^2] \leq K \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Z},$$

wobei  $K$  eine endliche Konstante ist. Sei  $(a_u)$  ein absolut summierbarer Filter. Dann existiert ein stochastischer Prozess  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , so dass für alle  $t \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( Y_t - \sum_{u=-n}^n a_u X_{t-u} \right)^2 \right] = 0, \quad (3.1)$$

$$\mathbb{E}[Y_t^2] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{u=-n}^n a_u \mathbb{E}[X_{t-u}].$$

Weiter benutzen wir für den Limes (3.1) die Notation:

$$Y_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_u X_{t-u}.$$

### Lineare Filter

3.5

Unendliche lineare Filter mit absolut summierbarer Folge von Gewichten können unbekümmert im Sinne des vorigen Satzes gehandhabt werden.

- Bspw. ist die Vertauschung von Summation und Erwartungswertoperator erlaubt.
- Ist der Input  $(X_t)$  stationär, so ist auch der Output  $(Y_t)$  stationär.

### Lineare Filter ■ Allgemeine lineare Prozesse

3.6

In Kapitel 1 haben wir den allgemeinen linearen Prozess

$$Y_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_u \varepsilon_{t-u}$$

mit  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  White-Noise und  $(a_u)$  absolut summierbar eingeführt. Der allgemeine lineare Prozess wird durch Filtration des White-Noise-Prozesses  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$

$$Y_t = A(B) \varepsilon_t$$

mit dem unendlichen linearen Filter

$$A(B) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_u B^u$$

erzeugt.

### 3.1.1 MA-Prozesse

#### Lineare Filter ■ MA-Prozesse

3.7

**Definition 16** (Moving-Average-Prozess der Ordnung  $q$ , MA[ $q$ ]). Ein stochastischer Prozess  $(Y_t)$ ,

$$Y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

heißt **Moving-Average-Prozess der Ordnung  $q$** , kurz MA[ $q$ ]-Prozess. Dabei ist  $(\varepsilon_t)$  ein White-Noise-Prozess. Im Fall  $q = \infty$  sprechen wir von einem unendlichen Moving-Average-Prozess (MA[ $\infty$ ]).

Ein MA-Prozess entsteht durch Filtration des White-Noise-Prozesses  $(\varepsilon_t)$

$$Y_t = \beta(B) \varepsilon_t$$

mit dem kausalen linearen Filter

$$\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_q B^q.$$

#### Lineare Filter ■ MA-Prozesse – Theoretische Momente

3.8

Sei  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mu_\varepsilon$ ,  $\text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$  und  $\beta_0 = -1$ .

MA[ $q$ ]-Prozesse  $(Y_t)$  sind *stationäre* Prozesse mit den Momenten:

1.  $\mu_Y = \mathbb{E}[Y_t] = \mu_\varepsilon \sum_{u=0}^q (-\beta_u)$
2.  $\gamma_Y(\tau) = \sum_{u=0}^q \sum_{v=0}^q \beta_u \beta_v \gamma_\varepsilon(\tau + u - v) = \begin{cases} 0, & \tau > q \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{u=0}^{q-\tau} \beta_u \beta_{u+\tau}, & 0 \leq \tau \leq q \\ \gamma_Y(-\tau), & \tau < 0 \end{cases}$

#### Lineare Filter ■ MA-Prozesse – Theoretische Momente

3.9

$$3. \sigma_Y^2 = \text{Var}[Y_t] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{u=0}^q \beta_u^2$$

$$4. \rho_Y(\tau) = \frac{\gamma_Y(\tau)}{\gamma_Y(0)} = \begin{cases} 0, & \tau > q \\ \sum_{u=0}^{q-\tau} \beta_u \beta_{u+\tau} / \sum_{u=0}^q \beta_u^2, & 0 < \tau \leq q \\ 1, & \tau = 0 \\ \rho_Y(-\tau), & \tau < 0 \end{cases}$$

Die ACF eines MA[ $q$ ]-Prozesses verschwindet für Lags  $\tau > q$ .

### 3.1.2 AR-Prozesse

#### Lineare Filter ■ AR-Prozesse

3.10

**Definition 17** (Autoregressiver Prozess der Ordnung  $p$ , AR[ $p$ ]). Ein stochastischer Prozess  $(Y_t)$ ,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

heißt **Autoregressiver Prozess der Ordnung  $p$** , kurz AR[ $p$ ]-Prozess. Dabei ist  $(\varepsilon_t)$  ein White-Noise-Prozess. Im Fall  $p = \infty$  heißt  $(Y_t)$  ein unendlicher AR-Prozess (AR[ $\infty$ ]).

Alternative Darstellung:

$$\varepsilon_t = Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \dots - \alpha_p Y_{t-p}.$$

Der White-Noise-Prozess  $(\varepsilon_t)$  ist der Output des kausalen linearen Filters

$$\alpha(B) = 1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p$$

mit dem Input dem AR-Prozess  $(Y_t)$

$$\varepsilon_t = \alpha(B) Y_t.$$

### 3.1.3 ARMA-Prozesse

#### Lineare Filter ■ ARMA-Prozesse

3.11

**Definition 18** (Autoregressiver-Moving-Average-Prozess der Ordnung  $p, q$ , ARMA[ $p, q$ ]). Ein stochastischer Prozess  $(Y_t)$ ,

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

mit  $(\varepsilon_t)$  ein White-Noise-Prozess heißt **Autoregressiver Moving-Average-Prozess der Ordnung  $p, q$** , kurz ARMA[ $p, q$ ]-Prozess.

Alternative Darstellung:

$$Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-2} - \dots - \alpha_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q},$$

oder kurz:

$$\alpha(B) Y_t = \beta(B) \varepsilon_t$$

mit den kausalen linearen Filtern

$$\alpha(B) = 1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p$$

$$\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_q B^q.$$

## 3.2 Invertierbare lineare Filter

### Invertierbare lineare Filter

3.12

**Problem 19.** Gegeben sei der lineare Filter  $A(B)$ ,

$$A(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p. \quad (3.2)$$

Bestimmen Sie einen zu  $A(B)$  inversen linearen Filter  $A^{-1}(B)$  mit Gewichten  $(c_u)$  mit den Eigenschaften

- $A^{-1}(B)$  ist kausal

und

- $A^{-1}(B)$  ist absolut summierbar, falls  $A^{-1}(B)$  ein unendlicher Filter ist,

so dass für jeden stochastischen Prozess  $(X_t)$  gilt

$$Y_t = \sum_{u=0}^p a_u X_{t-u} \Leftrightarrow X_t = \sum_u c_u Y_{t-u}.$$

### Invertierbare lineare Filter

3.13

Die Funktion

$$A(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p z^p, \quad z \in \mathbb{C}$$

heißt das charakteristische Polynom des Filters

$$A(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p.$$

Jeder lineare Filter  $A(B)$  ist eindeutig durch sein charakteristisches Polynom  $A(z)$  bestimmt. Daher werden wir das weiter oben beschriebene Problem für  $A(z)$  anstatt für  $A(B)$  lösen.

D.h. wir suchen ein zu  $A(z)$  inverses charakteristisches Polynom

$$A^{-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

mit absolut summierbarer Koeffizientenfolge  $(c_u)$ , falls  $A^{-1}(z)$  ein unendliches Polynom ist.

### Invertierbare lineare Filter

3.14

**Theorem 20.** Für den linearen Filter

$$A(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p$$

existiert dann und nur dann ein kausaler, absolut summierbarer, inverser Filter

$$A^{-1}(B) = c_0 + c_1 B + c_2 B^2 + \dots,$$

wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$A(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p z^p$$

außerhalb des Einheitskreises liegen.

### Invertierbare lineare Filter ■ Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF

3.15

**Hinweis:** Ein stochastischer Prozess  $Y_t$

$$Y_t = A(B) X_t$$

mit invertierbarem linearem Filter

$$A(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p$$

und kausalem, absolut summierbarem, inversem Filter  $A^{-1}(B)$  ist eindeutig durch seine Autokorrelationsfunktion definiert.

### 3.2.1 Stationäre AR-Prozesse

#### Stationäre AR-Prozesse ■ Stationaritätsbedingung

3.16

**Theorem 21.** Ein  $AR[p]$ -Prozess  $Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$  kann dann und nur dann als  $MA[\infty]$ -Prozess

$$Y_t = \sum_{u=0}^{\infty} \beta_u \varepsilon_{t-u}$$

mit absolut summierbarer Koeffizientenfolge  $(\beta_u)$  dargestellt werden, wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen. Speziell ist  $(Y_t)$  dann stationär.

## Stationäre AR-Prozesse ■ Stationaritätsbedingung

3.17

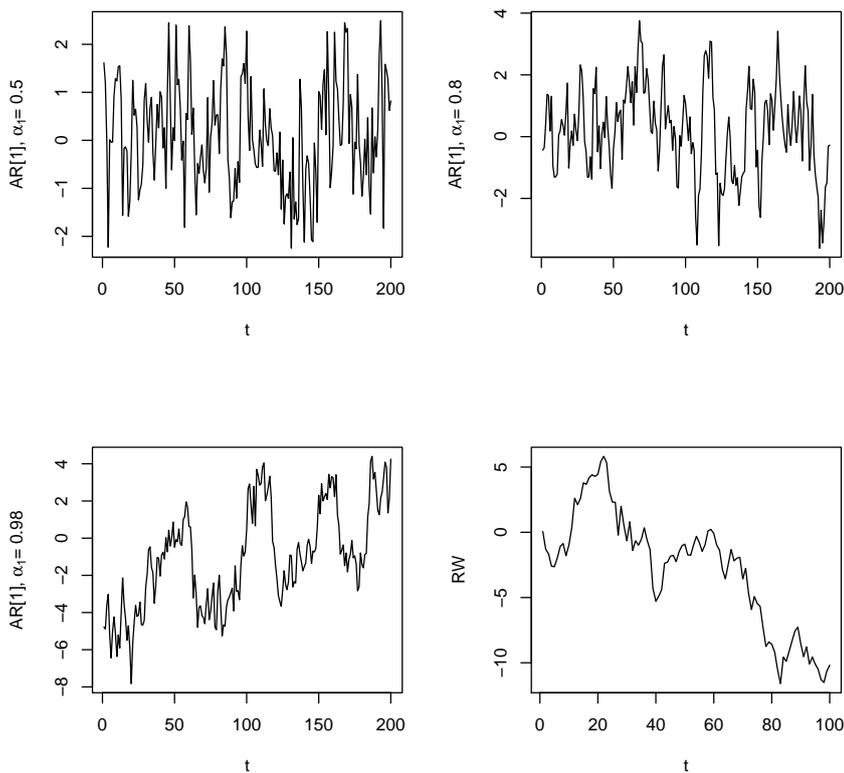
- Stationaritätsbedingung für AR[1]-Prozesse  $Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$|\alpha| < 1$$

- Stationaritätsbedingungen für AR[2]-Prozesse  $Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 < 1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 < 1 \\ \alpha_2 > -1 \end{cases}$$

3.18



**Abb. 3.1:** Realisationen von AR-Prozessen und einem Random-Walk

3.19

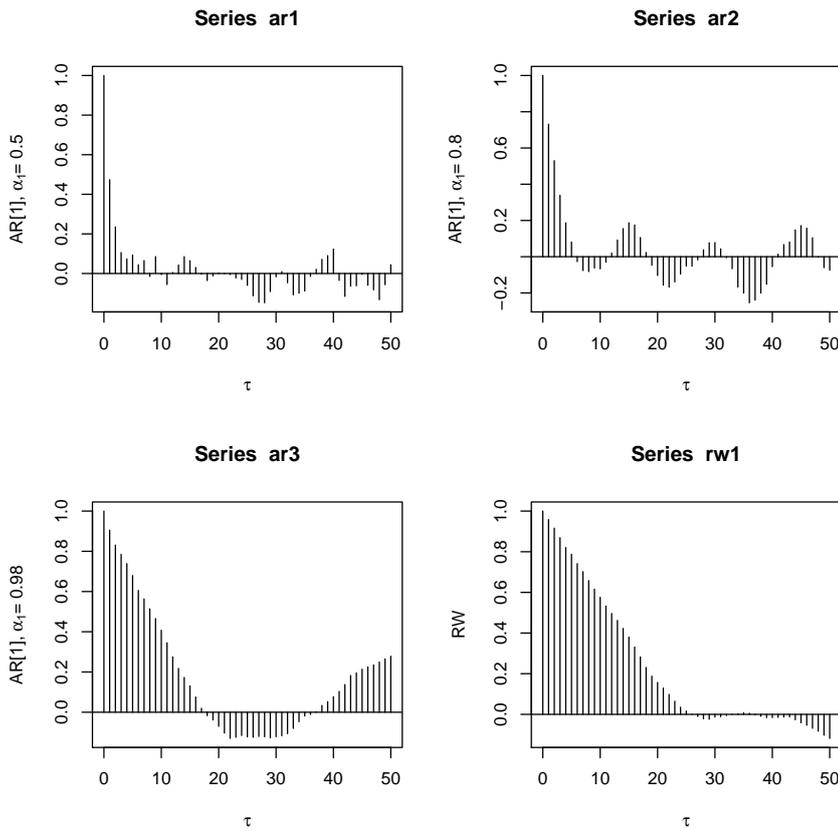


Abb. 3.2: Die empirischen ACF

**Stationäre AR-Prozesse ■ Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF**

3.20

Stationäre AR-Prozesse sind eindeutig durch ihre ACF definiert. Berechnung der ACF für einen stationären AR-Prozess  $Y_t$  mit  $\mathbb{E}[Y_t] = 0$ :

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \\
 &\Downarrow \\
 Y_t Y_{t-\tau} &= \alpha_1 Y_{t-1} Y_{t-\tau} + \alpha_2 Y_{t-2} Y_{t-\tau} \dots + \alpha_p Y_{t-p} Y_{t-\tau} + \varepsilon_t Y_{t-\tau} \\
 &\Downarrow \\
 \mathbb{E}[Y_t Y_{t-\tau}] &= \alpha_1 \mathbb{E}[Y_{t-1} Y_{t-\tau}] + \alpha_2 \mathbb{E}[Y_{t-2} Y_{t-\tau}] \dots + \alpha_p \mathbb{E}[Y_{t-p} Y_{t-\tau}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t Y_{t-\tau}] \\
 &\Downarrow \\
 \gamma(\tau) &= \alpha_1 \gamma(\tau - 1) + \alpha_2 \gamma(\tau - 2) \dots + \alpha_p \gamma(\tau - p) \\
 &\Downarrow \\
 \rho(\tau) &= \alpha_1 \rho(\tau - 1) + \alpha_2 \rho(\tau - 2) + \dots + \alpha_p \rho(\tau - p)
 \end{aligned}$$

**Stationäre AR-Prozesse ■ Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF**

3.21

Das System der so genannten Yule-Walker-Gleichungen:

$$\rho(\tau) = \alpha_1 \rho(\tau - 1) + \alpha_2 \rho(\tau - 2) + \dots + \alpha_p \rho(\tau - p), \quad 1 \leq \tau \leq p \quad (3.3)$$

bzw. in der Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}.$$

Dieses System enthält  $p$  Gleichungen in  $p$  Unbekannten  $\rho_\tau$ ,  $1 \leq \tau \leq p$ .

Es ist eindeutig lösbar für stationäre AR-Prozesse.

### Die Yule-Walker-Gleichungen

3.22

Das empirische Analogon zu den Yule-Walker-Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & \dots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix}$$

Hier sind  $\hat{\alpha}_i$ ,  $1 \leq \tau \leq p$ , die Unbekannten. Die Werte  $r_\tau$  stellen die empirischen Autokorrelationen dar. Durch Lösen des Gleichungssystems erhalten wir die Parameterschätzungen  $\hat{\alpha}_i$ . Diese sind die so genannten Yule-Walker-Schätzer des AR-Modells.

### Die Levinson-Durbin-Rekursion ■ Schätzung eines AR[3]-Modells

3.23

Gegeben seien die Yule-Walker-Gleichungen für den AR[2]-Prozess:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

mit bekannten Lösungen  $\hat{\alpha}_1$  und  $\hat{\alpha}_2$ . Wir berechnen die Lösungen  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  und  $\hat{\theta}_3$  der Yule-Walker-Gleichungen für den AR[3]-Prozess:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

### Die Levinson-Durbin-Rekursion ■ Schätzung eines AR[3]-Modells

3.24

Wir erhalten die Lösungen:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1 \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_3 = \frac{r_3 - r_2 \hat{\alpha}_1 - r_1 \hat{\alpha}_2}{1 - r_2 \hat{\alpha}_2 - r_1 \hat{\alpha}_1} \end{cases}$$

### Die Levinson-Durbin-Rekursion

3.25

**Theorem 22** (Die Levinson-Durbin-Rekursion). *Gegeben seien*

- die Startwerte:  $\hat{\alpha}_1(1) = r_1$ ,  $\hat{Q}(1) = 1 - r_1^2$
- die Lösungen  $\hat{\alpha}_1(p-1)$ ,  $\hat{\alpha}_2(p-1)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{\alpha}_{p-1}(p-1)$  für die Yule-Walker-Gleichungen der Ordnung  $p-1$
- der Wert  $\hat{Q}(p-1) = 1 - \hat{\alpha}_1(p-1)r_1 - \dots - \hat{\alpha}_{p-1}(p-1)r_{p-1}$ .

Dann ergeben sich die Lösungen der Yule-Walker-Gleichungen der Ordnung  $p$

$$\hat{\alpha}_p(p) = \Delta(p) / \hat{Q}(p-1)$$

$$\hat{\alpha}_i(p) = \hat{\alpha}_i(p-1) - \hat{\alpha}_p(p) \hat{\alpha}_{p-i}(p-1), \quad i = 1, \dots, p-1$$

wobei  $\hat{Q}(p) = \hat{Q}(p-1)(1 - \hat{\alpha}_p^2(p))$  und  $\Delta(p) = r_p - (\hat{\alpha}_1(p-1)r_{p-1} - \dots - \hat{\alpha}_{p-1}(p-1)r_1)$ .

### Die Levinson-Durbin-Rekursion

3.26

Bei der Anwendung der Levinson-Durbin-Rekursion für die Berechnung der Yule-Walker-Schätzer  $\hat{\alpha}_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  eines AR[ $p$ ]-Modells werden in einem Durchgang auch

- die Yule-Walker-Schätzer für alle AR-Modelle niedrigerer Ordnung 1 bis  $p-1$

und

- die empirische partielle Autokorrelationsfunktion ( $\hat{\pi}_\tau$ ) des AR[ $p$ ]-Modells

berechnet.

Die empirischen partiellen Autokorrelationen  $\hat{\pi}_p$  sind gerade die Koeffizienten  $\hat{\alpha}_p(p)$ , die sich bei der Levinson-Durbin-Rekursion ergeben.

### Die partielle Autokorrelationsfunktion

3.27

Die partielle Autokorrelation zweier Zeitreihenvariablen  $Y_t$  und  $Y_{t-\tau}$  ist die Autokorrelation von  $Y_t$  und  $Y_{t-\tau}$  unter Konstanthaltung / Ausschaltung der dazwischen liegenden Zufallsvariablen  $Y_{t-\tau+1}, Y_{t-\tau+2}, \dots, Y_{t-1}$ . Die Konstanthaltung / Ausschaltung der dazwischen liegenden Variablen erfolgt, indem man die mit Hilfe der auszuschaltenden Variablen  $Y_{t-\tau+1}, Y_{t-\tau+2}, \dots, Y_{t-1}$  erstellten Prognosen  $\hat{Y}_t$  und  $\hat{Y}_{t-\tau}$  jeweils abzieht. Die partielle Autokorrelation ist dann die Kor-

relation zwischen  $Y_t - \hat{Y}_t$  und  $Y_{t-\tau} - \hat{Y}_{t-\tau}$ .

**Die partielle Autokorrelationsfunktion**

3.28

**Definition 23** (Die partielle Autokorrelationsfunktion (PACF)). Sei  $(Y_t)$  ein stationärer stochastischer Prozess. Die **partielle Autokorrelationsfunktion**  $(\pi_\tau)$ , kurz PACF, ist die Folge der Korrelationen von  $Y_t - \hat{Y}_t$  und  $Y_{t-\tau} - \hat{Y}_{t-\tau}$  wobei  $\hat{Y}_t$  und  $\hat{Y}_{t-\tau}$  die optimalen linearen Prognosen von  $Y_t$  und  $Y_{t-\tau}$  durch  $Y_{t-\tau+1}, Y_{t-\tau+2}, \dots, Y_{t-1}$  sind. Wir definieren  $\pi_0 = 1$  und  $\pi_1 = \rho_1$ .

**Die partielle Autokorrelationsfunktion**

3.29

Wir betrachten einen AR[1]-Prozess  $(Y_t)$

$$\begin{array}{ccccccccc} Y_{t-2} & \xrightarrow{\alpha} & Y_{t-1} & \xrightarrow{\alpha} & Y_t & \xrightarrow{\alpha} & Y_{t+1} & \xrightarrow{\alpha} & Y_{t+2} & \xrightarrow{\alpha} & \dots \\ \uparrow & & \\ \varepsilon_{t-2} & & \varepsilon_{t-1} & & \varepsilon_t & & \varepsilon_{t+1} & & \varepsilon_{t+2} & & \end{array}$$

Die PACF ist

$$\pi_\tau = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ \rho_1, & \tau = 1 \\ 0, & \tau > 1 \end{cases}$$

**Die partielle Autokorrelationsfunktion**

3.30

**Theorem 24.**  $(Y_t)$  ist dann und nur dann ein AR[p]-Prozess  $Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$  mit  $\alpha_p \neq 0$ , wenn  $\pi_p \neq 0$  und  $\pi_\tau = 0$  für  $\tau > p$  gilt.

Die PACF eines AR[p]-Prozesses verschwindet für Lags  $\tau > p$ . Sie hat die folgende approximative Verteilung für hinreichend großes  $N$ :

$$\hat{\pi}_N(\tau) \approx N\left(0, \frac{1}{N}\right) \text{ für } \tau > p$$

**Die partielle Autokorrelationsfunktion ■ Schwankungsintervall**

3.31

Sei  $(Y_t)$  ein AR[p]-Prozess. Für hinreichend großes  $N$  erhalten wir das approximative Schwankungsintervall für die empirische partielle Autokorrelation  $\hat{\pi}_N(\tau)$  mit  $\tau > p$

$$\pm 1.96 \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Dabei ist 1.96 rund das 0.975-Quantil der Standardnormalverteilung.

- Realisationen von  $\hat{\pi}_N(\tau)$  außerhalb des Schwankungsintervalls können in lediglich 5% der Fälle vorkommen, wenn der datengenerierende Prozess  $(Y_t)$  ein  $AR[p]$ -Prozess ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 5%).

### Modellspezifikation

3.32

Unter *Spezifikation* oder *Identifikation* eines AR-Modells verstehen wir die Bestimmung der Ordnung  $p$  des Modells. 2 Ansätze:

1. Der klassische Box-Jenkins-Ansatz besteht in der Interpretation der empirischen ACF und PACF.
2. Wir passen AR-Modelle verschiedener Ordnungen an die Daten an und wählen das geeignete Modell mit Hilfe eines Informationskriteriums aus.

### Modellspezifikation

3.33

- Verhaltensmuster der ACF: Die ACF  $\rho(\tau)$  eines stationären  $AR[p]$ -Prozesses klingt exponentiell ab und konvergiert gegen Null für  $\tau \rightarrow \infty$ .
- Verhaltensmuster der PACF: Die PACF  $\pi(\tau)$  eines stationären  $AR[p]$ -Prozesses verschwindet für Lags  $\tau > p$ .

Für genügend lange Reihen können diese Verhaltensmuster anhand der empirischen Kennfunktionen überprüft werden.

### Simulationen

3.34

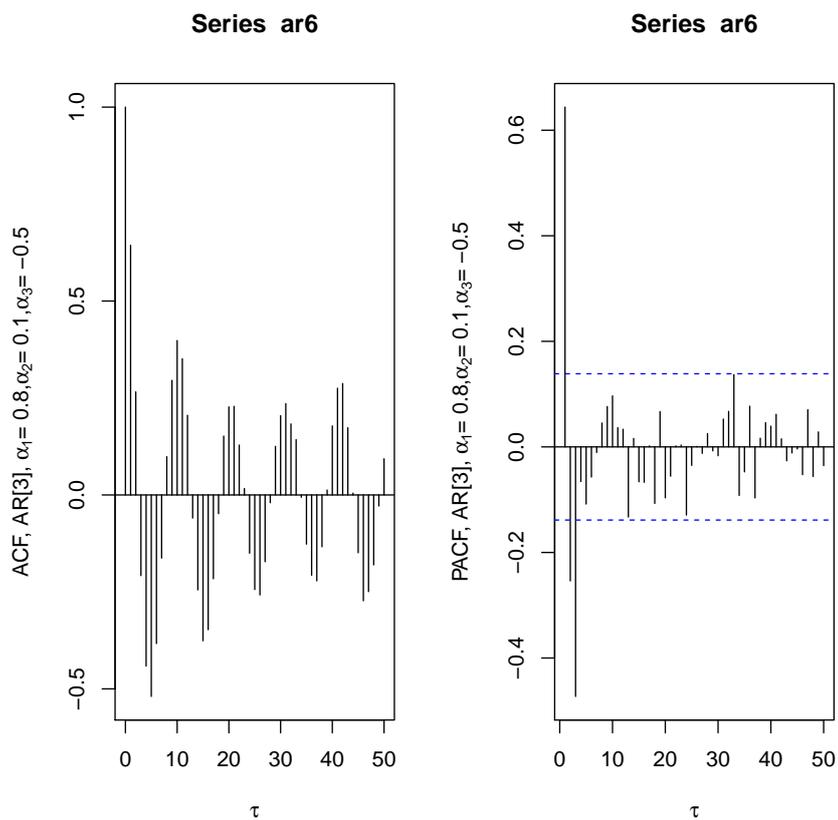


Abb. 3.3:

Simulationen

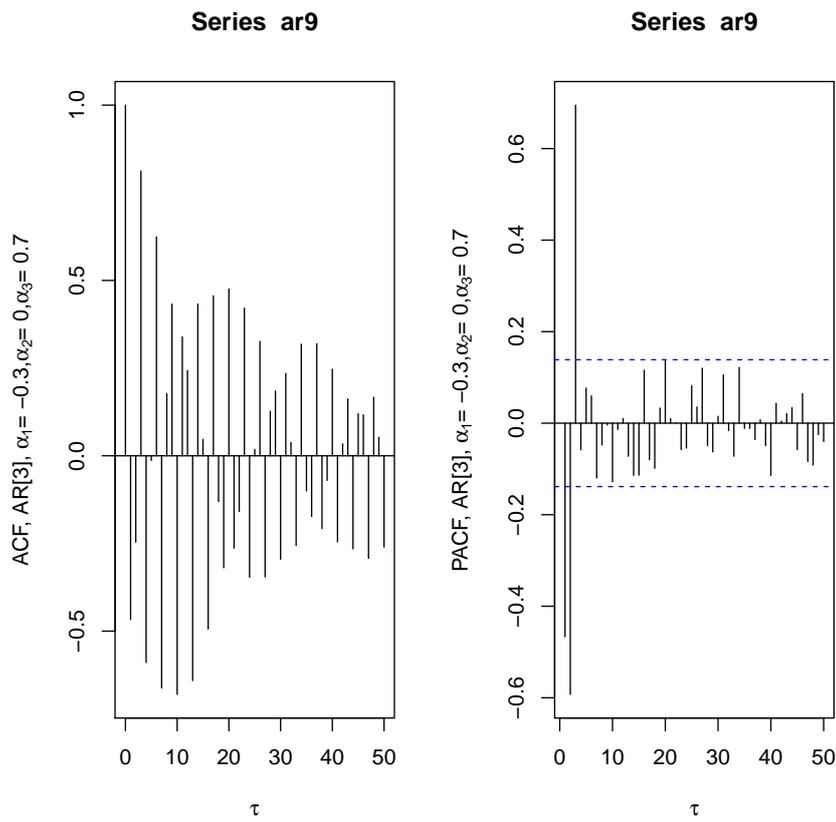


Abb. 3.4:

Simulationen

3.36

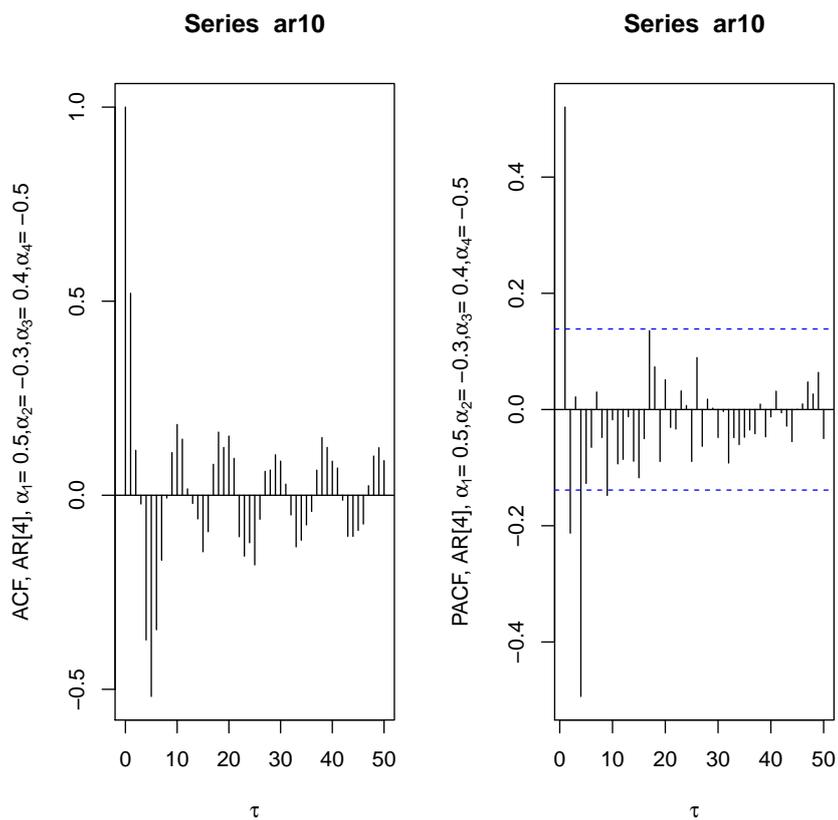


Abb. 3.5:

Simulationen

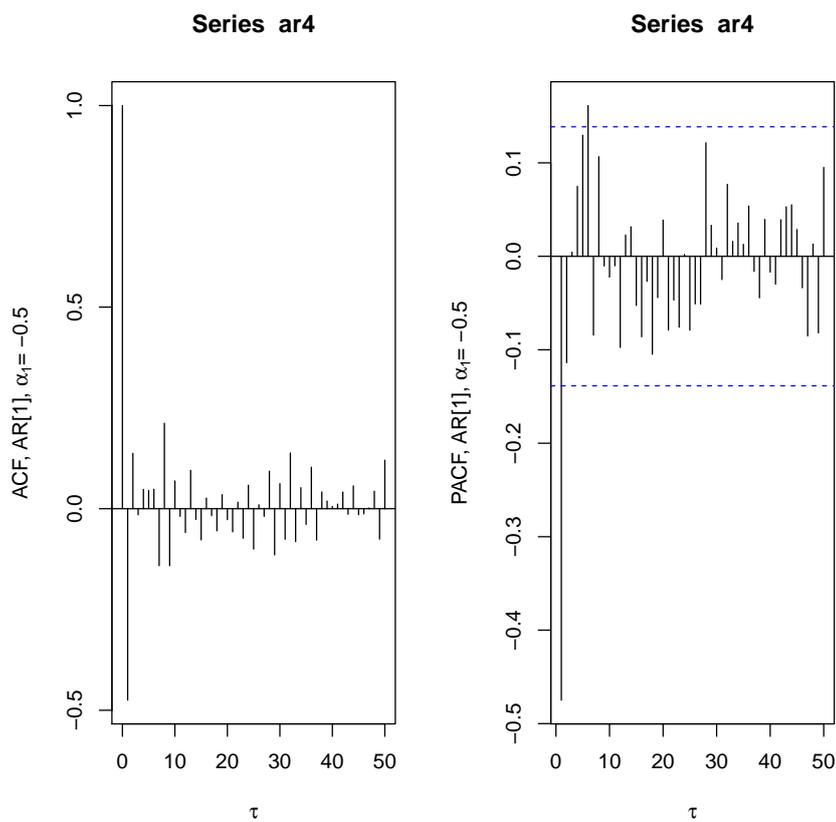


Abb. 3.6:

## Simulationen

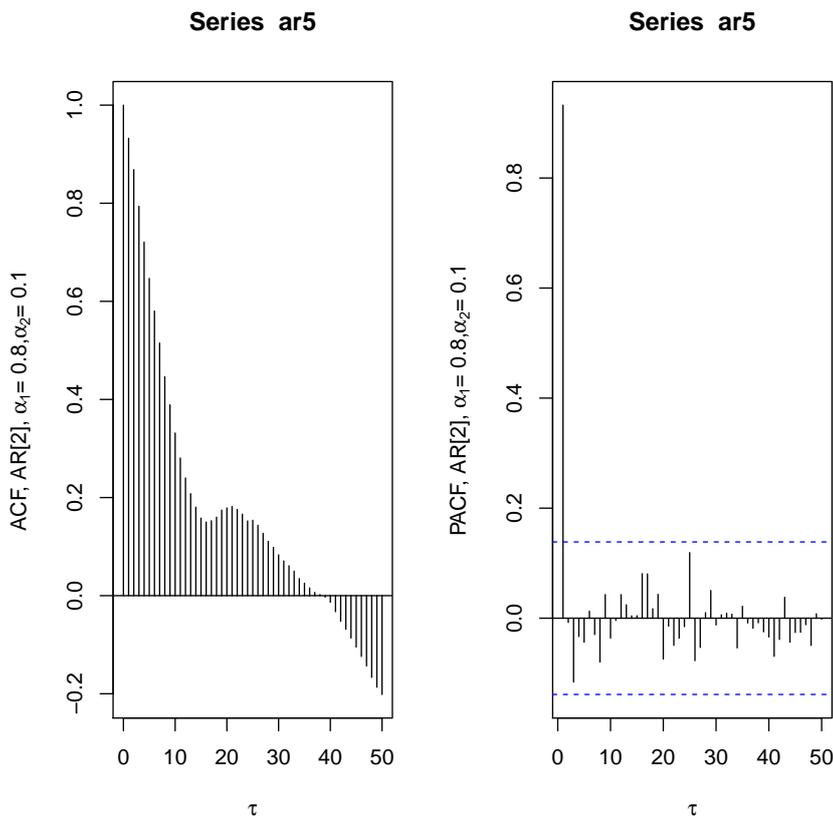


Abb. 3.7:

### 3.2.2 Invertierbare MA-Prozesse

#### Invertierbare MA-Prozesse

3.39

**Definition 25.** Ein  $MA[q]$ -Prozess  $Y_t = \beta(B)\varepsilon_t$  heißt **invertierbar**, wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\beta(z) = 1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \dots - \beta_q z^q$$

außerhalb des Einheitskreises liegen.

Invertierbare  $MA[q]$ -Prozesse können in der Form  $\varepsilon_t = \beta^{-1}(B)Y_t$  geschrieben werden, wobei

$$\beta^{-1}(B) = c_0 + c_1 B + c_2 B^2 + \dots$$

ein kausaler linearer Filter mit absolut summierbarer Koeffizientenfolge ist. Dies entspricht einer Darstellung des invertierbaren MA-Prozesses als unendlicher AR-Prozess.

**Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF**

3.40

Invertierbare MA-Prozesse sind eindeutig durch ihre ACF definiert. Die ACF ist

$$\rho_Y(\tau) = \frac{\gamma_Y(\tau)}{\gamma_Y(0)} = \begin{cases} 0, & \tau > q \\ \sum_{u=0}^{q-\tau} \beta_u \beta_{u+\tau} / \sum_{u=0}^q \beta_u^2, & 0 < \tau \leq q \\ 1, & \tau = 0 \\ \rho_Y(-\tau), & \tau < 0 \end{cases}$$

Die ACF eines MA[ $q$ ]-Prozesses verschwindet für Lags  $\tau > q$ .

**Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF**

3.41

Das Gleichungssystem

$$\rho(\tau) = \sum_{u=0}^{q-\tau} \beta_u \beta_{u+\tau} / \sum_{u=0}^q \beta_u^2, \quad 0 < \tau \leq q,$$

d.h.:

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\beta_0 \beta_1 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \dots + \beta_{q-1} \beta_q}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2} \\ \rho_2 = \frac{\beta_0 \beta_2 + \beta_1 \beta_3 + \beta_2 \beta_4 + \dots + \beta_{q-2} \beta_q}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2} \\ \vdots \\ \rho_{q-1} = \frac{\beta_0 \beta_{q-1} + \beta_1 \beta_q}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2} \\ \rho_q = \frac{\beta_0 \beta_q}{\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2} \end{cases}$$

hat  $q$  Gleichungen in  $q$  Unbekannten. Es ist eindeutig lösbar für invertierbare MA-Prozesse.

**Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF**

3.42

Für die empirische Autokorrelation  $\hat{\rho}_N(\tau)$  von einem MA[ $q$ ]-Prozess,  $\tau > q$ , gilt für hinreichend großes  $N$ :

$$\mathbb{E}[\hat{\rho}_N(\tau)] \approx 0 \quad \text{und} \quad \text{Var}[\hat{\rho}_N(\tau)] \approx \frac{1}{N} (1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \dots + 2\rho_q^2)$$

und

$$\hat{\rho}_N(\tau) \approx N \left( 0, \frac{1}{N} (1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \dots + 2\rho_q^2) \right).$$

**Eindeutige Beschreibung mit Hilfe der ACF ■ Schwankungsintervall**

3.43

Für hinreichend großes  $N$  erhalten wir das approximative Schwankungsintervall für die empirische Autokorrelation  $\hat{\rho}_N(\tau)$  von einem  $\text{MA}[q]$ -Prozess,  $\tau > q$

$$\pm 1.96 \sqrt{(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \dots + 2\rho_q^2) / N}.$$

Dabei ist 1.96 rund das 0.975-Quantil der Standardnormalverteilung.

In praktischen Anwendungen verwenden wir die so genannten Bartlett-Grenzen

$$\pm 1.96 \sqrt{(1 + 2\hat{\rho}_1^2 + 2\hat{\rho}_2^2 + \dots + 2\hat{\rho}_q^2) / N}.$$

- Realisationen von  $\hat{\rho}_N(\tau)$  außerhalb des Schwankungsintervalls können in lediglich 5% der Fälle vorkommen, wenn der datengenerierende Prozess ein  $\text{MA}[q]$ -Prozess ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 5%).

### Modellspezifikation

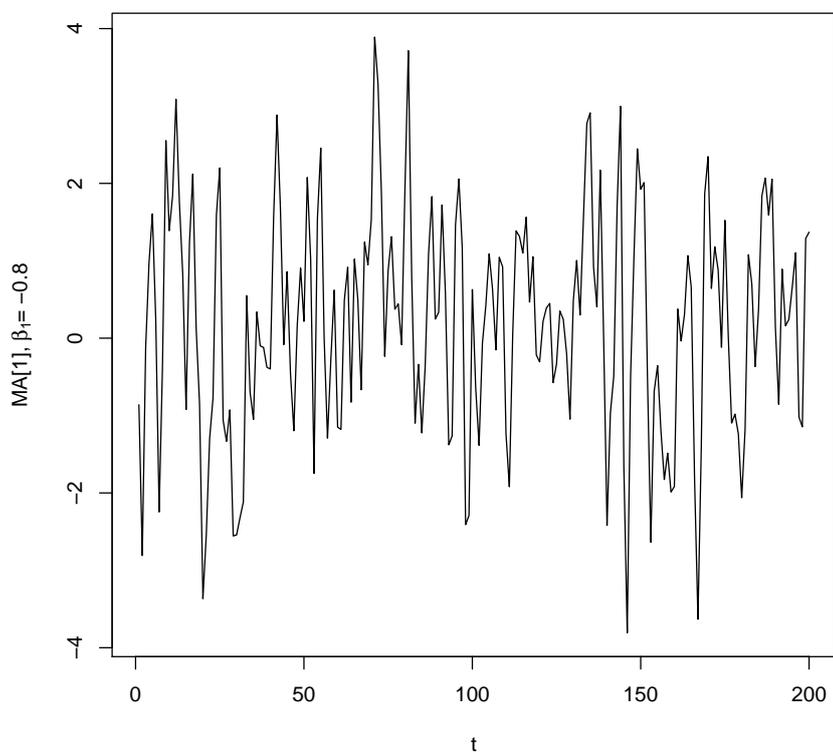
3.44

- Verhaltensmuster der ACF: Die ACF  $\rho(\tau)$  eines  $\text{MA}[q]$ -Prozesses verschwindet für Lags  $\tau > q$ .
- Verhaltensmuster der PACF: Die PACF  $\pi(\tau)$  eines  $\text{MA}[q]$ -Prozesses klingt für  $\tau > q$  exponentiell ab und konvergiert gegen Null für  $\tau \rightarrow \infty$ .

Für genügend lange Reihen können diese Verhaltensmuster anhand der empirischen Kennfunktionen überprüft werden.

### Simulationen

3.45



**Abb. 3.8:** Realisation eines MA-Prozesses

## Simulationen

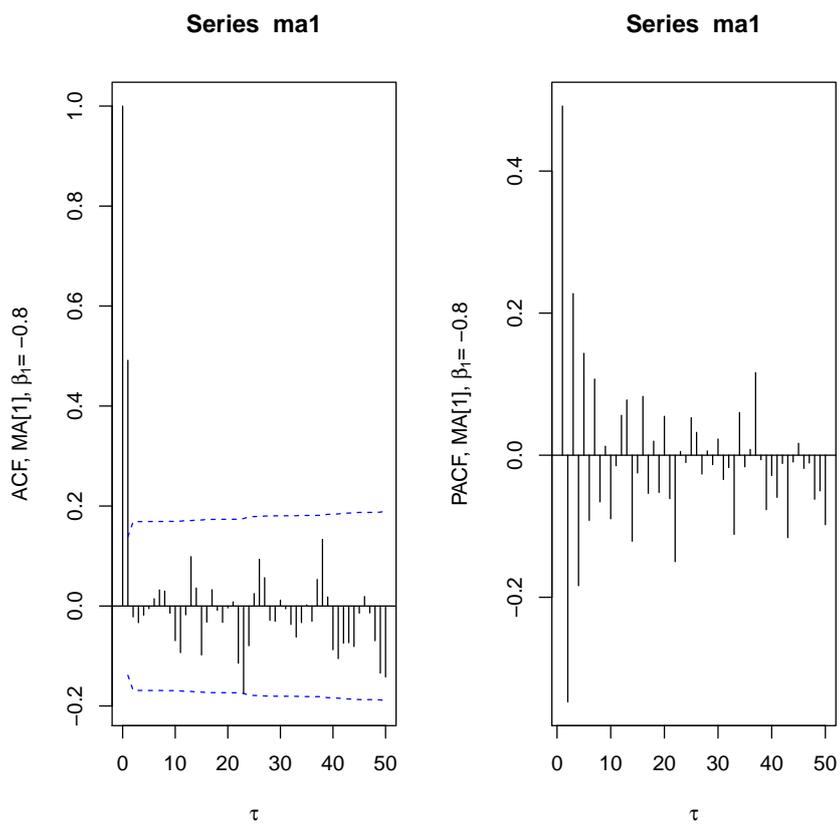


Abb. 3.9:

Simulationen

3.47

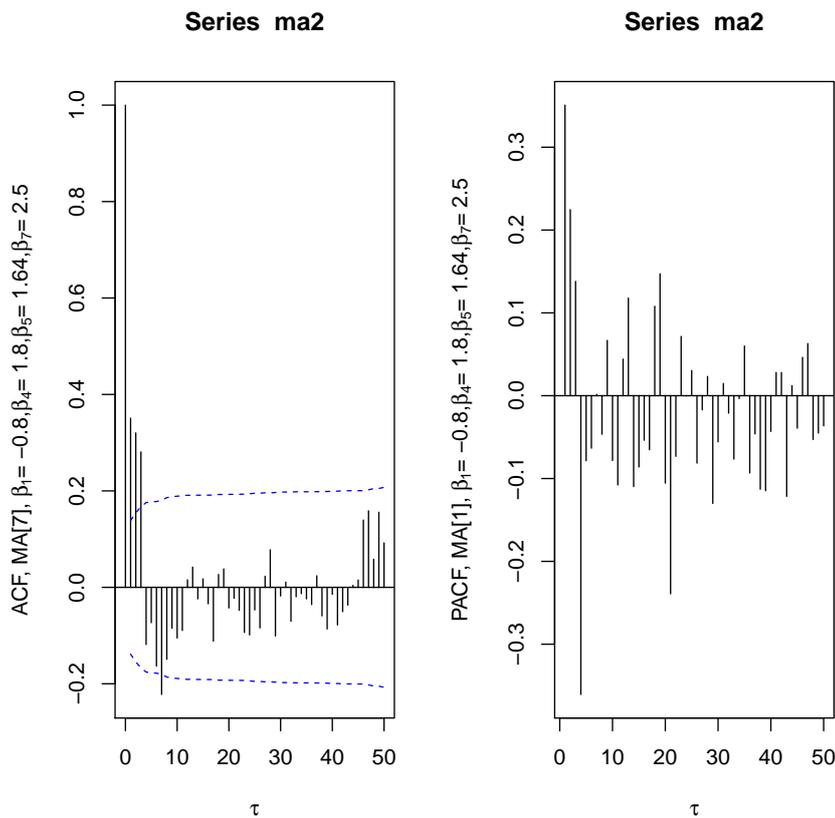


Abb. 3.10:

### 3.2.3 Stationäre und invertierbare ARMA-Prozesse

#### Stationäre und invertierbare ARMA-Prozesse

3.48

**Theorem 26.** 1. Ein ARMA-Prozess  $\alpha(B) Y_t = \beta(B) \varepsilon_t$  kann als  $MA[\infty]$ -Prozess dargestellt werden

$$Y_t = \alpha(B)^{-1} \beta(B) \varepsilon_t,$$

wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms des AR-Teils

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen.

Speziell ist  $(Y_t)$  dann ein stationärer ARMA-Prozess.

#### Stationäre und invertierbare ARMA-Prozesse

3.49

**Theorem 27.** 2. Ein ARMA-Prozess  $\alpha(B)Y_t = \beta(B)\varepsilon_t$  kann als AR[ $\infty$ ]-Prozess dargestellt werden

$$\beta(B)^{-1}\alpha(B)Y_t = \varepsilon_t$$

wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms des MA-Teils

$$1 - \beta_1z - \beta_2z^2 - \dots - \beta_qz^q = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen.

Wir sprechen von einem invertierbaren ARMA-Prozess  $(Y_t)$ .

### Modellspezifikation

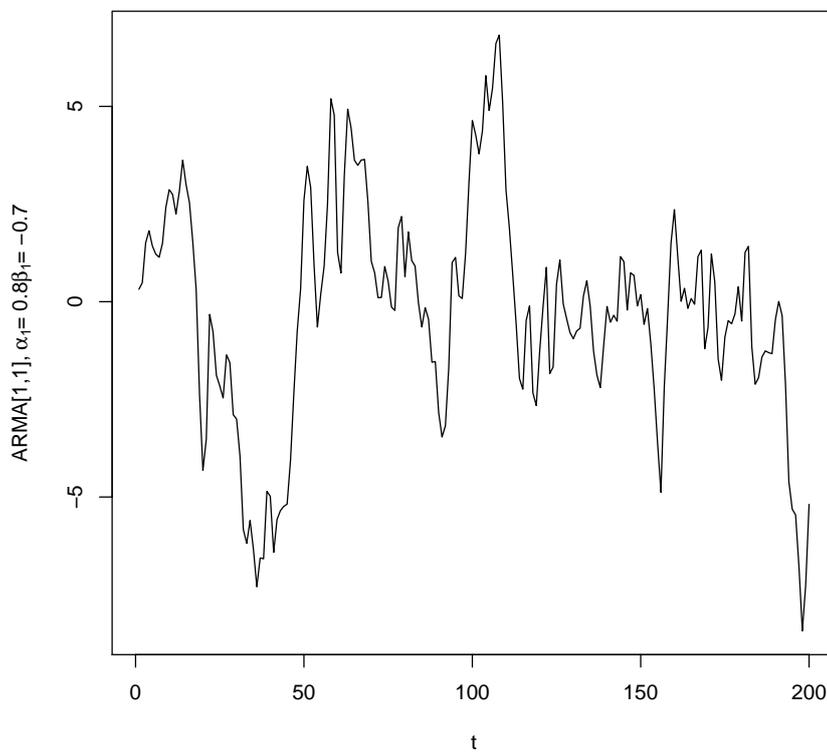
3.50

- Verhaltensmuster der ACF: Die ACF  $\rho(\tau)$  eines stationären ARMA[ $p, q$ ]-Prozesses klingt exponentiell ab und konvergiert gegen Null für  $\tau \rightarrow \infty$ .
- Verhaltensmuster der PACF: Die PACF  $\pi(\tau)$  eines stationären ARMA[ $p, q$ ]-Prozesses klingt exponentiell ab und konvergiert gegen Null für  $\tau \rightarrow \infty$ .

Die Spezifikation gemischter ARMA[ $p, q$ ]-Modelle mit Hilfe der ACF und PACF ist eine schwierige Aufgabe.

### Simulationen

3.51



**Abb. 3.11:** Realisation eines ARMA-Prozesses

## Simulationen

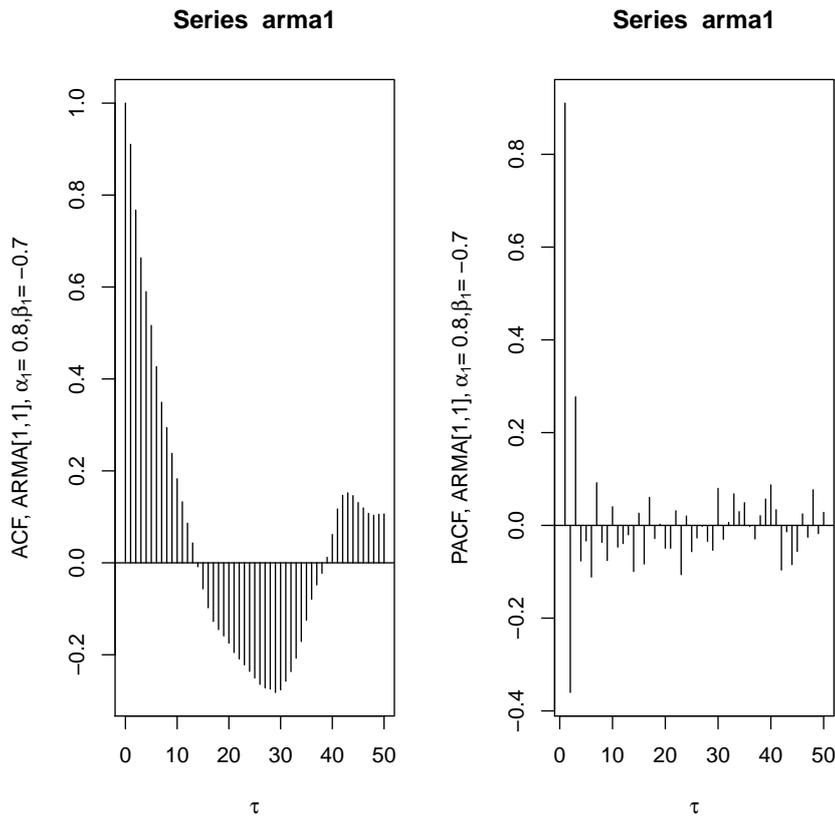


Abb. 3.12:

### Ergodizität von ARMA-Prozessen ■ Wiederholung aus Kapitel 1

3.53

**Theorem 28.**  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  sei ein stationärer Prozess mit Erwartungswert  $\mu$  und Autokovarianzfunktion  $(\gamma_\tau)$ . Ist  $(\gamma_\tau)$  absolut summierbar, so ist  $(Y_t)$  mittelwertergodisch.

Das bedeutet, dass  $\mu$  durch  $\bar{Y}_N$  konsistent geschätzt werden kann, wenn die Abhängigkeit von weit auseinanderliegenden Zeitpunkten genügend klein ist.

### Ergodizität von ARMA-Prozessen ■ Wiederholung aus Kapitel 1

3.54

**Theorem 29.** Sei  $(Y_t)$  ein stationärer Normalprozess mit absolut summierbarer Autokovarianzfunktion  $(\gamma_\tau)$ .

**alternativ:**

Sei  $(Y_t)$  ein allgemeiner linearer Prozess  $Y_t - \mu = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \beta_u \varepsilon_{t-u}$  mit  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] < \infty$  und  $\sum |\beta_u| < \infty$ . Dann ist  $(Y_t)$  kovarianzergodisch.

Der Satz besagt, unter welchen Bedingungen  $\gamma_\tau$  durch  $\hat{\gamma}_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (Y_t - \bar{Y}_N)(Y_{t+\tau} - \bar{Y}_N)$  konsistent geschätzt werden kann.

### Ergodizität von ARMA-Prozessen

3.55

- Stationäre ARMA $[p, q]$ -Prozesse sind mittelwertergodisch.
- Stationäre ARMA $[p, q]$ -Prozesse mit  $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] < \infty$  sind kovarianzergodisch.

**Hinweis:** Diese Aussagen gelten auch für MA-Prozesse und für stationäre AR-Prozesse.

### Literaturhinweise

3.56

Schlittgen und Streitberg (1999), Zeitreihenanalyse: Kapitel 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, 4.1.2, 6.2.3

Schlittgen (2015), Angewandte Zeitreihenanalyse mit R: Kapitel 3

### Literaturhinweise ■ Wiederholung von mathematischen Grundlagen

3.57

Schlittgen und Streitberg (1999), Zeitreihenanalyse: Anhänge B.1, B.2

## 3.3 Anpassung linearer Modelle

### Vorgehensweise in der Anpassung von linearen Zeitreihenmodellen

3.58

1. **Datentransformation** im Rahmen des klassischen Komponentenmodells: Erzeugen einer trend- und saisonbereinigten Reihe, die mit Hilfe eines stationären und ergodischen Prozesses modelliert werden kann.
2. **Modellspezifikation:** Bestimmung der Ordnung  $(p, q)$  des Modells. Zwei Ansätze: auf der Grundlage der ACF und PACF oder auf der Grundlage von Informationskriterien.
3. **Modellschätzung:** Schätzung der Modellparameter bei gegebener Ordnung
4. **Modelldiagnose:** Beurteilung der Anpassungsgüte
5. **Modellanwendung:** Interpretation, Prognose